Mathematik II für Chemie

Aufgaben-Steinbruch, 5te Lieferung

Aufgabe 1. Finde eine möglichst große linear unabhängige Teilmenge in:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2. Entscheide, ob zwei Mengen aus Aufgabe 1 denselben Unterraum von $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ aufspannen.

Aufgabe 3. Ordne die folgenden Unterräume von$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nach Inklusion, .d.h., entscheide, welcher Verktorraum in welchem andern enthalten ist:

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$V_2 := \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$V_3 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$V_4 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$V_5 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$V_6 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a + b = c + d \right\}$$

Aufgabe 4. Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$$

Zeige, daß M den Raum $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ aufspannt.