Mathematik II für Chemie

Aufgaben-Steinbruch, 7te Lieferung

Aufgabe 1. Bestimme Basen für Kern und Bild der folgenden Matrizen. Bestimme auch die Dimensionen von Kern und Bild:

$$\begin{pmatrix} -7 & -19 & 7 & 13 & 0 \\ 5 & 11 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -10 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 173 & -122 & 30 & -73 & 64 \\ -219 & 154 & -36 & 93 & -80 \\ 5 & -2 & -6 & -4 & -2 \\ -165 & 116 & -27 & 70 & -60 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei $f : V \to W$ linear. Es sei $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ eine Basis für U und $C = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_3)$ eine Basis für V. Wir wissen:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{v}_4) &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

Bestimme $f(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$. Entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder gar bijektiv ist.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to W$ linear. Es sei $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ eine Basis für U und $C = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_3)$ eine Basis für V. Wir wissen:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{w}_1 \\ f(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) &= \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) &= \mathbf{w}_1 \end{aligned}$$

Bestimme $f(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$. Entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder gar bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to W$ linear. Es sei $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ eine Basis für U und $C = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_3)$ eine Basis für V. Wir wissen:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) &= \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) &= \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_1 \\ f(\mathbf{v}_4 + 2\mathbf{v}_1) &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \end{aligned}$$

Bestimme $f(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$. Entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder gar bijektiv ist.