Folien zur Analysis I

Kai-Uwe Bux

Bielefeld, Wintersemester 2015/16

Georg Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

---

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

[. . .]

Jeder Menge M kommt eine bestimmte „Mächtigkeit“ zu, welche wir ihre „Kardinalzahl“ nennen.

„Mächtigkeit“ oder „Kardinalzahl“ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkverögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.

Fregesche Mengenlehre

Mengengleichheit Jede Menge ist durch ihre Elemente vollständig bestimmt. D.h., zwei Mengen M und L sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$M = L \quad \text{falls} \quad \forall x : x \in M \text{ genau dann, wenn } x \in L$$

Mengenbildung Ist φ ein einstelliges Prädikat, so gibt es eine Menge M (die Extension des Prädikats), die genau diejenigen Gegenstände enthält, auf die φ zutrifft. D.h.:

$$\forall x : x \in M \text{ genau dann, wenn } \varphi(x)$$

In Zeichen schreiben wir $\{x \mid \varphi(x)\}$ für die Extension von φ. (Wegen der ersten Forderung ist die Extension eines Prädikats eindeutig bestimmt.)

Die natürlichen Zahlen nach Frege

Frege wollte damit die Zahlen definieren. So ist die Fregesche Zwei definiert als

$$2_F := \{M \mid M \text{ hat genau zwei Elemente}\}$$

und man kann sagen, daß M genau zwei Elemente enthält, wenn gilt:

- M enthält mindestens zwei Elemente. D.h.:

  $$\exists x, y : x \in M \text{ und } y \in M \text{ und } x \neq y$$

  und

- M enthält höchstens zwei Elemente. D.h.:

  $$\forall x, y, z \in M : x = y \text{ oder } y = z \text{ oder } x = z$$

Die Russelsche Antinomie

Das Prinzip der unbeschränkt zulässigen Mengenbildung implziert einen Widerspruch: Betrachte die Menge

$$R := \{x \mid x \notin x\}$$

Dann ist:

$$R \in R \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad R \notin R$$

Dieser Widerspruch zeigte, daß Freges Prinzip der freien (unbeschränkten) Mengenbildung aufgegeben werden mußte.

Das Extensionalitätsaxiom

Axiom. *Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Also:*

$$M = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : x \in M \Longleftrightarrow x \in L$$

Definition. Eine Menge M heißt <u>Teilmenge</u> der Menge L, wenn gilt

$$\forall x : x \in M \Longrightarrow x \in L.$$

Für diesen Fall schreiben wir $M \subseteq L$.

Gilt *außerdem* $M \neq L$, so nennen wir M eine <u>echte Teilmenge</u> und schreiben $M \subset L$.

Das Aussonderungsaxiom

Axiom. *Sei φ eine Bedingung, die von freien Variablen abhängen kann. Sei M eine Menge, dann gibt es eine Menge L mit*

$$\forall x : x \in L \Longleftrightarrow x \in M \text{ und } \varphi(x)\,.$$

Für diese Menge schreiben wir:

$$\{x \in M \mid \varphi(x)\}$$

Das Paarbildungsaxiom

Axiom. *Für beliebige x und y gibt es eine Menge M, so daß*

$$\forall z : z \in M \iff z = x \text{ oder } z = y.$$

Wir schreiben $\{x, y\}$ für diese Paarmenge. Sie ist wegen Extensionalität eindeutig.

Definition von Einermengen. Der Fall $x = y$ ist im Paarbildungsaxiom nicht ausgeschlossen. In diesem Fall schreiben wir $\{x\}$ für die eindeutig bestimmte Menge die

$$\forall z : z \in \{x\} \iff z = x$$

erfüllt.

Das Axiom von der Vereinigungsmenge

Axiom. *Sei M eine Menge, dann gibt es eine Menge $\mathrm{V}(M)$, genannt Vereinigung über M, so daß*

$$\forall x : x \in \mathrm{V}(M) \Longleftrightarrow (\exists y \in M : x \in y)$$

gilt.

Bemerkung. *Für jedes Element $m \in M$ gilt: $m \subseteq \mathrm{V}(M)$.*

Beweis. Sei nämlich $x \in m$, so gibt es ein $m \in M$ mit $x \in m$. Mithin ist $x \in \mathrm{V}(M)$. Also:

$$\forall x : x \in m \Longrightarrow x \in \mathrm{V}(M)$$

D.h.:$m \subseteq \mathrm{V}(M)$. **q.e.d.**

Definition. Für zwei Mengen M und L heißt

$$M \cup L := \mathrm{V}(\{M, L\}) = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in L\}$$

auch die Vereinigung von M und L.

Das Axiom von der Potenzmenge

Axiom. *Für jede Menge M gibt es die Menge aller ihrer Teilmengen, also eine Menge $\mathrm{P}(M)$ mit*

$$\forall x : x \in \mathrm{P}(M) \iff x \subseteq M.$$

Beispiel. Ist $M = \{m, l\}$ eine Paarmenge, so ist die Potenzmenge

$$\mathrm{P}(M) = \{\emptyset, \{m\}, \{l\} \{m, l\}\}$$

Die Potenzmenge hat also 4 Elemente.

Allgemein hat die Potenzmenge einer n-elementigen Menge 2^n Elemente.

Das Axiom von der leeren Menge

Axiom. *Es gibt eine leere Menge* $\emptyset$*. D.h.,* $\forall x : x \notin \emptyset$.

Bemerkung. Erst mit diesem Axiom ist die Existenz von Mengen sichergestellt. Jetzt gibt es aber auch gleich sehr viele.

Das geordnete Paar nach Kuratowski

Definition. Für zwei Mengen x und y heißt

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

das <u>geordnete Paar</u> von x und y.

Die wichtige Eigenschaft des geordneten Paares ist:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

Dies folgt aus dem Extensionalitätsaxiom.

Definition. Durch

$$(x, y, z) := ((x, y), z)$$

werden <u>Tripel</u> definiert.

Das Kreuzprodukt zweier Mengen

Satz und Definition. *Für je zwei Mengen* M *und* L *gibt es eine (wegen Extensionalität sogar* genau *eine) Menge* $M \times L$*, genannt* Kreuzprodukt *oder* *direktes Produkt, mit:*

$$\forall z \quad : \quad z \in M \times L \iff (\exists x \in M, y \in L : z = (x, y))\,.$$

Also wird das Kreuzprodukt beschrieben durch den Mengenterm

$$M \times L = \{z \,|\, \exists x \in M, y \in L : z = (x, y)\}$$

Wir schreiben auch

$$M \times L = \{(x, y) \,|\, x \in M,\ y \in L\}$$

In dieser Darstellung heißen x *und* y Laufvariablen*. Sie* durchlaufen M *bzw.* L*.*

Beweis: ...

Relationen

Definition. Eine freie Relation ist eine Menge R geordneter Paare.

Sind M und L Mengen, so ist eine Relation zwischen M und L ein Tripel (M, L, R), worin R eine Teilmenge von $M \times L$ ist. Die Menge R ist also eine freie Relation. Wir nennen M den Definitionsbereich der Relation und L ihren Wertebereich.

Eine Relation zwischen M und M nennen wir eine Relation auf M.

Bemerkung. Für jede freie Relation R gibt es Mengen, M und L, so daß $R \subseteq M \times L$. Genauer: die Ausdrücke

$$\{x \mid \exists y : (x, y) \in R\}$$

und

$$\{y \mid \exists x : (x, y) \in R\}$$

definieren Mengen, das Urbild und das Bild von R.

Funktionen

Definition. Eine Relation $f \subseteq M \times L$ zwischen den Mengen M und L heißt Funktion (oder Abbildung) von M nach L, wenn es für jedes $x \in M$ *genau ein* $y \in L$ gibt, für das $(x, y) \in f$. Dieses durch x *eindeutig bestimmte* $y \in L$ notieren wir als

$$f(x)$$

und nennen es den Wert der Funktion f an der Stelle x. Wir sagen auch, f bilde x auf y ab.

Durch die Notation

$$f : M \longrightarrow L$$

drücken wir aus, daß wir mit f eine Funktion von M nach L meinen.

Bemerkung. Genaugenommen ist eine Funktion also ein Tripel

$$(M, L, f \subseteq M \times L)$$

dessen dritter Eintrag, der Werteverlauf oder der Graph der Funktion ist.

Urbilder, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Definition. Für $y \in L$ definiert der Ausdruck

$$f^{-1}[y] := \{x \in M \mid f(x) = y\}$$

eine Menge nach Aussonderungsschema. Wir nennen sie, die Urbildmenge von y unter f und ihre Elemente heißen Urbilder von y. Die Funktion f heißt injektiv, wenn jedes $y \in L$ *höchstens* ein Urbild hat. Die Funktion f heißt surjektiv, jedes $y \in L$ *mindestens* ein Urbild hat. Die Funktion f heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall hat jedes $y \in L$ genau ein Urbild und die Menge

$$f^{-1} := \{(y, x) \in L \times M \mid (x, y) \in f\}$$

ist eine Funktion von L nach M, die Umkehrfunktion zu f.

Bemerkung. Zueinander bijektive Mengen haben gleichviele Elemente. Wir nennen zueinander bijektive Mengen gleichmächtig.

Verkettung von Funktionen

Satz und Definition. *Seien M, L und K Mengen. Ferner seien $f : M \to L$ und $g : L \to K$ Funktionen. Dann ist die* <u>*Verkettung*</u>

$$g \circ f := \{(m, k) \in M \times K \mid \exists l \in L : (m, l) \in f \text{ und } (l, k) \in g\}$$

(ich lese das als „g nach f“) eine Funktion von M nach K. Es gilt:

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) \qquad \forall m \in M$$

Bemerkung. *Seien $f : M \to L$, $g : L \to K$ und $h : K \to H$ Funktionen. Verkettung von Funktionen* <u>*assoziativ*</u> *ist:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Die identische Funktion

Definition. Für jede Menge M ist

$$\mathrm{id}_M := \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

eine Funktion. Sie erfüllt die definierende Bediungung

$$\mathrm{id}_M(m) = m \qquad\qquad \forall m \in M$$

Die Funktion id_M heißt auch die identische Abbildung auf M.

Bemerkung. Funktionen werden oft als Zuordnungen eingeführt. Dann liegt eine Notation wie die folgende nahe:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M : M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Funktionen sind keine Zuordnungsvorschriften

In der Literatur findet sich zuweilen die Erläuterung, daß eine Abbildung eine Abbildungs*vorschrift* sei. Das ist irreführend, selbst für Funktionen, die durch eine Vorschrift (was auch immer das sein mag) erklärt werden können. So betrachte man die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 + (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind *gleich*, aber die zur Definition von f und g angegebenen Vorschriften sind *verschieden*.

Ein Satz von Cantor

Satz. *Keine Menge ist gleichmächtig mit ihrer Potenzmenge. Genauer: Sei M eine Menge und $f : M \to \mathrm{P}(M)$ eine Funktion. Dann ist f nicht surjektiv.*

Beweis. Wir bilden die Teilmenge

$$L := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$$

und behaupten, daß $L \in \mathrm{P}(M)$ nicht im Bild von f liegen kann.

Nehmen wir also an, es gäbe ein $y \in M$ mit $L = f(y)$. Dann wäre

$$y \in L \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin L$$

Das ist absurd. **q.e.d.**

Korollar. *Es gibt keine „größte" Menge. Insbesondere gibt es keine* Allmenge*, also eine Menge $\{x \mid x = x\}$, die alles enthält.*

Folgerung. *Es gibt keine Menge M, die alle einelementigen Mengen enthält. Insbesondere ist 1_F keine Menge.*

Beweis. Die einelementigen Mengen sind gerade die Mengen der Form $\{x\}$. Wir haben also die Annahme zum Widerspruch zu führen, daß es eine Menge M gibt mit

$$\forall x : \{x\} \in M$$

Sei also M so eine Menge. Wir bilden die Vereinigung

$$L := \mathrm{V}(M)$$

Dann gilt für jedes x:

$$\{x\} \in M \Longrightarrow \{x\} \subseteq L \Longrightarrow x \in L$$

Also enthält L alles. Aber es gibt keine Allmenge. **q.e.d.**

Das Ersetzungsaxiom (Fraenkel)

Axiom. *Sei $\varphi(x, y)$ ein zweistelliges Prädikat (das von weiteren freien Variablen abhängen darf). Sei M eine Menge, so daß gilt:*

$$\forall x \in M \, \exists ! \, y : \varphi(x, y) \, .$$

Dann gibt es eine Menge L, so daß:

$$\forall y \quad : \quad y \in L \iff (\exists x \in M : \varphi(x, y)) \, .$$

Bemerkung. Das Ersetzungsschema sichert, daß der Ausdruck φ eine Funktion f auf M beschreibt, indem es postuliert, daß die Bildmenge L existiert (d.h., daß es eine Menge gibt, die als Bildmenge fungieren kann). Dann gibt es auch das direkte Produkt $M \times L$, und daraus läßt sich f per Aussonderungsschema bilden:

$$f := \{(x, y) \in M \times L \mid \varphi(x, y)\} \, .$$

Auf diese Weise gilt $\varphi(x, f(x))$ für jedes $x \in M$.

Das Auswahlaxiom

Axiom. *Seien M und L Mengen, und sei $R \subseteq M \times L$ eine Relation. Wenn gilt:*

$$\forall m \in M \ \exists l \in L : (m, l) \in R$$

dann gibt es eine Funktion $f : M \to L$ mit $f \subseteq R$, also so daß $(m, f(m)) \in R$ für jedes $m \in M$.

Alternative Formulierung. *Sei $f : M \to L$ eine surjektive Funktion. Dann gibt es einen Schnitt, d.h. eine Funktion $g : L \to M$, so daß*

$$\forall y \in L : f(g(y)) = y.$$

Alternative Formulierung. *Sei M eine Menge, deren Elemente nicht-leere und paarweise disjunkte Mengen sind. Dann gibt es eine Menge L, so daß jedes Element von L genau einem Element von M als Element angehört.*

Definition: Zwei Mengen sind disjunkt oder elementfremd, wenn sie kein Element gemeinsam haben.

„Beweis“ des Auswahlaxiom

Behauptung. *Jede Surjektion hat einen Schnitt.*

Beweis. Sei $f : M \to L$ surjektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in L$ ein $x_y \in M$, das von y abhängt (dafür der Index), mit:

$$f(x_y) = y$$

Nun definiere die Abbildung:

$$\begin{aligned} g : L &\to M \\ y &\mapsto x_y \end{aligned}$$

Dann ist g ein Schnitt zu f, denn für $y \in L$ haben wir

$$f(g(y)) = f(x_y) = y$$ **q.e.d.**

Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge. Eine Relation $\preceq := (M, M, R \subseteq M \times M)$ auf M heißt <u>Ordnung</u> oder <u>partielle Ordnung</u>, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Relation $\preceq$ ist <u>reflexiv</u>:

$$\forall x \in M : x \preceq x$$

2. Die Relation $\preceq$ ist <u>antisymmetrisch</u>:

$$\forall x, y \in M : \quad x \preceq y \text{ und } y \preceq x \Longrightarrow x = y$$

3. Die Relation $\preceq$ ist <u>transitiv</u>:

$$\forall x, y, z \in M : \quad x \preceq y \text{ und } y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$$

Bemerkung: Wir schreiben dabei $x \preceq y$ für $(x, y) \in R$.

