Mathematik II für Chemie

Aufgaben-Steinbruch, 3te Lieferung

Aufgabe 1. Die folgenden Matrizen $M = (A|\mathbf{b})$ in reduzierter Zeilenstufenform beschreiben lineare Gleichungssysteme in den Variablen x, y, z, t. Identifizere jeweils die abhängigen und unabhängigen Variablen und lies die Lösungsmengen ab.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 2. Überführe durch elementare Zeilenoperationen in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welchen unterschied macht es in bezug auf Rechenvorteile, ob Spalten links oder rechts wegfallen?

Aufgabe 3. Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Die dritte Spalte läßt sich durch die ersten beiden wiefolgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die für die vierte Spalten haben wir ganz ähnlich:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, daß diese *Relationen* zwischen den Spalten bei jeder elementaren Zeilentransformation erhalten bleiben.