Die Determinante einer $n\times n$-Matrix

Sei A eine $n\times n$ - Matrix.
Die Determinante von A berechnet sich durch folgende Regeln:

<u>Fakt</u>: 1) Bei Vertauschung zweier Zeilen behält die Determinante ihren Betrag, ändert aber ihr Vorzeichen.

2) Wird ein Vielfaches einer Zeile zu einer andern hinzugezählt, so bleibt die Determinante unverändert.

3) Wird eine ganze Zeile mit der Konstanten $c \in \mathbb{K}$ multipliziert, so multipliziert sich auch die Determinante mit c.

4) $\det I_n = 1$

<u>Folgerung:</u> Hat A eine Nullzeile, so ist $\det A = -\det A$ nach Regel 3 mit $c = -1$. Also ist $\det A = 0$.

<u>Übung:</u> Bestätige die Regeln 1–4 durch direkte Rechnung für 2×2-Matrizen.

Damit ergibt sich ein aus dem Gauß-Jordan-Verfahren abgeleiteter Weg zur Berechnung der Determinante

<u>Bsp:</u>
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =: A_0$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{II} \to \tfrac{1}{2}\mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =: A_1 \qquad \det A_1 = \tfrac{1}{2}\det A_0$$

$$\Big\downarrow\ \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =: A_2 \qquad \det A_2 = -\det A_1 = -\tfrac{1}{2}\det A_0$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{II} \to \mathrm{II} - 3\,\mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} =: A_3 \qquad \det A_3 = \det A_2 = -\frac{1}{2}\det A_0$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{II} \to -\frac{1}{5}\,\mathrm{II}$$

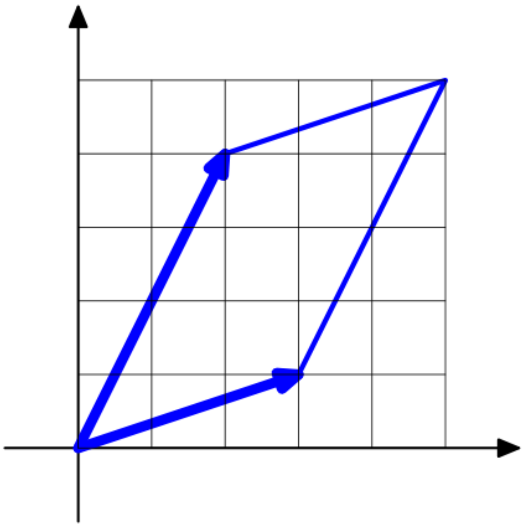
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: A_4 \qquad \det A_4 = -\frac{1}{5}\det A_3 = \frac{1}{10}\det A_0$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{I} \to \mathrm{I} - 2\,\mathrm{II}$$

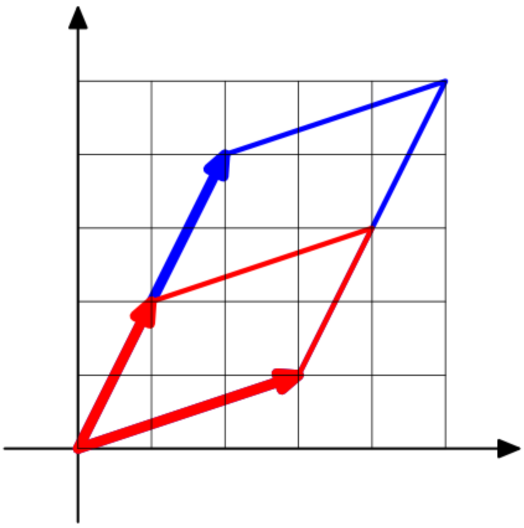
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad \det I = \det A_4 = \frac{1}{10}\det A_0$$