Vergleichbarkeit

Definition. Zwei Element $x, y \in M$ heißen vergleichbar bezüglich $\preceq$, wenn

$$x \preceq y \quad \text{oder} \quad y \preceq x$$

gilt. Sind je zwei Elemente von M vergleichbar miteinander bezüglich $\preceq$, so heißt die Ordnung $\preceq$ total oder Anordnung.

Beispiel. Die vertraute Kleiner-Gleich-Relation ist eine Anordnung auf der Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen.

Beispiel: Ordnung durch Inklusion

Beispiel 4.2. Sei M eine Menge. Dann ist die Relation

$$(\mathrm{P}(M),\ \mathrm{P}(M),\ \{(A,B) \mid A,B \in \mathrm{P}(M) \text{ und } A \subseteq B\} \subseteq \mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}(M))$$

(hier explizit als Tripel beschrieben) eine Ordnung auf der Potenzmenge $\mathrm{P}(M)$. Wir nennen dies die <u>Ordnung durch Inklusion</u> und notieren sie mit $\subseteq$.

$\subseteq$ **ist reflexiv,** denn $x \subseteq x$.

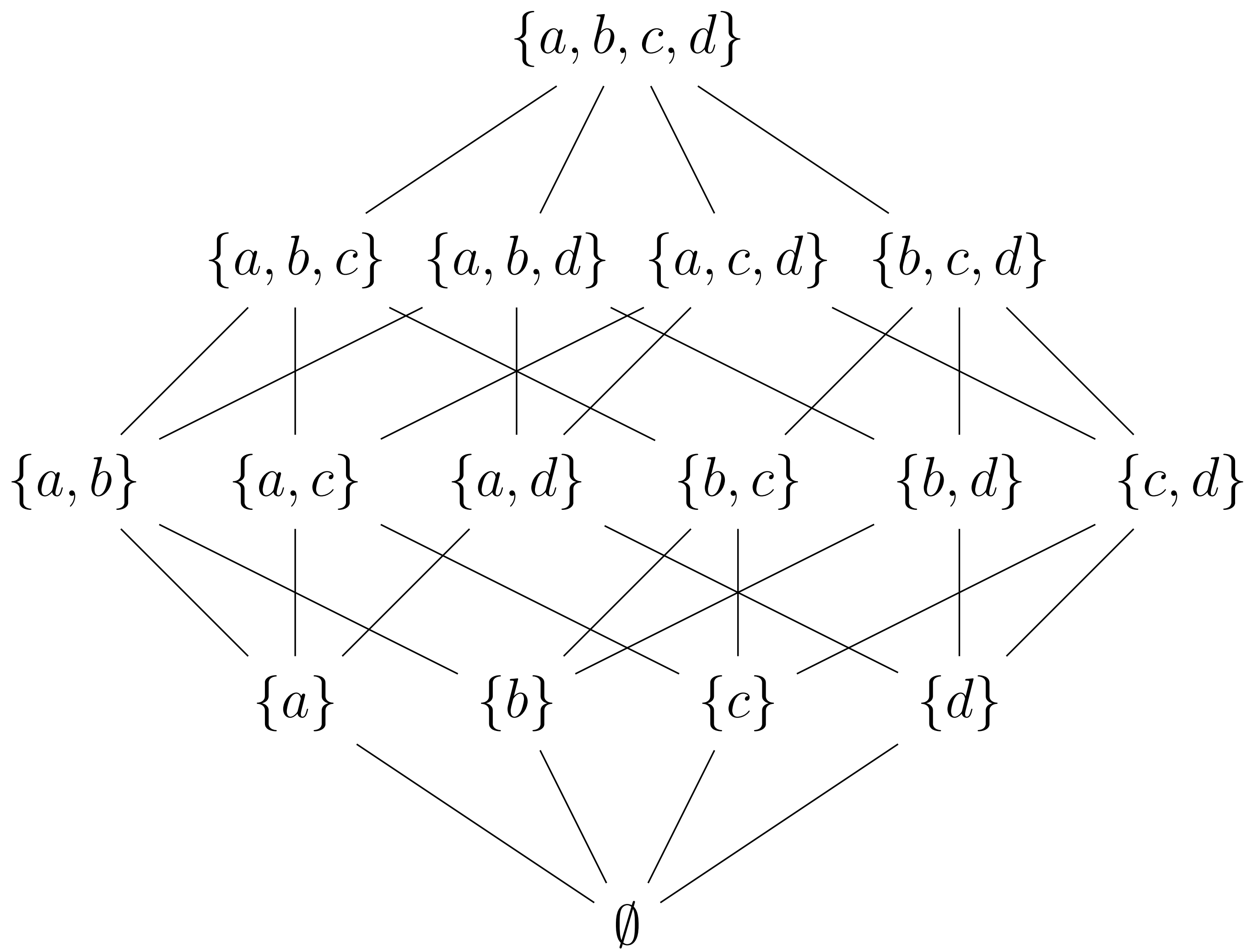
$\subseteq$ **ist antisymmetrisch,** denn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$ sagt, daß x und y dieselben Elemente haben. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind also die Mengen x und y gleich: $x = y$.

$\subseteq$ **ist transitiv,** denn $x \subseteq y \subseteq z$ impliziert das jedes Element von x zunächst zu y darum aber auch zu z gehört. Also folgt $x \subseteq z$.

Die Ordnung durch Inklusion ist keine totale Ordnung, wenn M mindestens zwei Elemente enthält: Verschiedene einelementige Teilmengen von M sind nicht miteinander vergleichbar.

Die Inklusionsordnung auf $\mathrm{P}(\{a, b, c, d\})$

Es seien a, b, c und d paarweise verschieden.



Kleinste, größte, minimale und maximale Elemente

Definition. Sei $\preceq$ eine Ordnung auf der Menge M. Ein Element $m \in M$ heißt

- kleinstes oder erstes Element von M bezüglich $\preceq$, wenn es „kleiner" als alle anderen ist:
$$\forall x \in M : \quad m \preceq x$$
- größtes oder letztes Element von M bezüglich $\preceq$, wenn es „größer" als alle anderen ist:
$$\forall x \in M : \quad x \preceq m$$
- minimal oder Minimum bezüglich $\preceq$, wenn es kein „kleineres" Element gibt:
$$\forall x \in M : \quad x \preceq m \Longrightarrow x = m$$
- maximal oder Maximum bezüglich $\preceq$, wenn es kein „größeres" Element gibt:
$$\forall x \in M : \quad m \preceq x \Longrightarrow x = m$$

Eindeutigkeit des kleinsten und größten Elements

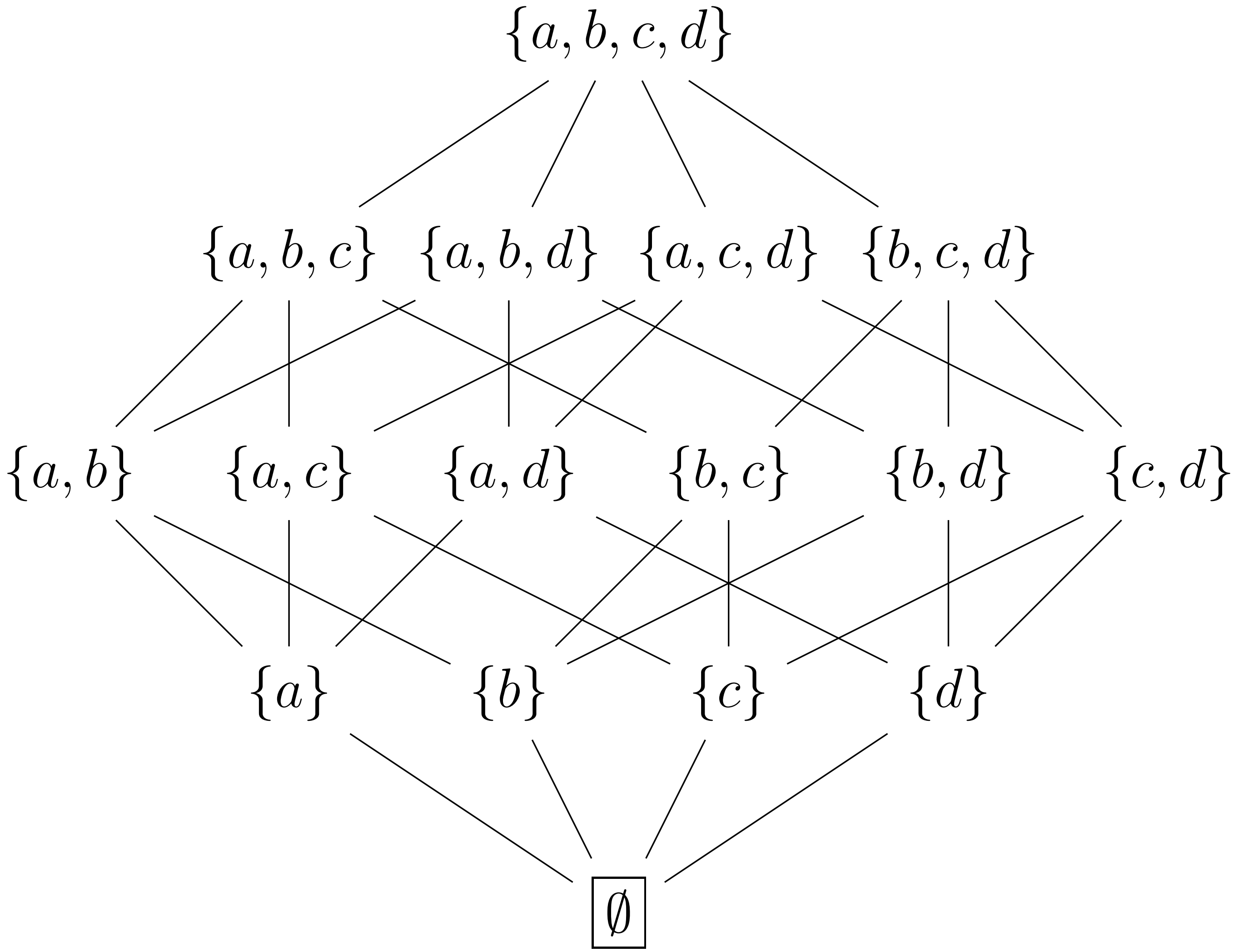
Beobachtung. *Eine Ordnung hat höchstens ein kleinstes Element und höchstens ein größtes Element.*

Beweis. Seien a und a' zwei kleinste Elemente bezüglich der Ordnung $\preceq$. Dann ist $a \preceq a'$, weil a ein kleinstes Element ist. Ebenso gilt $a' \preceq a$, weil a' ein kleinstes Element ist. Aus der Antisymmetrie von $\preceq$ folgt dann, daß $a = a'$ ist.

Das Argument für größte Elemente ist analog. **q.e.d.**

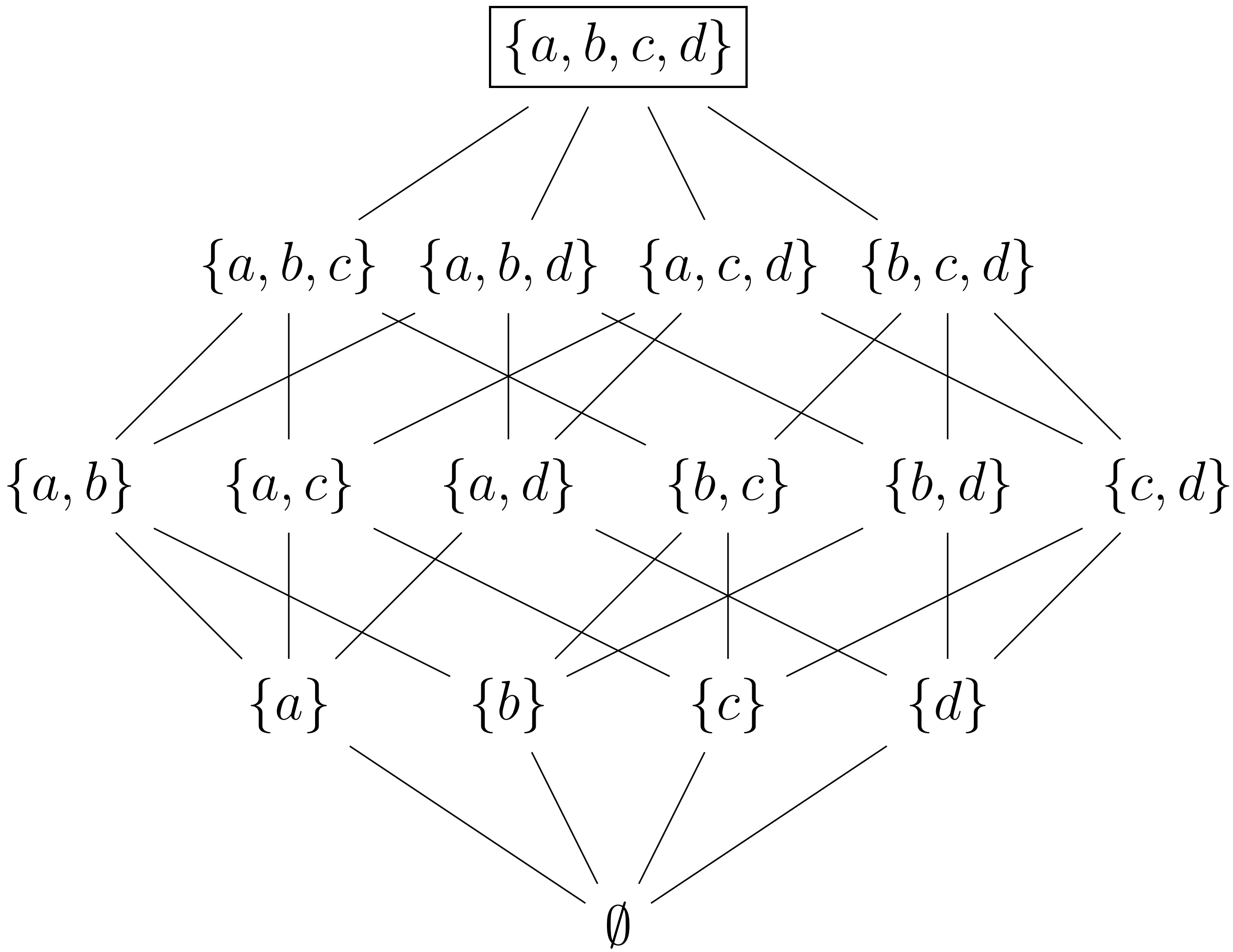
Bemerkung. Eine geordnete Menge hat nicht unbedingt ein kleinstes oder ein größtes Element: Es gibt weder eine kleinste noch eine größte relle Zahl.

Das kleinste Element



Jedes andere Element ist größer. Das kleinste Element ist auch minimal.

Das größte Element



Jedes andere Element ist kleiner. Das größte Element ist auch maximal.

Proposition. *In einer Ordnung ist jedes kleinste Element ist minimal. Jedes größte Element ist maximal.*

Proposition. *In einer Anordnung gelten auch die Umkehrungen: Jedes Minimum ist ein kleinstes Element und jedes Maximum ist ein größtes Element. Insbesondere hat eine Anordnung höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum.*

Beweise: ...

