

Mathematik II für Chemie

Probeklausur

Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, sind Antworten zu begründen und Umformungen durchzuführen.

Aufgabe 1. Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Bestimme Maxima, Minimal und Sattelpunkte der Funktion:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$$

Aufgabe 3. Die Funktion $y = f(x)$ sei implizit definiert durch

$$y^3 = 8 + yx^2$$

definiert. Bestimme $\frac{df}{dx}$ durch implizites Ableiten. Bestätige, daß $x = 0, y = 2$ der einzige Kandidat für ein Extremum ist. Berechne die zweite Ableitung $\frac{d^2f}{dx^2}$ an der Stelle $x = 0, y = 2$. Was läßt sich nun darüber sagen, ob f an dieser Stelle ein Maximum (Minimum) hat?

Aufgabe 4. Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Standardbasis des \mathbb{R}^3 an und bestimme so eine B -Orthonormalbasis für $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5. Bestimme die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und finde Basen für die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 6. Hier ist keine Begründung der Antworten oder explizite Rechnung gefordert.

1. Gib für jede der folgenden Matrizen an, ob sie positiv definit, negativ definit oder indefinit ist:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Für die Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ sind die Taylor-Entwicklungen an der Stelle $x = y = 0$ bekannt:

$$f(x, y) = 1 + (1, 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

$$g(x, y) = 2 + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

$$h(x, y) = 1 + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

Bestimme, welche Funktion bei $(0, 0)$ ein Minimum, ein Maximum, oder einen Sattel hat?

Erläuterung: Als Hilfsmittel können Sie einen zugelassenen Taschenrechner verwenden. Diese Probeklausur ist auf eine Bearbeitungsdauer von 100 Minuten ausgelegt.