<u>Also:</u> $\det A_0 = 10 \det I = 10$

<u>Bem</u>: Die geometrische Interpretation der Determinante als Fläche erklärt die Regeln. Die <u>Zeilen</u> von A bestimmen ein Parallelogramm:



$$\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix} = A_0$$

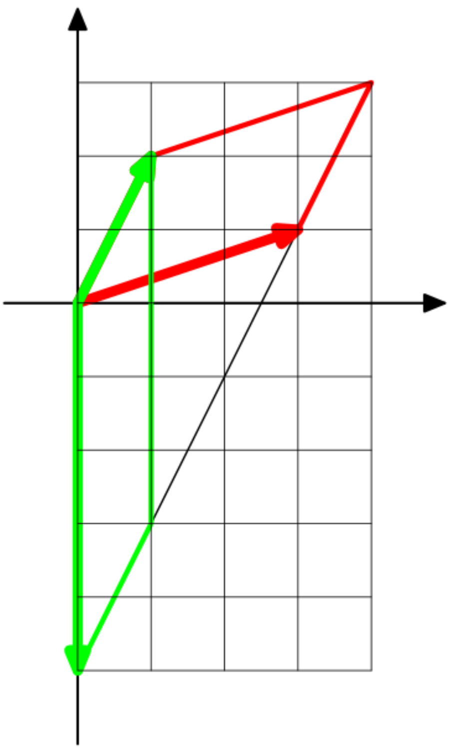


$$\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \to \frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$$

halbiert die Fläche

$$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$$

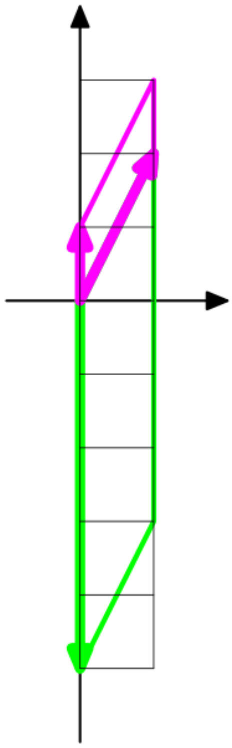
Vorzeichenwechsel



$$\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 3\mathrm{I}} \begin{bmatrix}1&2\\0&-5\end{bmatrix}$$

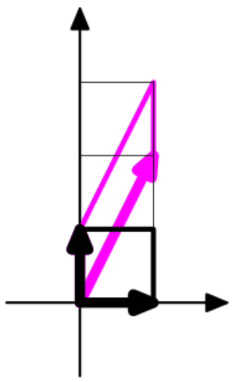
Eine Scheerung läßt die Fläche unverändert

Gleiche Grundseite und Höhe.



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} \to -\frac{1}{5}\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

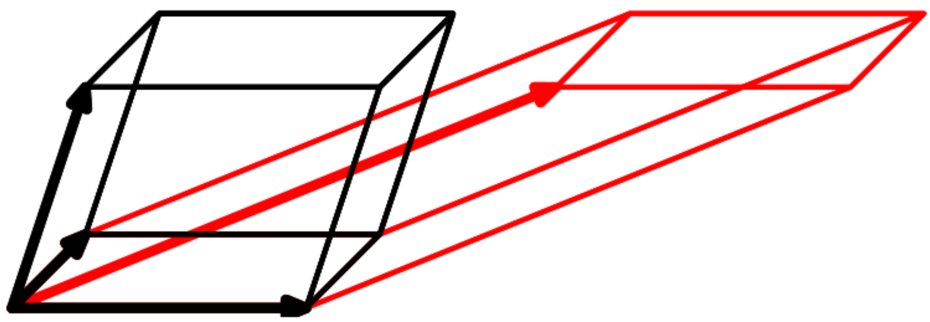
Fläche wird um den Faktor 5 gestaucht und die Orientierung ändert sich wieder.



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I} \to \text{I} - 2\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wieder eine Scheerung, die die Fläche nicht ändert.