Satz und Definition 4.10. *Sei M eine Menge, $\preceq = (M, M, R)$ eine Ordnung auf M und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist*

$$\preceq |_A := (A, A, R \cap A \times A)$$

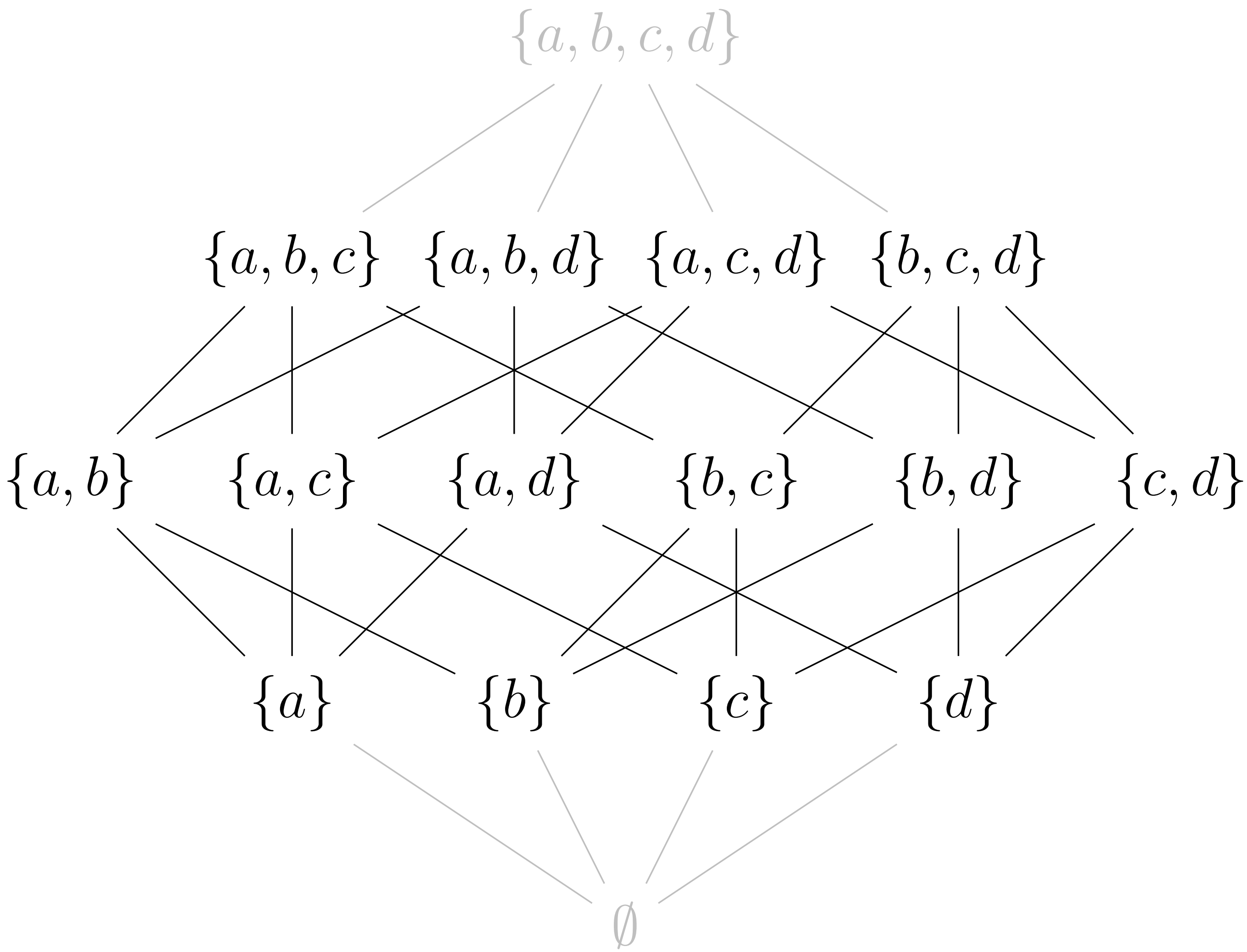
eine Ordnung auf A. Wir nennen $\preceq |_A$ die Einschränkung von $\preceq$ auf die Teilmenge A oder die auf A induzierte Ordnung.

Ist $\preceq$ total, so ist auch die Einschränkung $\preceq |_A$ total.

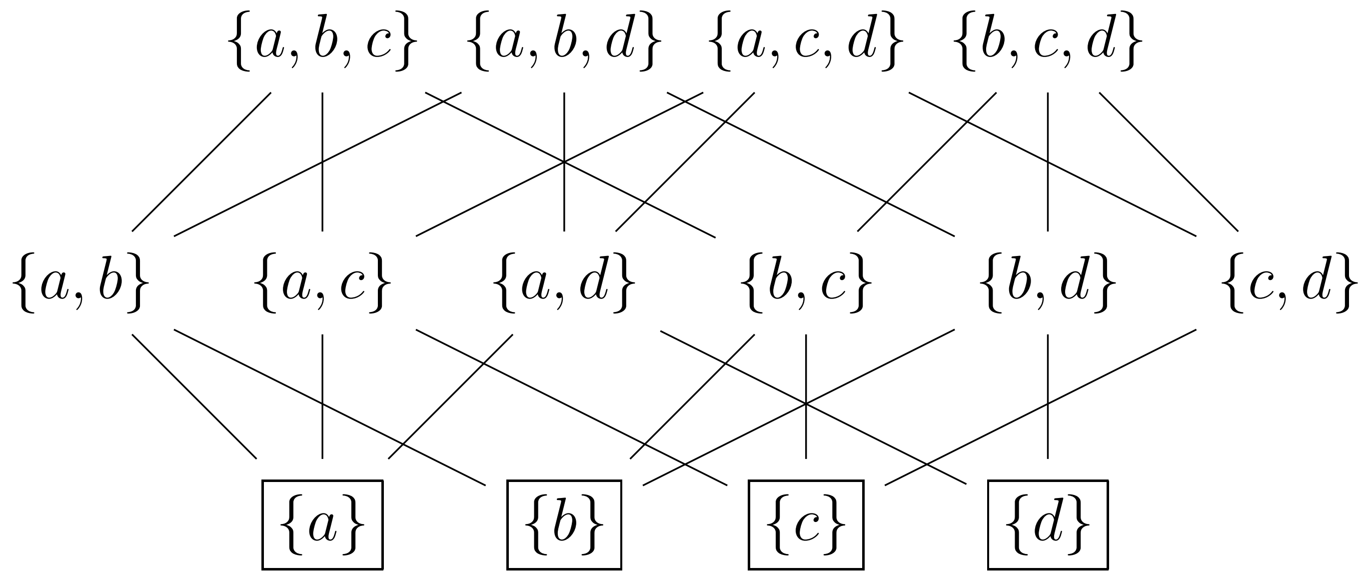
Beweis. Die Eigenschaften der Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität und gegebenenfalls Totalität *vererben* sich auf die Einschränkung. Das Argument ist in jedem Fall von der Form:

$$\forall x, \ldots \in M : \varphi(x, \ldots) \qquad \text{darum} \qquad \forall x, \ldots \in A : \varphi(x, \ldots) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Die induzierte Ordnung auf $\mathrm{P}_{+}^{*}(\{a,b,c,d\})$



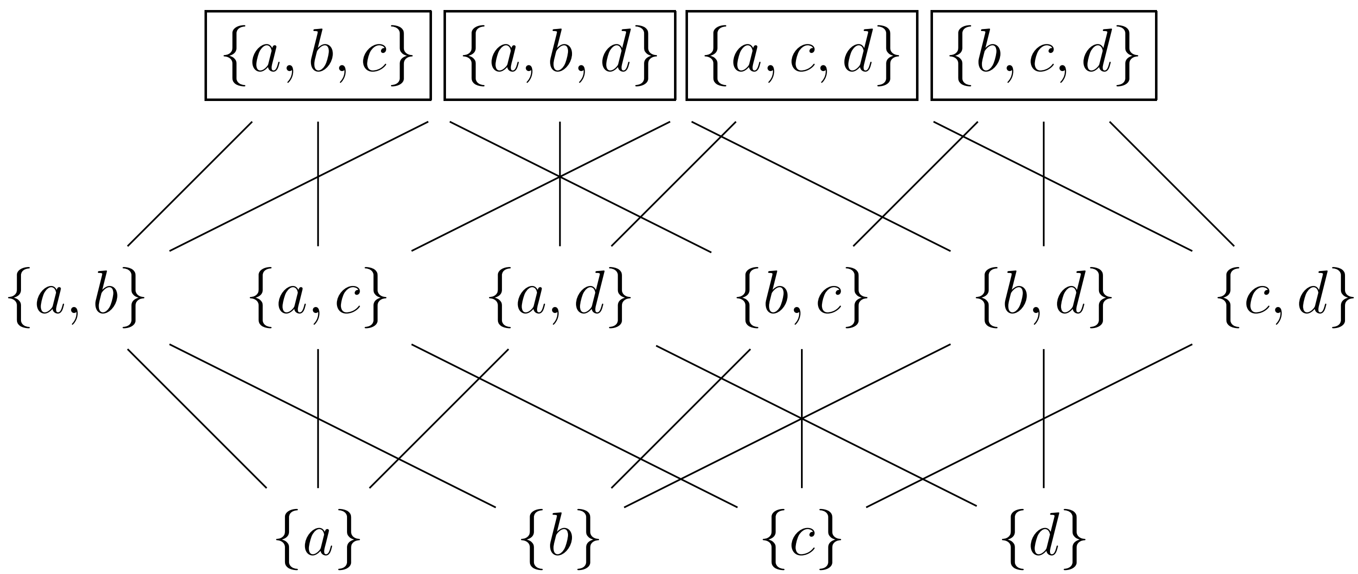
Inklusionsordnung auf $\mathrm{P}_+^*(\{a,b,c,d\})$: $\boxed{\text{minimale Elemente}}$



Es gibt keine kleineren Elemente.

Bermerkung: Es gibt hier kein kleinstes Element.

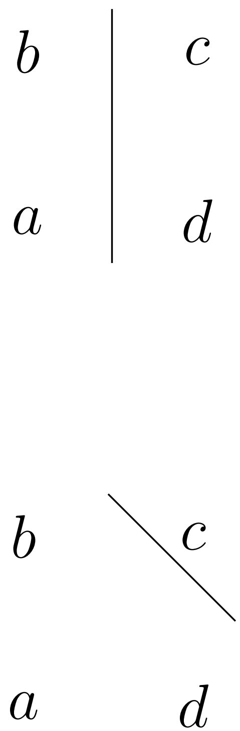
Inklusionsordnung auf $\mathrm{P}^*_+(\{a,b,c,d\})$: $\boxed{\text{maximale Elemente}}$

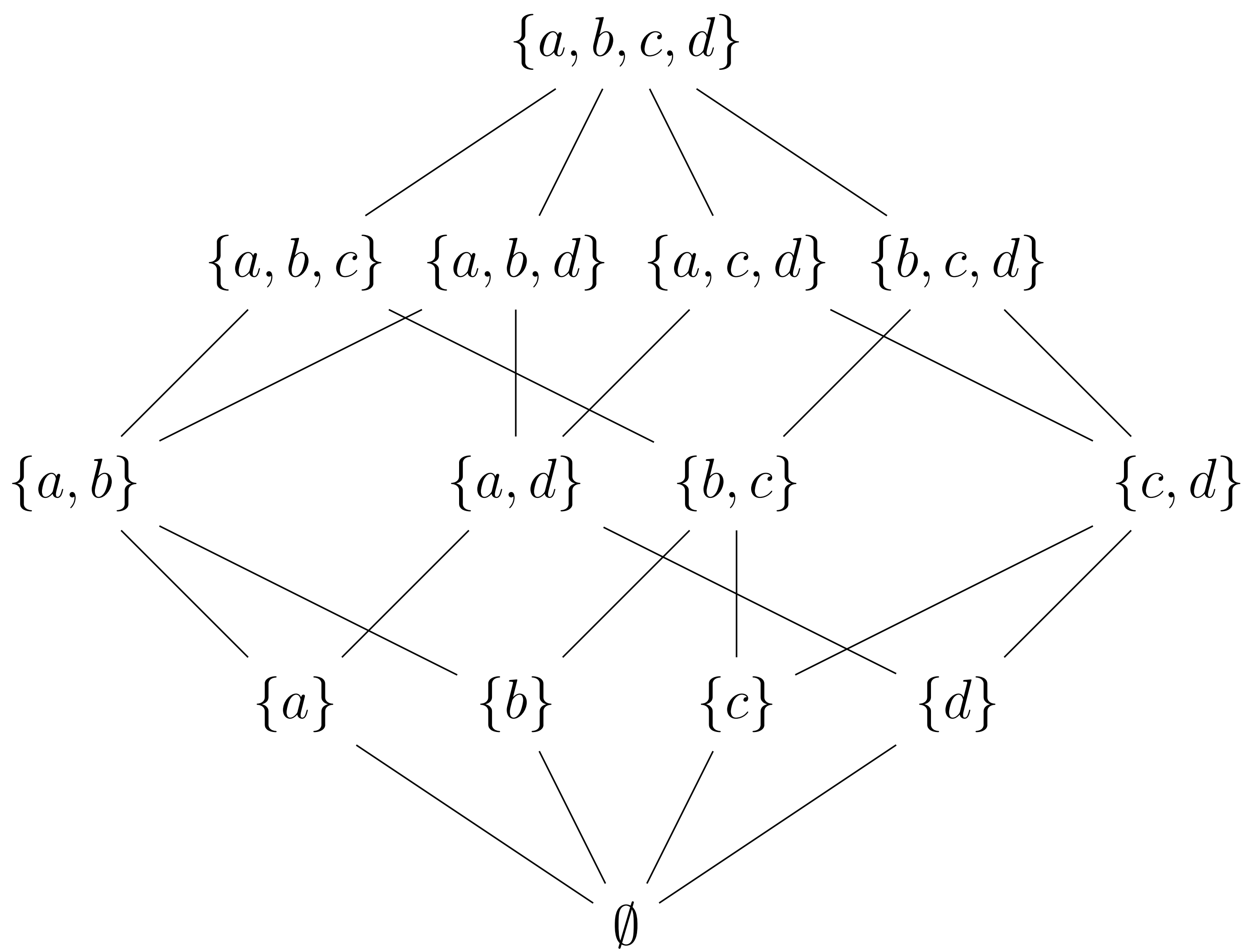


Es gibt keine größeren Elemente.

Bemerkung: Es gibt hier kein größtes Elèment.

Die Inklusionsordnung auf den „Bögen“ in $\{a, b, c, d\}$





Ketten, Antiketten, Wohlordnungen und Teilwohlordnungen

Definition. Sei M eine Menge mit der Ordnung $\preceq$. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt Teilanordnung oder Kette, wenn je zwei Elemente von A bezüglich $\preceq$ vergleichbar sind. Dies läßt sich auch ausdrücken durch die Forderung, daß die Einschränkung $\preceq|_A$ eine Anordnung sei.

Sind je zwei verschiedene Elemente von A bezüglich $\preceq$ unvergleichbar, so heißt A eine Antikette.

