Mathematatik II für Chemie

Aufgaben-Steinbruch, 1te Lieferung

Aufgabe 1. Löse die Gleichungssysteme

$$\left\|\begin{array}{rrrcr} -x & +2y & -5z & = & 1 \\ & -y & +3z & = & 1 \\ & & -z & = & 1 \end{array}\right\| \qquad \left\|\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & -z & = & 12 \\ x & -y & +z & = & 10 \\ & y & -z & = & 1 \end{array}\right\| \qquad \left\|\begin{array}{rrrcr} -x & +2y & -5z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \end{array}\right\|$$

Warum ist das erste viel einfacher als die beiden andern?

Aufgabe 2. Berechne:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^\tau\right] \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Daß Linksinverse und Rechtsinverse übereinstimmen, läßt sich mit als Äquivalenz linearer Gleichungssysteme deuten. Betrachte die Bedingungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Bedingung besagt, daß $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Linksinverse von $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ist und die zweite Bedingung besagt, daß die unbekannte Matrix eine Rechtsinverse ist. Zeige, daß die korrespondierenden linearen Gleichungssysteme äquivalent sind.

Aufgabe 4. Bestätige duch Rechnen mit Buchstaben:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)^\tau = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^\tau \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\tau$$

Finde ein Beispiel für:

$$(AB)^\tau \neq A^\tau B^\tau$$

Aufgabe 5. Bestätige durch Rechnen mit Buchstaben die folgende Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$