<u>Bem</u>: Auch in höheren Dimensionen erhalten Scheerungen das Volumen:



Bsp (3×3)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Fakt: $$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{matrix} aei + bfg + cdh \\ -gec - hfa - idb \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ & & + & + & + \end{array}$$

Warnung: Ab $n=4$ gibt es keine einfachen Schemata mehr.

Fakt: Die Formel für $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ hat $n!$ Summanden! Das ergibt sich aus der sogenannten

<u>Entwicklung</u> von $n\times n$-Determinanten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{ij} = \begin{array}{c@{}c} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \cdots & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots & \cdots a_{nn} \end{array}\right) & i \\ \hphantom{a_{11} \cdots} j \hphantom{\cdots a_{1n}} & \end{array}$$

Zeile i und Spalte j gelöscht.

Dann ist

$$\det A = a_{11} \det A^{11} - a_{21} \det A^{21} + \cdots$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i1} \det A^{i1}$$

Man kann nach jeder Zeile entwickeln:

$$\det A = (-1)^j \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{ij} \det A^{ij}$$

Und auch nach Spalten:

$$\det A = (-1)^i \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_{ij} \det A^{ij}$$

Eigenvektoren und Eigenwerte

stimmen überein! (Endomorphismus)

<u>Def</u>: Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung. Ein Vektor $\underline{v} \in V - \{0\}$ heißt <u>Eigenvektor</u> von f zum <u>Eigenwert</u> $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn gilt:

$$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

<u>Bsp</u>: Ist $V = \mathbb{K}^n$, so wird f durch eine $n \times n$-Matrix A beschrieben und wir sehen, daß eine Spalte $\underline{v} \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ ein <u>Eigenvektor</u> von A zum <u>Eigenwert</u> $\lambda \in \mathbb{K}$ ist, wenn

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

ist.

Def: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von $f: V \to V$, wenn f einen Eigenvektor $\underline{v} \in V - \{0\}$! zum Eigenwert λ hat.

Def: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ wenn A einen Eigenvektor $\underline{v} \in \mathbb{K}^n - \{0\}$! zum Eigenwert λ hat.

Aufgabe: Gegeben $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, bestimme die Eigenwerte von A und finde zugehörige Eigenvektoren.

Lösung: λ ist Eigenwert von A

$$\iff \exists\ \underline{v} \neq 0 : \quad A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$$\iff \exists\ \underline{v} \neq 0 : \quad (A - \lambda I_n)\,\underline{v} = 0$$

$$\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_n$ ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Und das ist eine Gleichung in λ, die wir lösen können.

Fakt: $\det(A - \lambda I_n)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$ in λ. Es heißt das charakteristische Polynom von A, und wir notieren es mit $\chi_A(\lambda)$.

Also: Die Eigenwerte von A sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynom χ_A.

Bsp: Wir finden die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda(1-\lambda) - 1 \cdot 1$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 1$$

Die Eigenwerte sind also die Lösungen der Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda = 1 \quad \Big| + \frac{1}{4}$$
$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
$$\lambda - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Damit haben wir <u>zwei</u> Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Zugehörige Eigenvektoren ergeben sich aus der Bedingung

$$(A - \lambda I)\,\underline{v} = 0$$

$\underline{\lambda_1}$:
$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor}$$

Beob $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$
$$= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\underline{\text{Spur}}}\lambda + \underbrace{ad-bc}_{\text{Determinante}},$$

Def: Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die <u>Spur</u> von A

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die Summe der Diagonaleinträge.

Bem: Spur und Determinante treten als Koeffizienten des char. Polynom auf. (Vorzeichen hängt von n ab).

Fakt: Das char. Polynom $\chi_A(\lambda)$ ist invariant unter Konjugation von A.

<u>Def</u>: Sei λ ein Eigenwert von $f: V \to V$. Der <u>Eigenraum</u> zu λ ist der Unterraum

$$E_\lambda := \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$$
$$= \ker(f - \lambda \, id_V)$$

Ist $V = \mathbb{K}^n$ und f gegeben durch $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$, so ist

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$$