Definition. Sei $\preceq$ eine Ordnung auf M. Wir nennen $\preceq$ eine Wohlordnung bzw. sagen, M werde durch $\preceq$ wohlgeordnet, wenn jede nicht-leere Teilmenge von M ein kleinstes Element besitzt.

Eine Teilwohlordnung von M ist eine Teilmenge $A \subseteq M$, so daß sich $\preceq$ zu einer Wohlordnung auf A einschränkt.

Wohlordnungen sind Anordnungen

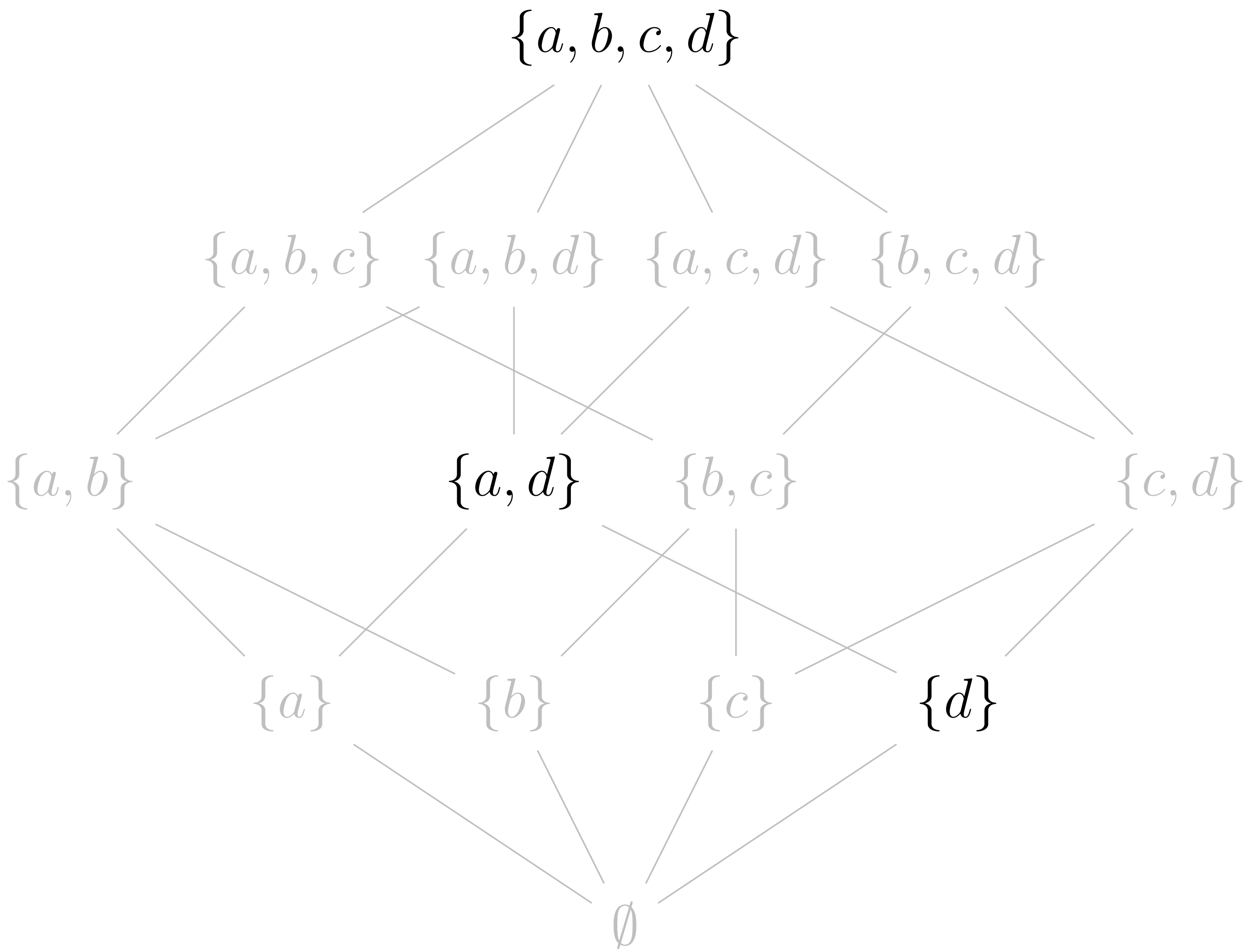
Beobachtung. *Jede Wohlordnung ist eine Anordnung.*

Beweis. Sei $\preceq$ eine Wohlordnung auf der Menge M. Um zu zeigen, daß $\preceq$ eine Anordnung ist, betrachten wir zwei Elemente $x, y \in M$. Zu zeigen ist die Vergleichbarkeit, also:

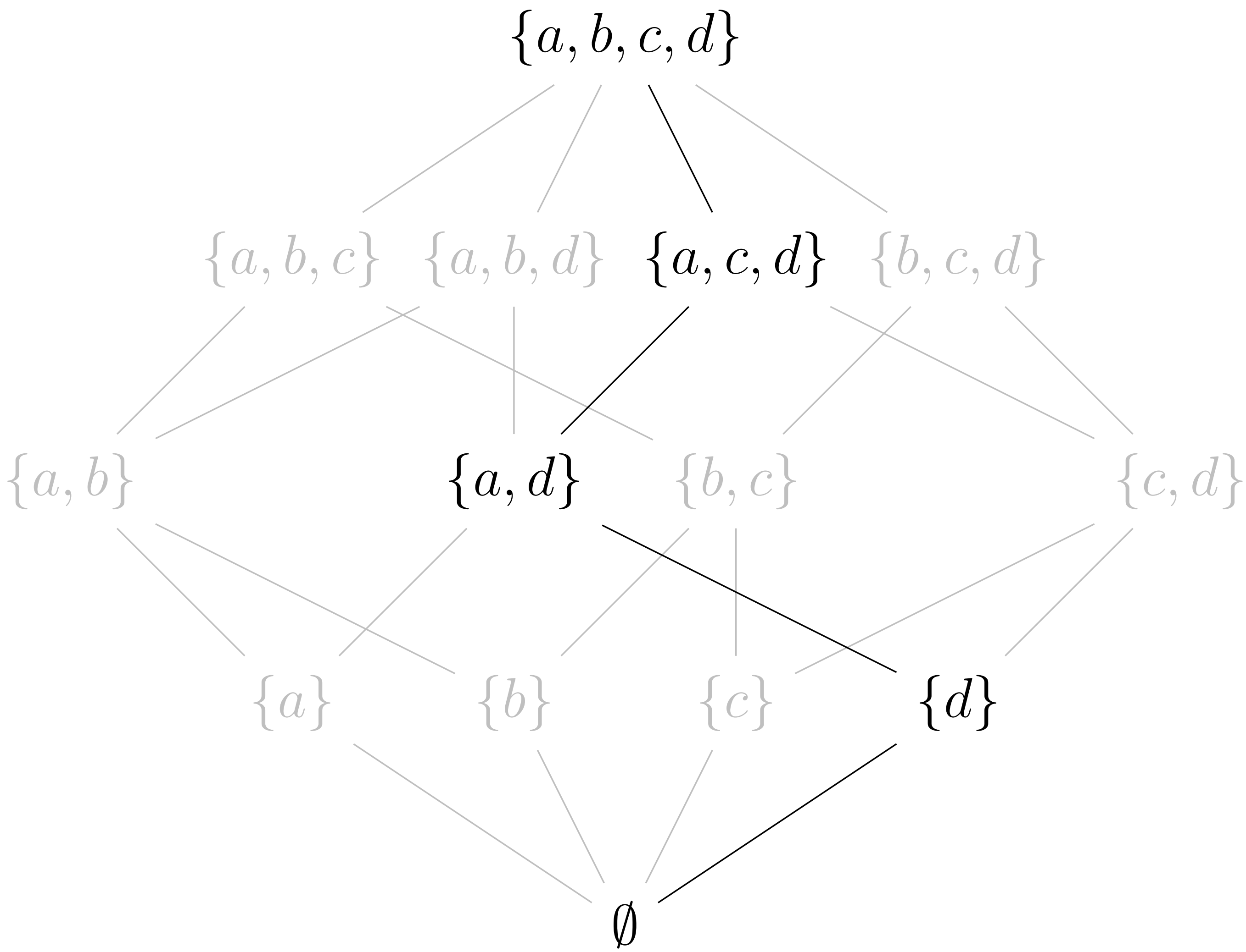
$$x \preceq y \qquad \text{oder} \qquad y \preceq x$$

Die aber folgt daraus, daß die Teilmenge $\{x, y\} \subseteq M$ ein kleinstes Element hat. Ist x das kleinste Element, so ist $x \preceq y$; und ist y das kleinste Element, so ist $y \preceq x$. **q.e.d.**

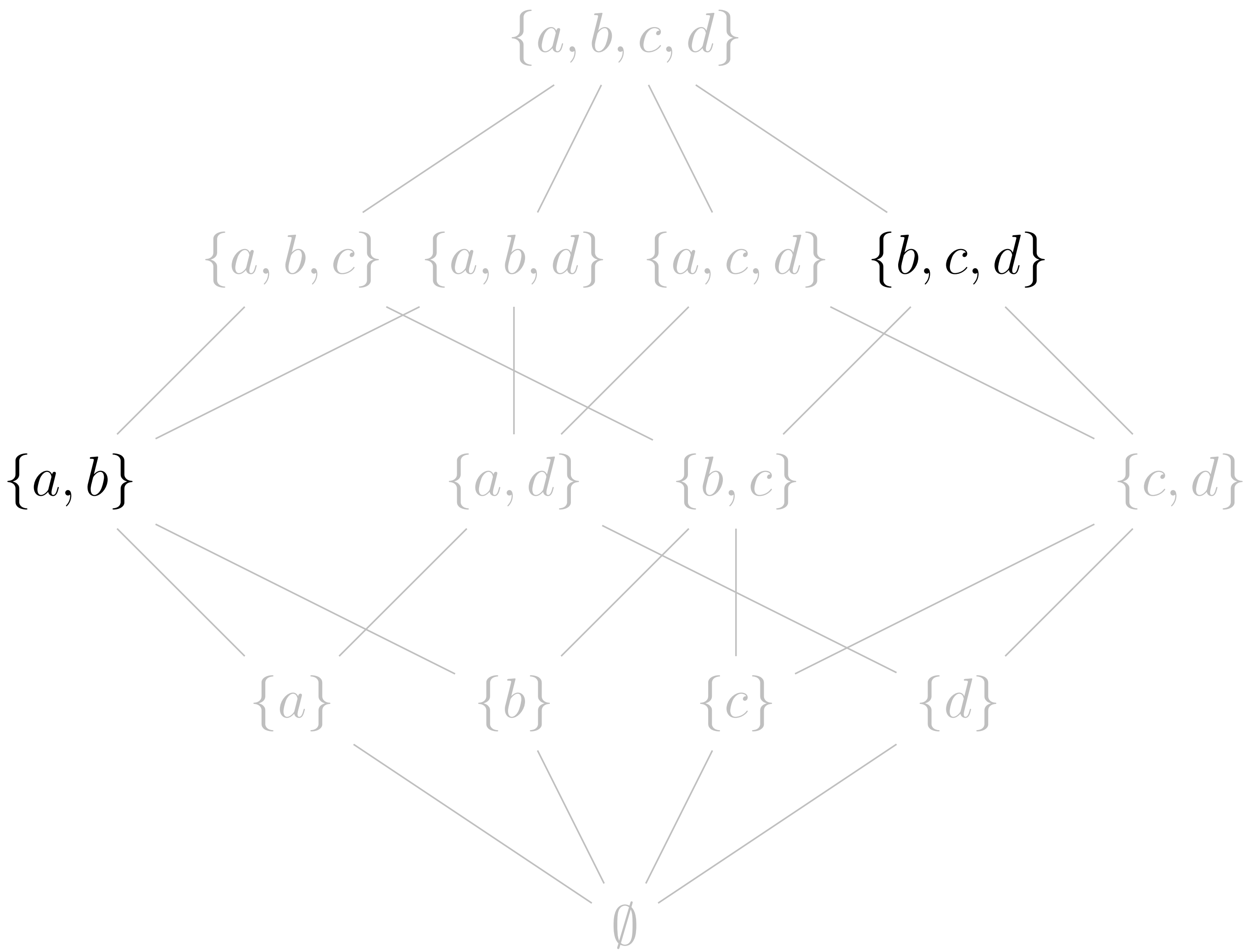
Eine Kette



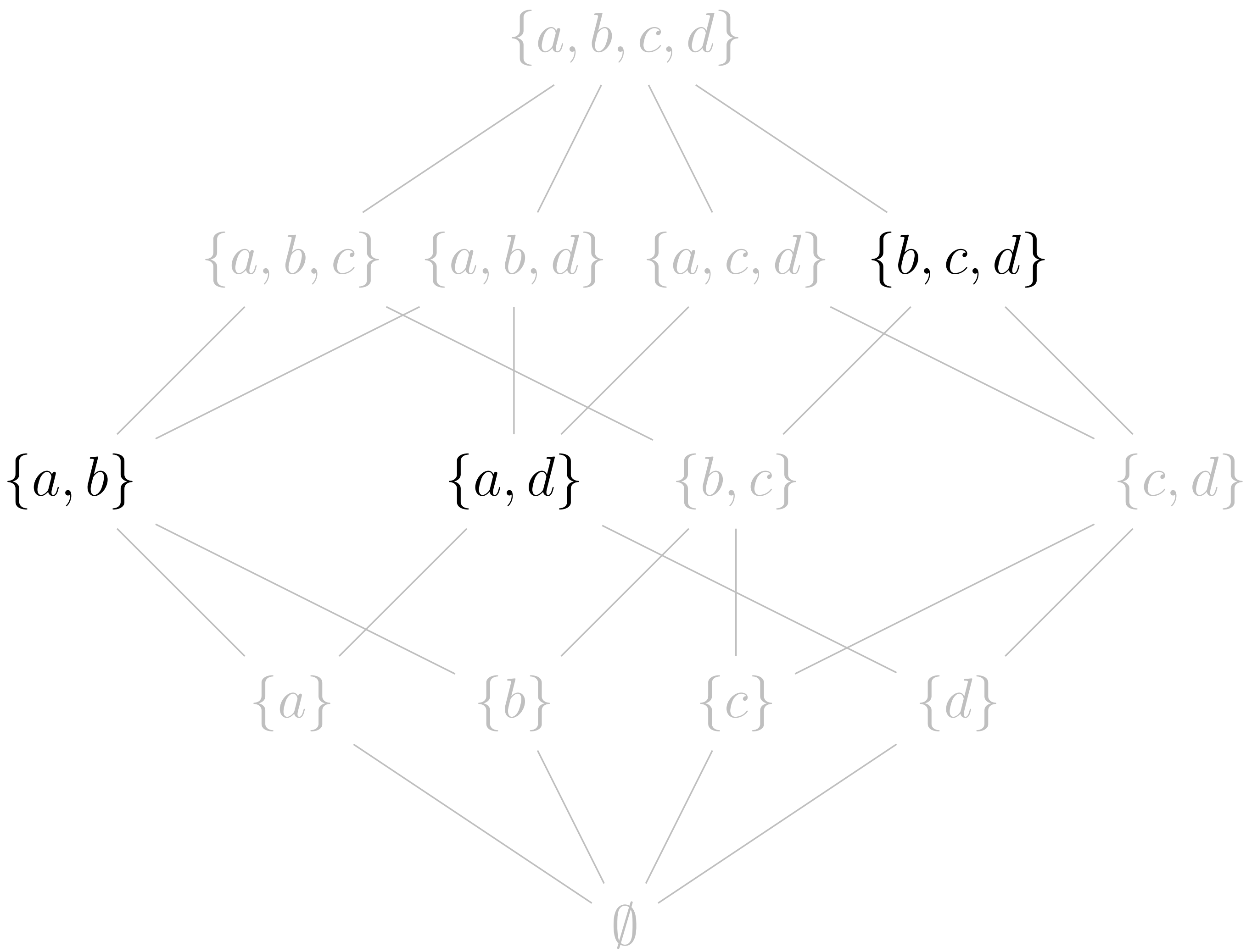
Eine maximale Kette



Eine Antikette



Eine maximale Antikette



Beschränktheit

Definition. Sei M eine Menge mit der Ordnung $\preceq$ und $A \subseteq M$. Wir nennen ein Element $\beta \in M$ eine untere Schranke für A, wenn gilt:

$$\forall x \in A : \beta \preceq x$$

Läßt A eine untere Schranke zu, so heißt A von unten beschränkt; andernfalls heißt A nach unten unbeschränkt. Wenn die Menge aller unteren Schranken von A ein größtes Element hat, so heißt es größte untere Schranke oder Infimum von A. Es ist also eine untere Schranke α von A für die gilt:

$$\forall \beta \in M : \quad \beta \text{ ist untere Schranke von } A \Longrightarrow \beta \preceq \alpha$$

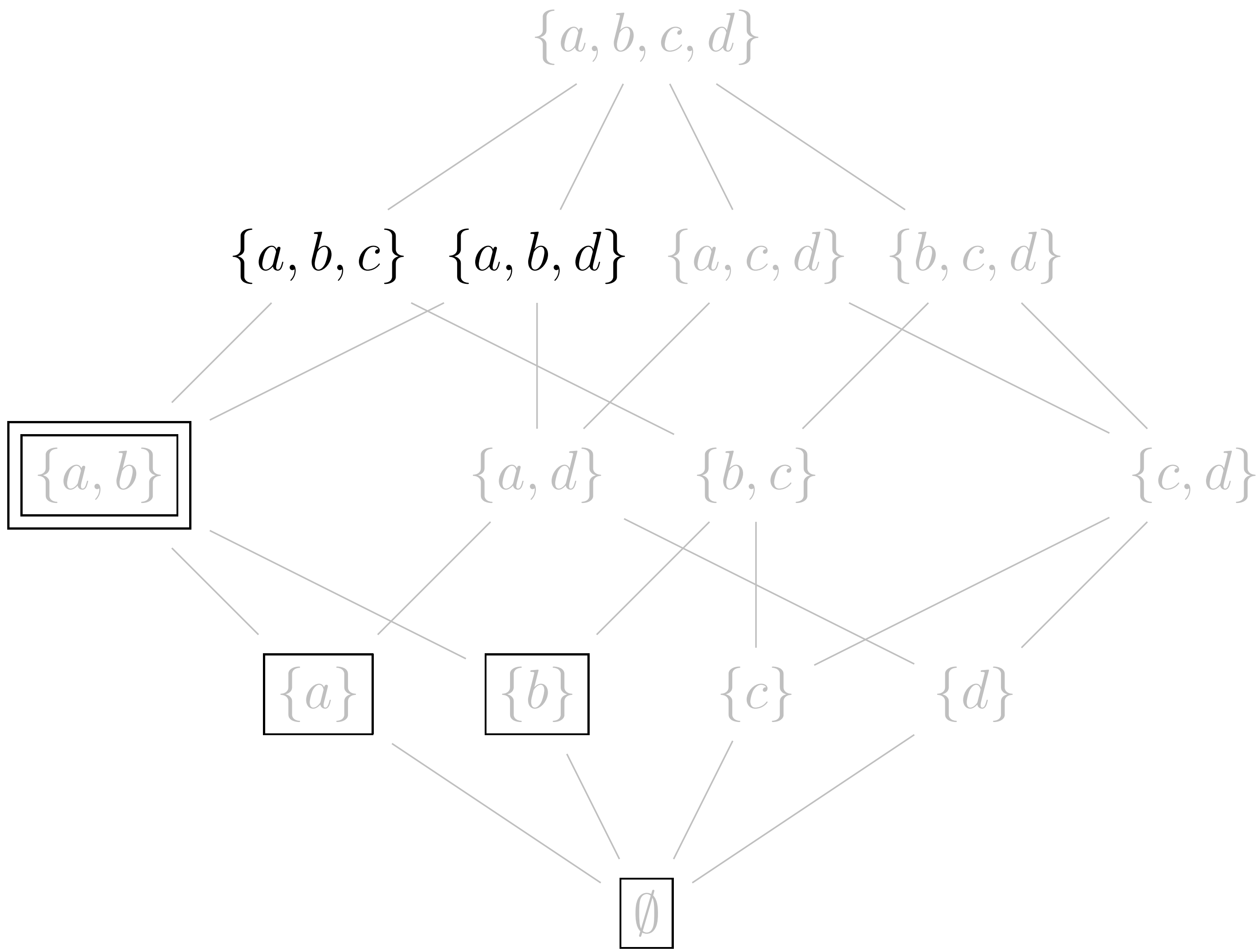
Das Element β ist eine obere Schranke für A, wenn gilt:

$$\forall x \in A : x \preceq \beta$$

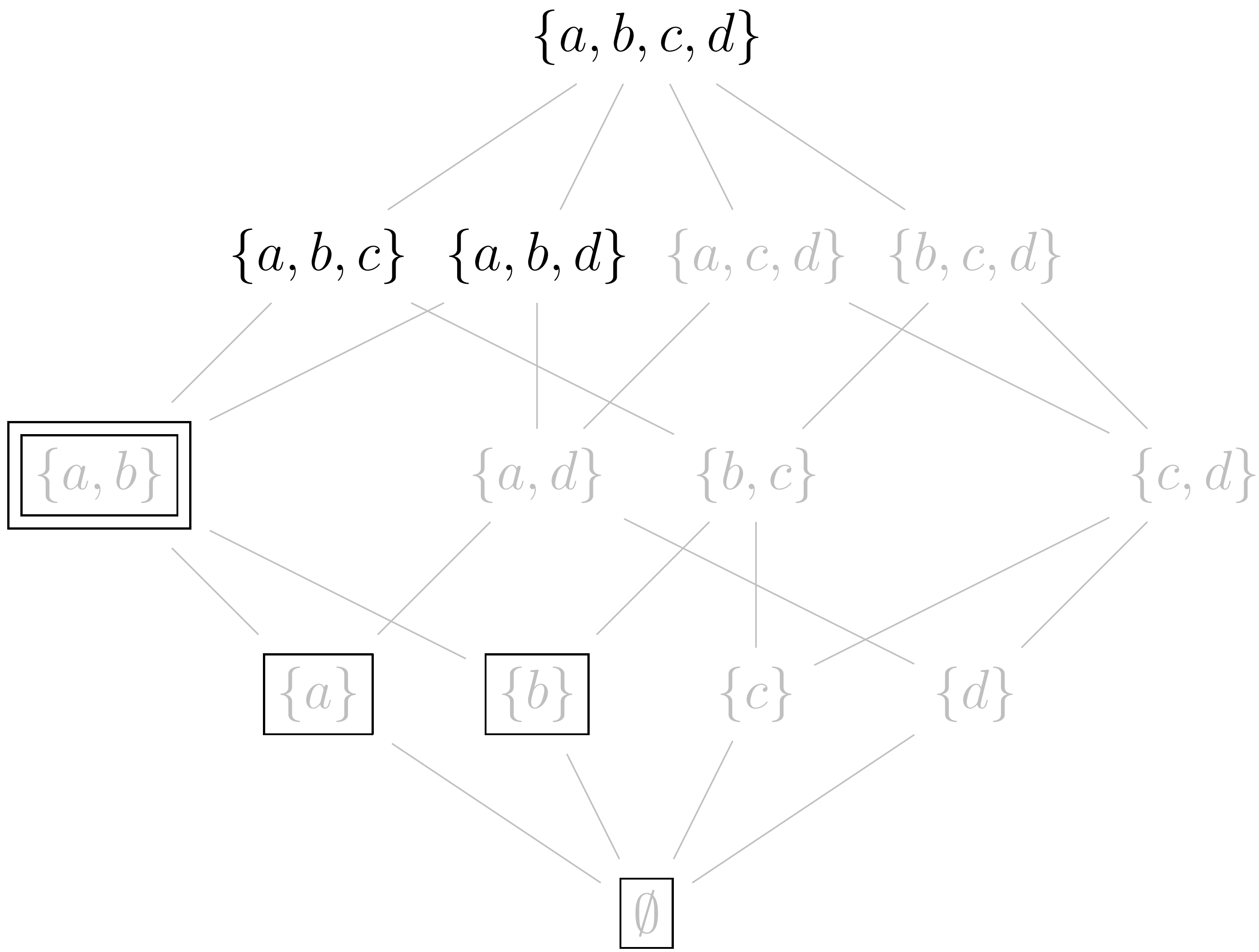
Läßt A eine obere Schranke zu, so heißt A von oben beschränkt; andernfalls heißt A nach oben unbeschränkt. Eine kleinste obere Schranke oder Supremum ist eine obere Schranke ω von A, für die gilt:

$$\forall \beta \in M : \quad \beta \text{ ist obere Schranke von } A \Longrightarrow \omega \preceq \beta$$

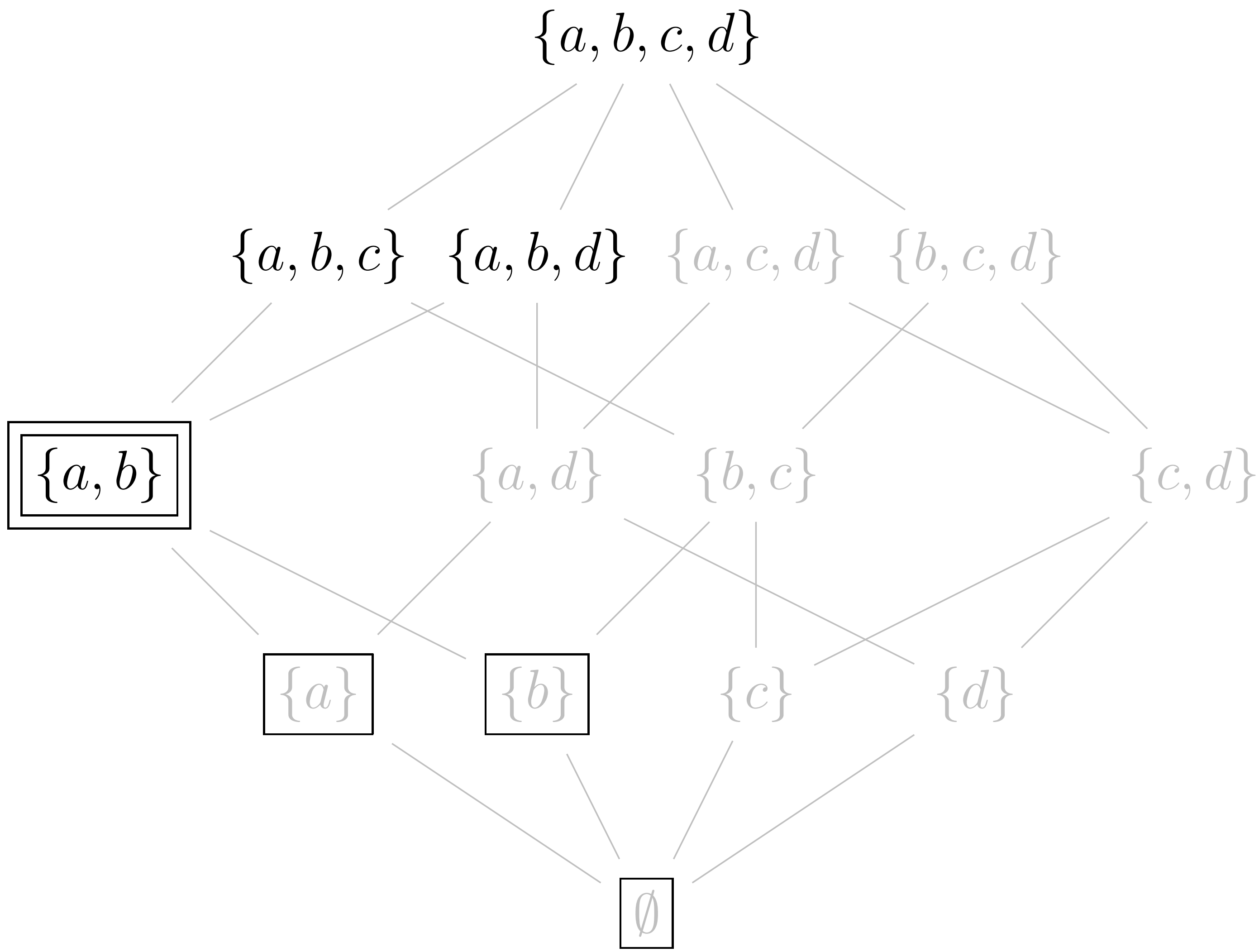
Untere Schranken



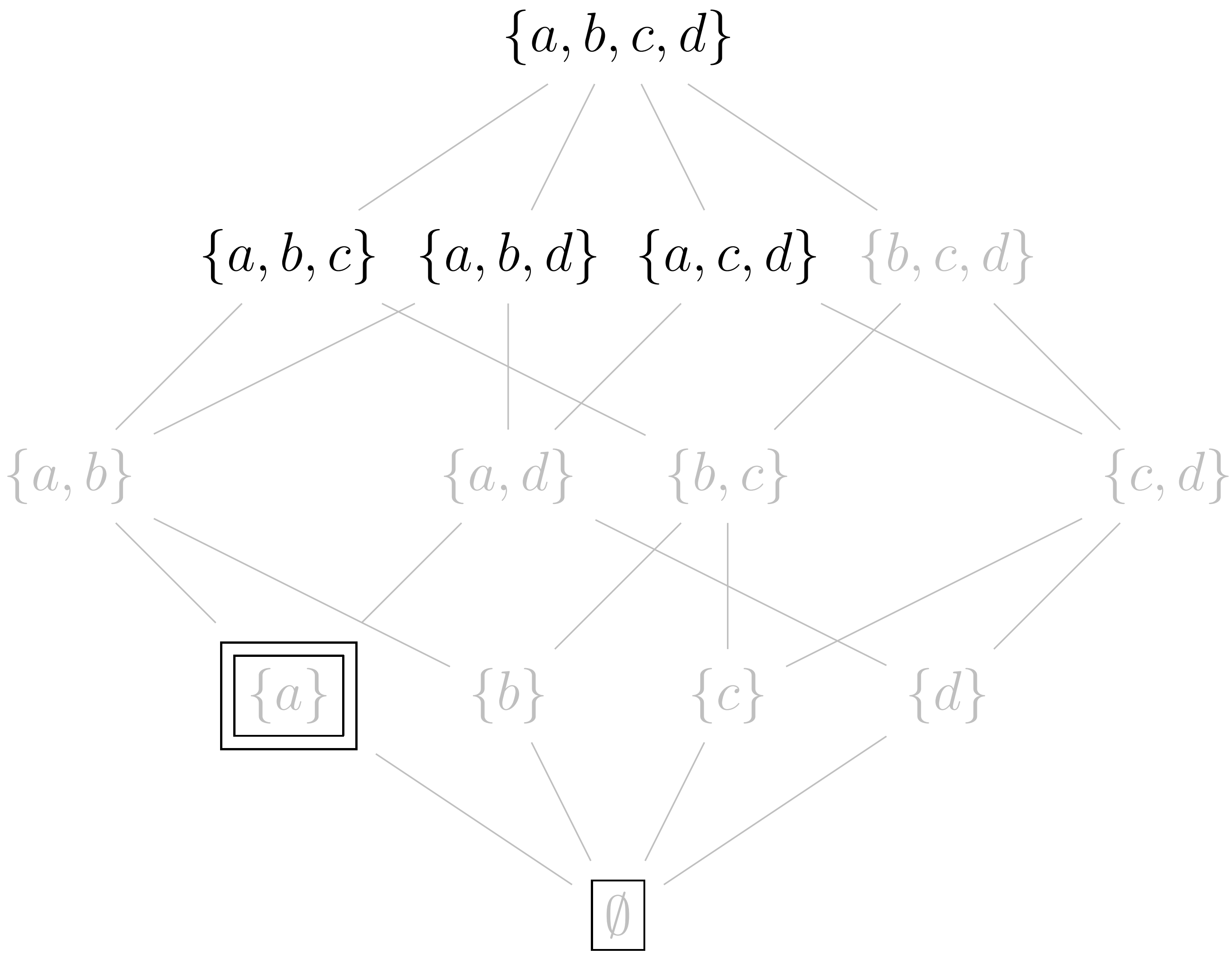
Untere Schranken



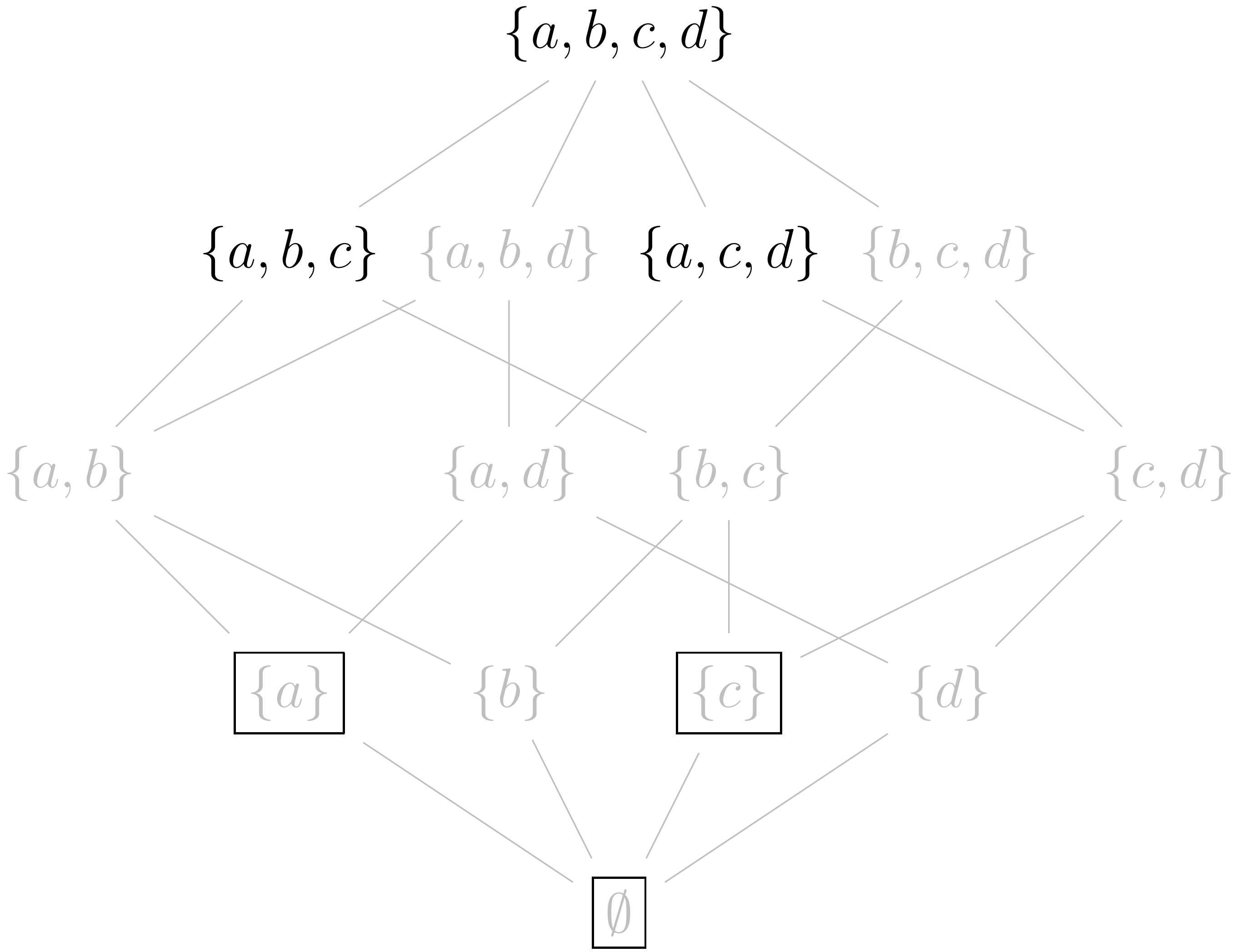
Untere Schranken



Untere Schranken

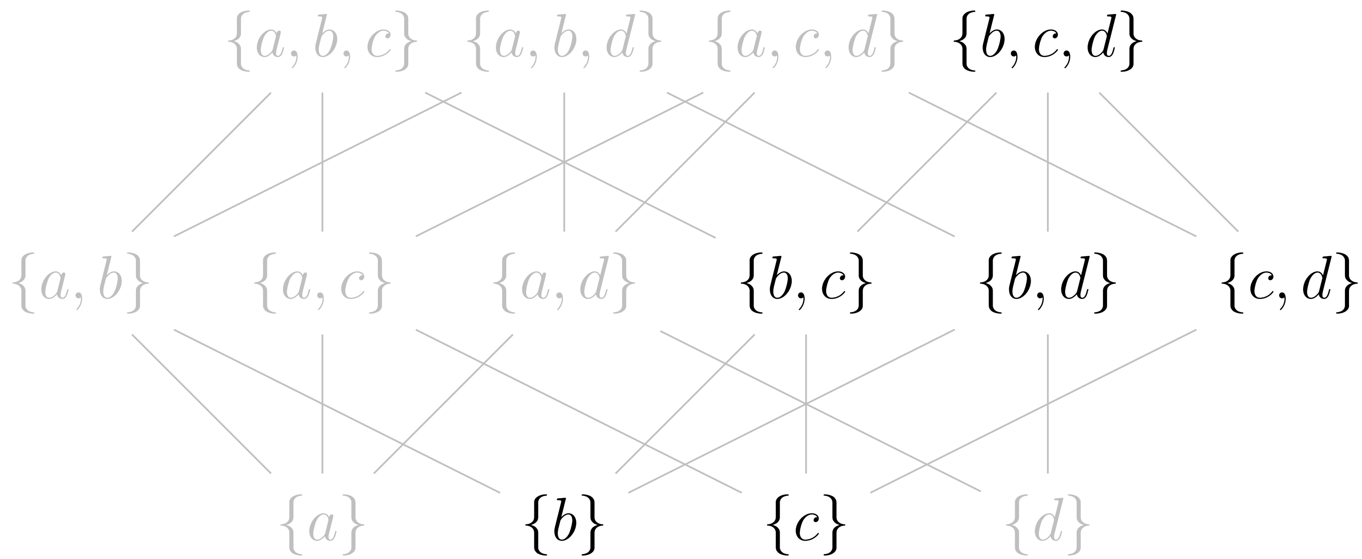


Untere Schranken



Hier gibt es keine größte untere Schranke.

Endlich, aber nach unten unbeschränkt



In der umgebenden Menge „fehlen“ die unteren Schranken.

Das Unendlichkeitsaxiom

Definition. Für jede Menge x, heißt $x^+ := x \cup \{x\}$ der Nachfolger von x.

Bemerkung. Nichts in unserer Mengenlehre verbietet $x \in x$. Man kann sogar weitere Axiome hinzufügen, die dafür sorgen, daß die „Gleichung“

$$x = \{x\}$$

eine eindeutige Lösung hat. Für so ein x wäre dann:

$$x = x \cup \{x\} = x^+$$

Definition. Eine Menge M heißt induktiv wenn gilt:

1. M enthält die leere Menge als Element: $\emptyset \in M$.
2. M ist unter Nachfolgerbildung abgeschlossen: $\forall x \in M : x^+ \in M$.

Axiom. *Es gibt eine induktive Menge U.*

Der Anfang der Zahlenreihe

Wir setzen

$$\begin{aligned}
0_N &:= \emptyset \\
1_N &:= 0_N^+ = 0_N \cup \{0_N\} = \{0_N\} \\
2_N &:= 1_N^+ = 1_N \cup \{1_N\} = \{0_N, 1_N\} \\
3_N &:= 2_N^+ = 2_N \cup \{2_N\} = \{0_N, 1_N, 2_N\} \\
4_N &:= 3_N^+ = 3_N \cup \{3_N\} = \{0_N, 1_N, 2_N, 3_N\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Gut ist, daß die Zahl μ genau μ Elemente hat. Die Menge aller natürlichen Zahlen soll offensichtlich sein:

$$\mathbb{N}^* := \{0_N, 1_N, 2_N, 3_N, 4_N, \ldots\}$$

Aber was sollen die Pünktchen „. . . “ bedeuten?

Satz und Definition 5.7. *Der Ausdruck*

$$\mathbb{N}^* := \{\mu \,|\, \forall M : M \text{ ist induktiv} \Longrightarrow \mu \in M\}$$

beschreibt eine Menge, die wir als Menge der von Neumann-Zahlen bezeichnen. Dies ist die „kleinste“ induktive Menge. Genauer:

1. $\mathbb{N}^*$ *ist induktiv.*
2. $\mathbb{N}^*$ *ist die* kleinste *induktive Menge: Ist* M *eine beliebige induktive Menge, so ist* $\mathbb{N}^* \subset M$. *Ist insbesondere,* $M \subseteq \mathbb{N}^*$ *induktiv, so ist* $M = \mathbb{N}^*$.

Satz 5.8. *Für jede von Neumann-Zahl* $\mu \in \mathbb{N}^*$ *ist*

$$\mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+.$$

Insbesondere ist keine von Neumann-Zahl ihrem Nachfolger gleich. Außerdem sind zwei von Neumann-Zahlen gleich, wenn sie gleiche Nachfolger haben.

Beweise: ...

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion I

Erinnerung ??. $\forall \mu \in \mathbb{N}^* : \quad \mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+.$

Lemma. *Keine von Neumann-Zahl ν ist Teilmenge eines ihrer Elemente. Insbesondere ist $\nu \notin \nu$.*

Beweis. $A := \{\nu \in \mathbb{N}^* \mid \forall \mu \in \nu : \nu \not\subseteq \mu\}$

Wir zeigen, daß A induktiv ist. Augenscheinlich ist $\emptyset \in A$.

Sei also $\nu \in A$ und $\mu \in \nu^+ = \nu \cup \{\nu\}$. Dann ist $\mu \in \nu$ oder $\mu = \nu$.

$$\begin{aligned}
\mu \in \nu \quad &\underset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} \quad \mu \subseteq \nu \underset{\nu \subset \nu^+}{\Longrightarrow} \mu \subseteq \nu \subset \nu^+ \Longrightarrow \nu^+ \not\subseteq \mu \Longrightarrow \nu^+ \in A \\
\mu = \nu \quad &\Longrightarrow \quad \mu \subseteq \nu \underset{\nu \subset \nu^+}{\Longrightarrow} \mu \subseteq \nu \subset \nu^+ \Longrightarrow \nu^+ \not\subseteq \mu \Longrightarrow \nu^+ \in A
\end{aligned}$$

Also ist A induktiv und damit $A = \mathbb{N}^*$.

Wäre nun $\nu \in \nu$, dann wäre $\nu = \nu \in \nu$ und damit $\nu \subseteq \nu \in \nu$, also wäre ν Teilmenge eines Elements (nämlich ν). **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion II

Erinnerung. $\forall \mu \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+ \tag{1}$$

$$\forall \nu \in \mu : \mu \not\subseteq \nu \tag{2}$$

$$\mu \notin \mu \tag{3}$$

Lemma. *Für jede von von Neumann-Zahl $\mu \in \mathbb{N}^*$ ist $\emptyset = \mu$ oder $\emptyset \in \mu$.*

Beweis. $A := \{\mu \in \mathbb{N}^* \mid \mu = \emptyset \text{ oder } \emptyset \in \mu\}$

Offensichtlich ist $\emptyset \in A$.

Sei nun $\mu \in A$. Dann ist $\mu = \emptyset$ oder $\emptyset \in \mu$.

$$\mu = \emptyset \implies \mu^+ = \emptyset^+ \underset{\emptyset^+ = \{\emptyset\}}{\implies} \emptyset \in \mu^+ \implies \mu^+ \in A$$

$$\emptyset \in \mu \underset{\mu \subset \mu^+}{\implies} \emptyset \in \mu^+ \implies \mu^+ \in A$$

Also ist A induktiv und damit $A = \mathbb{N}^*$. **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion III

Erinnerung. $\forall \mu \in \mathbb{N}^*:$

$$\mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+ \tag{1}$$

$$\forall \nu \in \mu : \mu \not\subseteq \nu \tag{2}$$

$$\mu \notin \mu \tag{3}$$

$$\emptyset = \mu \textit{ oder } \emptyset \in \mu \tag{4}$$

Lemma. *Für je zwei von Neumann-Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ gilt:*

$$\mu \in \nu \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\mu^+ \in \nu \textit{ oder } \mu^+ = \nu\big)$$

Beweis. $A := \{\nu \in \mathbb{N}^* \,|\, \forall \mu \in \nu : \mu^+ \in \nu \text{ oder } \mu^+ = \nu\} \subseteq \mathbb{N}^*$

$\emptyset \in A$, denn $\forall \mu \in \emptyset : \ldots$ ist wahr.

Sei $\nu \in A$. Wir zeigen: $\forall \mu \in \nu^+ = \nu \cup \{\nu\} : \mu^+ \in \nu^+$ oder $\mu^+ = \nu^+$

$$\mu \in \nu \underset{\nu \in A}{\Longrightarrow} \mu^+ \in \nu \subseteq \nu^+ \text{ oder } \mu^+ = \nu \in \nu^+ \Longrightarrow \mu^+ \in \nu^+$$

$$\mu = \nu \Longrightarrow \mu^+ = \nu^+$$

Also $\nu^+ \in A$. Somit ist A induktiv. Also $A = \mathbb{N}^*$. **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion IV

Erinnerung.

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^* : \quad \mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+ \tag{1}$$

$$\forall \nu \in \mu : \mu \not\subseteq \nu \tag{2}$$

$$\mu \notin \mu \tag{3}$$

$$\emptyset = \mu \textit{ oder } \emptyset \in \mu \tag{4}$$

$$\forall \nu \in \mu : \nu^+ \in \mu \textit{ oder } \nu^+ = \mu \tag{5}$$

Lemma. *Für je zwei von Neumann-Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ gilt:*

$$\mu \in \nu \qquad \Longrightarrow \qquad \mu \subset \nu$$

Beweis. Die Menge ν ist transitiv (1). Also ist $\mu \subseteq \nu$.

Wegen (2) ist $\nu \not\subseteq \mu$. Also ist $\mu \subset \nu$. **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion V

Erinnerung. $\forall \mu \in \mathbb{N}^*:$

$$\mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+ \tag{1}$$

$$\forall \nu \in \mu : \nu \subset \mu \tag{2}$$

$$\emptyset = \mu \textit{ oder } \emptyset \in \mu \tag{3}$$

$$\forall \nu \in \mu : \nu^+ \in \mu \textit{ oder } \nu^+ = \mu \tag{4}$$

Satz 5.15. $\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}^*: \quad \mu \in \nu \quad \textit{oder} \quad \nu \in \mu \quad \textit{oder} \quad \nu = \mu$

Beweis. $A_\mu := \{\nu \in \mathbb{N}^* \mid \mu \in \nu \text{ oder } \nu \in \mu \text{ oder } \nu = \mu\}$

$\emptyset \in A_\mu$ wegen (3). Sei nun $\nu \in A_\mu$.

$$\mu \in \nu \underset{\nu \subset \nu^+}{\Longrightarrow} \mu \in \nu^+ \Longrightarrow \nu^+ \in A_\mu$$

$$\nu \in \mu \underset{(4)}{\Longrightarrow} \nu^+ \in \mu \text{ oder } \nu^+ = \mu \Longrightarrow \nu^+ \in A_\mu$$

$$\nu = \mu \underset{\nu^+ = \nu \cup \{\nu\}}{\Longrightarrow} \mu \in \nu^+ \Longrightarrow \nu^+ \in A_\mu$$

Also ist $A_\mu = \mathbb{N}^*$, und zwar *für jedes* $\mu \in \mathbb{N}^*$. **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion VI

Erinnerung. $\forall \mu \in \mathbb{N}^*:$

$$\mathrm{V}(\mu) \subseteq \mu = \mathrm{V}(\mu^+) \subset \mu^+ \tag{1}$$
$$\forall \nu \in \mu : \nu \subset \mu \tag{2}$$
$$\emptyset = \mu \textit{ oder } \emptyset \in \mu \tag{3}$$
$$\forall \nu \in \mu : \nu^+ \in \mu \textit{ oder } \nu^+ = \mu \tag{4}$$
$$\forall \nu \in \mathbb{N}^* : \mu \in \nu \textit{ oder } \nu \in \mu \textit{ oder } \nu = \mu \tag{5}$$

Korollar. *Für je zwei von Neumann-Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ gilt:*

$$\mu \in \nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu \subset \nu$$

Beweis. Die Richtung $\mu \in \nu \Longrightarrow \mu \subset \nu$ folgt aus (2).

Sei nun $\mu \subset \nu$. Nach (5) gibt es drei Möglichkeiten. Davon ist $\mu = \nu$ offensichtlich unverträglich mit $\mu \subset \nu$.

Aber auch $\nu \in \mu$ scheidet aus. Denn dann wäre mit (2) auch $\nu \subset \mu$.

Also bleibt nur $\mu \in \nu$. **q.e.d.**

$\mathbb{N}^*$ ist wohlgeordnet durch Inklusion VII

Erinnerung.

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}^* : \quad \mu \in \nu \Longleftrightarrow \mu \subset \nu \tag{1}$$

$$\mu \in \nu \textit{ oder } \nu \in \mu \textit{ oder } \nu = \mu \tag{2}$$

$$\textit{(1) und (2)} \Longrightarrow \quad \mu \subseteq \nu \textit{ oder } \nu \subset \mu \tag{3}$$

Satz 5.17 (Wohlordnungsprinzip). *$\mathbb{N}^*$ ist durch $\subseteq$ wohlgeordnet: Jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}^*$ hat ein* $\subseteq$-kleinstes *Element.*

Beweis. Sei $B \subseteq \mathbb{N}^*$ Teilmenge *ohne* kleinstes Element. Wir zeigen $B = \emptyset$.

$A := \{\mu \in \mathbb{N}^* \mid \mu$ ist untere Schranke von $B\}$ ist also disjunkt zu B.

$\forall \mu \in B : \emptyset \subseteq \mu$. Also $\emptyset \in A$. Sei $\mu \in A$, d.h., μ ist untere Schranke von B.

$$\mu^+ \notin A \Longrightarrow \exists \nu \in B : \qquad \mu^+ \not\subseteq \nu \underset{(3)}{\Longrightarrow} \nu \subset \mu^+ \underset{\mu \in A, \nu \in B}{\Longrightarrow} \mu \subseteq \nu \subset \mu^+$$

$$\underset{\mu^+ = \mu \cup \{\mu\}}{\Longrightarrow} \mu = \nu \underset{\nu \in B}{\Longrightarrow} \mu \in B \quad \text{Widerspruch}$$

Also ist $\mu^+ \in A$ und darum A induktiv, also $A = \mathbb{N}^*$.

Somit ist $B = B \cap \mathbb{N}^* = B \cap A = \emptyset$. **q.e.d.**

Endlichkeit von Mengen

Fakt und Definition 5.22. *Für eine Menge M sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine von-Neumann-Zahl $\mu \in \mathbb{N}^*$ die gleichmächtig zu M ist.*
2. *Es gibt keine injektive Funktion $\mathbb{N}^* \to M$.*
3. *Es gibt keine surjektive Funktion $M \to \mathbb{N}^*$.*
4. *Jede injektive Funktion von M nach M ist bijektiv.* *(Dedekind)*
5. *Jede surjektive Funktion von M nach M ist bijektiv.*
6. *Jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq \mathrm{P}(M)$ der Potenzmenge hat ein minimales Element bezüglich Inklusion:*

$$\forall \emptyset \neq A \subseteq \mathrm{P}(M) \;\; \exists x \in A \;\; \forall y \in A : y \subseteq x \Longrightarrow y = x \qquad \textit{(Tarski)}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennen wir M endlich und die gleichmächtige von Neumann-Zahl $\#M$ ihre Mächtigkeit oder Kardinalität.

Wohldefiniertheit der Kardinalität endlicher Mengen

Aufgabe 5.19. *Die leere Menge* $\emptyset$ *ist die* einzige *von Neumann-Zahl, die nicht Nachfolger einer von Neumann-Zahl ist. Für jede andere von Neumann-Zahl* μ *ist* $\mathrm{V}(\mu)$ *der Vorgänger:*

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^* : \quad \emptyset \neq \mu \Longleftrightarrow \big(\mathrm{V}(\mu) \in \mathbb{N}^* \textit{ und } \mu = \mathrm{V}(\mu)^+\big)$$

Aufgabe 5.20. *Seien* $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ *zwei von Neumann-Zahlen. Sind die Nachfolger* μ^+ *und* ν^+ *gleichmächtig, so sind auch* μ *und* ν *gleichmächtig.*

Aufgabe 5.21. *Gleichmächtige von Neumann-Zahlen sind gleich.*

Wohldefiniertheit der Kardinalität 5.23. *Sei* M *eine endliche Menge, dann gibt es genau eine zu* M *gleichmächtige von Neumann-Zahl.*

Beweis. Die Existenz folgt aus der Endlichkeit von M.

Für die Eindeutigkeit betrachten wir $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ und Bijektionen $f : \mu \to M$ und $g : \nu \to M$. Dann ist $g^{-1} \circ f : \mu \to \nu$ eine Bijektion und somit $\mu = \nu$ nach Aufgabe 5.21. **q.e.d.**

Intuitionen: Gleichmächtigkeit zu von Neumann-Zahlen

Diese Endlichkeitsdefinition sagt einfach, daß genau die Mengen endlich sind, die sich *zählen* lassen. Eine Menge, die gleichmächtig ist zu

$$4_N = \{0_N, 1_N, 2_N, 3_N\}$$

hat augenscheinlich vier Elemente.

Intuitionen: Unendlichkeit via $\mathbb{N}^*$

Hier haben wir zwei Kriterien für *Unendlichkeit*. Sei M eine unendliche Menge. Dann hat sie mindestens ein Element m_0. Nun ist

$$M_1 := \{x \in M \mid x \neq m_0\}$$

immer noch unendlich, und hat darum ein Element m_1. So fahren wir fort und erhalten paarweise verschiedene Elemente

$$m_0, m_1, m_2, \ldots \in M$$

Die Abbildung $i \mapsto m_i$ ist dann eine injektive Funktion $\mathbb{N}^* \to M$.

Umgekehrt ist $m_i \mapsto i$ eine Abbildung definiert auf einer Teilmenge von M und surjektiv auf $\mathbb{N}^*$. Fortsetzen (irgendwie) auf ganz M liefert eine Surjektion $M \to \mathbb{N}^*$.

Intuitionen: Dedekind-Endlichkeit

Dedekind-Endlichkeit formalisiert das „Schubfachprinzip“:

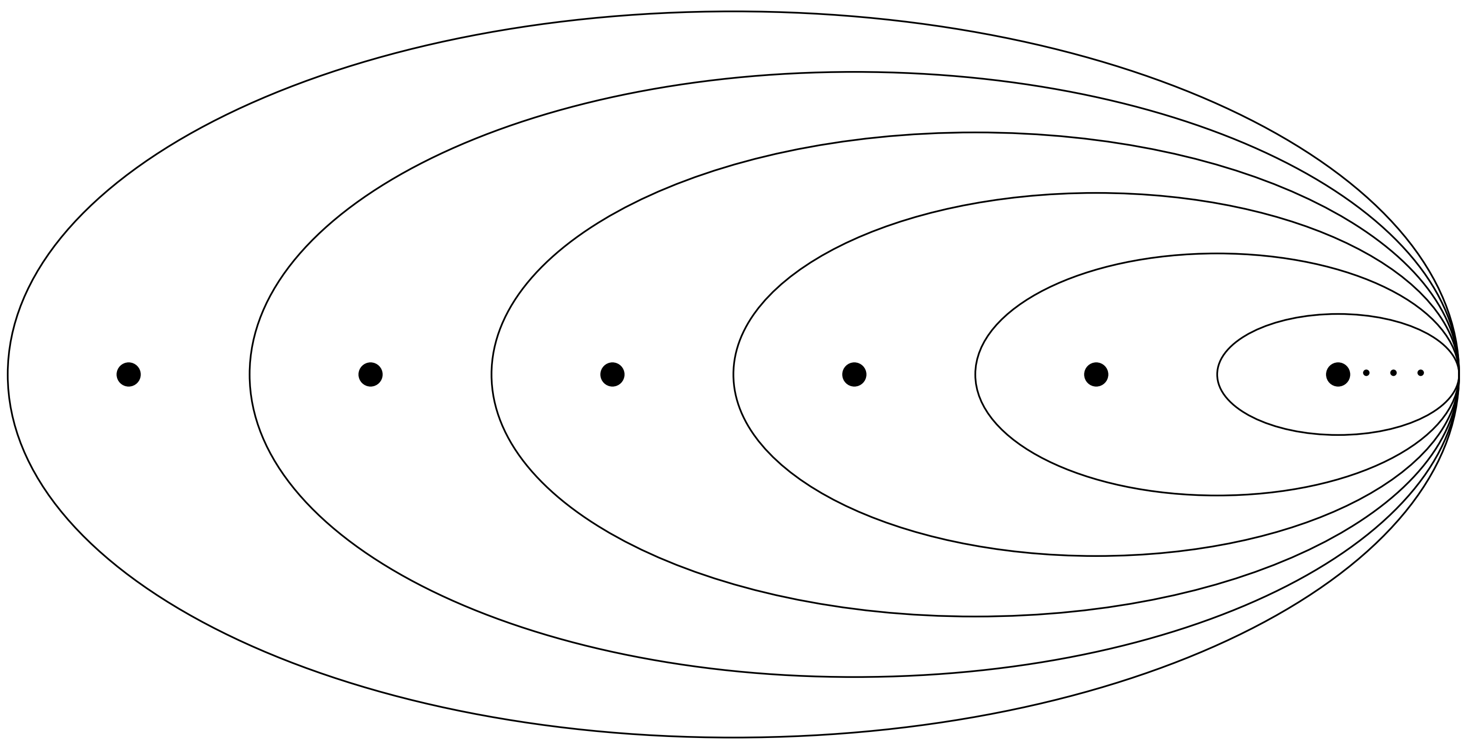
> Murmeln sollen auf Schubfächer verteilt werden. Sind es mehr Murmeln als Fächer, so werden mindestens zwei im selben Fach landen.

Angewendet auf eine injektive Abbildung $M \to M$ mit endlichem M heißt das, daß das Bild nicht eine echte Teilmenge von M sein kann.

Intuitionen: Tarski-Endlichkeit

Hier ist der positive Teil schnell erklärt: eine endliche Menge hat eine endliche Potenzmenge. Jede Teilmenge darin ist also eine endliche, durch Inklusion geordnete Menge. Als endliche Ordnung hat sie ein minimales Element.

Interessanter ist die Frage, warum für unendliches M die Potenzmenge $\mathrm{P}(M)$ eine Teilmenge $B \subseteq \mathrm{P}(M)$ enthalten soll, die *kein* $\subseteq$-minimales Element hat.



Intuitionen: Kuratowski-Endlichkeit

Eine Menge soll doch wohl dann endlich sein, wenn sie sich aus der leeren Menge dadurch gewinnen läßt, daß ein Element nach dem andern hinzugefügt wird. Die folgende Definition bringt diese Vorstellung zu Geltung: die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist endlich, die leere Menge ist endlich, und alle Einermengen sind endlich. Die „Gesamtheit" (nicht „Menge"!) aller endlichen Mengen ist die kleinste Gesamtheit, die $\emptyset$ und alle Einermengen enthält und abgeschlossen ist unter Vereinigung.

Da diese Gesamtheit aber keine Menge ist, müssen wir uns auf die Teilmengen einer vorgegebenen Menge M einschränken:

Definition. Eine Menge M heißt <u>Kuratowski-endlich</u>, wenn jede Teilmenge $B \subseteq \mathrm{P}(M)$, die gegenüber Vereinigung abgeschlossen ist und außerdem die leere Menge und alle Einermengen $\{m\}$ für $m \in M$ enthält, schon M als Element enthält:

$$\forall B \subseteq \mathrm{P}(M) : \quad \begin{pmatrix} \forall x, y \in B : x \cup y \in B & \text{und} \\ \emptyset \in B & \text{und} \\ \forall m \in M : \{m\} \in B & \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad M \in B$$

Angeordnete Körper I

Definition. Ein angeordneter Körper ist ein Körper K mit Nullelement $0 \in K$, Einselement $1 \in K$, Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} + : K \times K &\longrightarrow K \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \\ \cdot : K \times K &\longrightarrow K \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

und einer Anordnung $\leq$ auf K (genannt Kleiner-Gleich), die mit den Körperverknüpfungen in folgendem Sinne verträglich ist:

1. Die Kleiner-Gleich-Relation ist invariant unter Addition:
$$\alpha \leq \beta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$$

2. Die Kleiner-Gleich-Relation ist invariant unter Multiplikation mit nicht-negativen Elementen:
$$\alpha \leq \beta \text{ und } 0 \leq \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$$

(Angeordnete) Körper II

Klammerersparnisregeln.

$$\alpha - \beta := \alpha + (-\beta) \qquad\qquad -\beta \text{ ist additives Inverses}$$
$$\frac{\alpha}{\beta} := \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$
$$\alpha\beta := \alpha \cdot \beta$$
$$\alpha + \beta + \gamma := (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha\beta + \gamma = (\alpha\beta) + \gamma$$

Also: Punkt- vor Strichrechnung. Klammern setzen wir nicht, wenn das Ergebnis nicht von der Klammerung abhängt.

Potenznotation. Wir setzen

$$x^2 := x \cdot x$$
$$x^3 := x \cdot x^2$$
$$x^4 := x \cdot x^3$$
$$\vdots$$

(Angeordnete) Körper III

Beobachtung. *In einem Körper K gilt $0 \cdot \alpha = 0$ für jedes Element $\alpha \in K$.*

Satz und Definition. Additive Inverse sind eindeutig (LA). Das additive Inverse von α bezeichnen wir mit $-\alpha$. Multiplikative Inverse sind eindeutig (LA). Das multiplikative Inverse eines Elements $\alpha \neq 0$ bezeichnen wir mit $\frac{1}{\alpha}$.

Folgerung. *In einem Körper K ist für jedes $\alpha \in K$ das Produkt $(-1) \cdot \alpha$ ein und damit* das *additive Inverse $-\alpha$. Es ist nämlich*

$$\begin{aligned}
\alpha + (-1) \cdot \alpha &= 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha \\
&= (1 + (-1)) \cdot \alpha \\
&= 0 \cdot \alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Angeordnete) Körper IV

Proposition. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 + 0 \\
&= 1 + 0 \cdot (-1) \\
&= 1 + (1 + (-1)) \cdot (-1) \\
&= 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\
&= 1 + (-1) + (-1) \cdot (-1) \\
&= 0 + (-1) \cdot (-1) \\
&= (-1) \cdot (-1)
\end{aligned}
$$

(Angeordnete) Körper V

Nullteilerfreiheit. *Jeder Körper K ist <u>nullteilerfrei</u>, d.h.:*

$$x \neq 0 \textit{ und } y \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xy \neq 0 \qquad\qquad \forall x, y \in K$$

In Worten und negativ formuliert: ein Produkt verschwindet genau dann, wenn mindestens einer seiner Faktoren verschwindet.

Beweis. Das sollte aus der linearen Algebra bekannt sein. Hier eine Erinnerung an den wesentlichen Punkt: Sei $x \neq 0$ aber $xy = 0$. Dann ist:

$$y = \frac{1}{x}xy = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$$

q.e.d.

Angeordnete Körper VI: Das Einselement ist positiv

Proposition. *In einem angeordneten Körper K sind Quadrate nicht-negativ:*

$$0 \le \alpha \cdot \alpha \qquad \forall \alpha \in K$$

Insbesondere ist $0 \le 1$. (Und $0 \ne 1$ gilt in jedem Körper.)

Beweis. Für $\alpha \in K$ ist $0 \le \alpha$ oder $\alpha \le 0$, weil die Relation $\le$ total ist. Im Fall $0 \le \alpha$ folgt $0 = 0 \cdot \alpha \le \alpha \cdot \alpha$.

Im Fall $\alpha \le 0$ folgt $0 = \alpha + (-\alpha) \le 0 + (-\alpha) = -\alpha$. Damit ergibt sich unter Anwendung des ersten Falles auf das nicht-negative $-\alpha$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\le (-\alpha) \cdot (-\alpha) \\ &= ((-1) \cdot \alpha) \cdot ((-1) \cdot \alpha) \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot \alpha \cdot \alpha \\ &= 1 \cdot \alpha \cdot \alpha \\ &= \alpha \cdot \alpha \end{aligned}$$

und es folgt wieder $0 \le \alpha \cdot \alpha$. **q.e.d.**

Die Mutter aller Ungleichungen

$$0 \le x^2 \qquad \text{und} \qquad \text{Gleichheit } \textit{nur} \text{ für } x = 0$$

Diese Ungleichung gilt in *jedem* angeordneten Körper.

Etliche Ungleichungen ergeben sich aus ihr durch (zuweilen trickreiche) Manipluation.

Monotonie der dritten Potenz

Anwendung. *In einem angeordneten Körper gilt:*

$$x \le y \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 \le y^3$$

Beweis. Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} 2(y^3 - x^3) &= (y - x)(y^2 + y^2 + 2yx + x^2 + x^2) \\ &= (y - x)[y^2 + (y + x)^2 + x^2] \end{aligned}$$

Nun sind Summen von Quadraten nicht negativ:

$$0 \le y^2 + (y + x)^2 + x^2$$

Ist nun $x \le y$, folgt auch $0 \le y - x$ und darum:

$$0 \le (y - x)[y^2 + (y + x)^2 + x^2] = 2(y^3 - x^3)$$

Mit $0 \le \frac{1}{2}$ erhalten wir durch Multiplikation:

$$0 \le y^3 - x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 \le y^3$$ **q.e.d.**

Strenge Monotonie der dritten Potenz

Anwendung. *In einem angeordneten Körper gilt außerdem:*

$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 < y^3$$

Beweis. Erinnerung:

$$2(y^3 - x^3) = (y - x)[y^2 + (y + x)^2 + x^2]$$

Ist nun *überdies* $x < y$, so ist zunächst

$$0 \neq y - x$$

Ferner ist nun

$$0 < y^2 + (y + x)^2 + x^2$$

denn mindestens einer der Summanden y^2 und x^2 ist echt positiv ($y \neq 0$ oder $x \neq 0$). Damit ist

$$2(y^3 - x^3) = (y - x)[y^2 + (y + x)^2 + x^2] \neq 0$$

und die Aussage folgt mit Nullteilerfreiheit. **q.e.d.**

Ordnungs-Vollständigkeit

Satz und Definition 6.22. *Sei M eine Menge und $\leq$ eine Ordnung auf M. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von M hat ein Supremum.*

2. *Jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von M hat ein Infimum.*

3. *Für je zwei nicht-leere Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit $x \leq y$ für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ gibt es ein Element $m \in M$ mit:*

   $$x \leq m \leq y \qquad \text{für alle } x \in A \text{ und alle } y \in B$$

   Die Voraussetzungen sagen: jedes Element von A ist untere Schranke von B und jedes Element von B ist obere Schranke von A.

M heißt <u>ordnungs-vollständig</u> bezüglich $\leq$, wenn diese Bedingungen erfüllt sind.

Beweis: (2) $\Longrightarrow$ (3)

(2) Jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von M hat ein Infimum.

(3) Jedes Element von $\emptyset \neq A \subseteq M$ sei untere Schranke von $\emptyset \neq B \subseteq M$ und jedes Element von B sei obere Schranke von A. Dann gibt es eine Element $m \in M$, das zugleich obere Schranke von A und untere Schranke von B ist.

Beweis. Da A nicht-leer ist, ist B nach unten beschränkt. Mit (2) hat B also ein Infimum m und es ist $m \leq y$ für jedes $y \in B$. Da ferner jedes Element $x \in A$ eine untere Schranke von B ist, gilt nach Definition des Infimum: $x \leq m$ für jedes $x \in A$. **q.e.d.**

Bermerkung. Die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (3) zeigt man genauso mit vertauschten Rollen von A und B.

Beweis: (3) $\Longrightarrow$ (2)

(2) Jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von M hat ein Infimum.

(3) Jedes Element von $\emptyset \neq A \subseteq M$ sei untere Schranke von $\emptyset \neq B \subseteq M$ und jedes Element von B sei obere Schranke von A. Dann gibt es eine Element $m \in M$, das zugleich obere Schranke von A und untere Schranke von B ist.

Beweis. Sei B eine nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von M. Wir bilden die Menge

$$A := \{x \in M \mid \forall y \in B : x \leq y\}$$

aller unteren Schranken von B. Da B nach unten beschränkt ist, ist A auch nicht-leer. Dann gibt es nach Annahme (3) ein $m \in M$ mit:

$$x \leq m \leq y \qquad \text{für alle } x \in A \text{ und alle } y \in B$$

Damit ist m Infimum von$B$. **q.e.d.**

Kehrwerte Positiver Größen

Beobachtung. *In einem angeordneten Körper gilt:*

$$0 < x \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x}$$

Beweis. Zum Widerspruch nehmen wir $\frac{1}{x} \leq 0$ an und multiplizieren beide Seiten mit dem nicht-negativen Element x. Dann erhalten wir die absurde Aussage $1 \leq 0$. **q.e.d.**

$$0 < \tfrac{1}{2}$$

Erinnerung. $0 < x \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x}$

Beobachtung.

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

Beweis. $0 < 1$. Wir addieren auf beiden Seiten 1 und sehen: $1 < 2$. Transitivität ergibt:

$$0 < 2$$

Wir nehmen den Kehrwert:

$$0 < \frac{1}{2}$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$ und erhalten die zweite Behauptung:

$$\frac{1}{2} < 1$$ **q.e.d.**

Proposition 6.14. *Seien $\alpha < \beta$ Elemente eines angeordneten Körper. Dann ist:*

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

Also: das arithmetische Mittel zweier verschiedener Größen liegt echt dazwischen. Insbesondere ist jeder angeordnete Körper eine unendliche Menge.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $0 < \beta - \alpha$. Wir multiplizieren damit

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

und erhalten:

$$0 < \frac{\beta - \alpha}{2} < \beta - \alpha$$

und schließlich addieren wir α und erhalten

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

q.e.d.

Dedekindsche Schnitte

Definition 6.23. Sei K eine angeordneter Körper. Ein Dedekindscher Schnitt ist ein Paar (L, R) zweier Teilmengen $L, R \subseteq K$, so daß gilt:

1. Beide Teilmengen sind nicht leer:
$$L \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad R \neq \emptyset$$
2. Zusammen überdecken die beiden Teilmengen K:
$$K = L \cup R$$
3. Die beiden Teilmengen sind disjunkt, d.h., sie haben keine Elemente gemeinsam:
$$L \cap R = \emptyset$$
4. Jedes Element von A ist kleiner-gleich jedem Element von R:
$$\lambda \leq \rho \qquad \forall \lambda \in L, \rho \in R$$
   D.h.: jedes Element von L ist untere Schranke von R und jedes Element von R ist obere Schranke von L.

Beispiel

Bemerkung. In $\mathbb{Q}$ ist durch

$$\begin{aligned} L &:= \left\{\mu \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \mu^3 < 2\right\} \\ R &:= \left\{\mu \in \mathbb{Q} \,\middle|\, 2 < \mu^3\right\} \end{aligned}$$

ein Dedekindscher Schnitt gegeben.

Beweis. Monotonie von $x \mapsto x^3$ ...

Aufgabe. Zeige: der Körper $\mathbb{Q}$ ist *nicht* ordnungs-vollständig.

Satz 6.24. *Sei K ein angeordneter Körper und (L, R) ein Dedekindscher Schnitt in K. Dann gibt es* höchstens *ein <u>Schnittelement</u> $\sigma \in K$, für das gilt:*

$$\lambda \leq \sigma \quad \forall \lambda \in L \qquad\qquad \sigma \leq \rho \quad \forall \rho \in R$$

Beweis. Sei $\sigma \in K$ ein Schnittelement. Nach Eindeutigkeit des Supremums reicht es zu zeigen, daß daß σ das Supremum von L ist.

Sei also $\alpha \in K$ eine obere Schranke von L. Zu zeigen ist $\sigma \leq \alpha$.

Mit $K = L \cup R$ unterscheiden wir zwei Fälle:

<u>$\alpha \in R$</u>: Da σ eine Schnittzahl ist, gilt unmittelbar $\sigma \leq \alpha$.

<u>$\alpha \in L$</u>: Wir nehmen zum Widerspruch $\alpha < \sigma$ an. Mittelbildung ergibt:

$$\alpha < \frac{\alpha + \sigma}{2} < \sigma$$

Das Mittel $\frac{\alpha+\sigma}{2}$ kann also nicht in R liegen, gehört also zu L. Aber dann war α keine obere Schranke von L, womit wir einen Widerspruch gefunden haben. **q.e.d.**

Satz 6.26. *Ein angeordneter Körper K ist genau dann ordnungs-vollständig, wenn er Dedekind-vollständig ist, d.h. wenn es zu jedem Dedekindschen Schnitt (L, R) in K ein Schnittelement gibt.*

Beweis $\Longrightarrow$. Sei zunächst K ordnungs-vollständig und (L, R) ein Dedekindscher Schnitt. Dann ist die Bedingung (6.22-3) mit $A = L$ und $B = R$ erfüllt. Damit folgt die Existenz des gesuchten Schnittelements.

Erinnerung (6.22-3). $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ und jedes Element von A ist kleiner als jedes Element von B. Dann gibt es ein Element, das zugleich obere Schranke von A und untere Schranke von B ist.

Dedekind-Vollständigkeit II

Satz 6.26. *Ein angeordneter Körper K ist genau dann ordnungs-vollständig, wenn er Dedekind-vollständig ist, d.h. wenn es zu jedem Dedekindschen Schnitt (L, R) in K ein Schnittelement gibt.*

Beweis $\Longleftarrow$. Nun sei K Dedekind-vollständig. Wir zeigen, daß jedes nicht-leere, nach oben beschränkte $A \subseteq K$ ein Supremum hat (6.22-1).

$$L := \{\alpha \in K \mid \exists x \in A : \alpha < x\}$$

$$R := \{\alpha \in K \mid \forall x \in A : x \leq \alpha\} \quad \text{Menge der oberen Schranke}$$

$K = L \cup R$ und	$\emptyset = L \cap R$	komplementäre Bedingungen
	$L \neq \emptyset$	$x \in A \Rightarrow x - 1 \in L$
	$R \neq \emptyset$	β obere Schranke von $A \Rightarrow \beta \in R$
$\alpha \in L$ und $\beta \in R$	$\Longrightarrow$	$\exists x \in A : \alpha < x \leq y$

Also ist (L, R) ein Dedekind-Schnitt. Sei σ das Schnittelement.

Dedekind-Vollständigkeit III

Satz 6.26. *Ein angeordneter Körper K ist genau dann ordnungs-vollständig, wenn er Dedekind-vollständig ist, d.h. wenn es zu jedem Dedekindschen Schnitt (L, R) in K ein Schnittelement gibt.*

Beweis $\Longleftarrow$ (Fortsetzung). Das Element $\sigma \in K$ entspricht dem Schnitt:

$$\begin{aligned} L &:= \{\alpha \in K \mid \exists x \in A : \alpha < x\} \\ R &:= \{\alpha \in K \mid \forall x \in A : x \leq \alpha\} \quad \text{Menge der oberen Schranke} \end{aligned}$$

$$\lambda \leq \sigma \quad \forall \lambda \in L \qquad\qquad \sigma \leq \rho \quad \forall \rho \in R$$

Wir behaupten: σ ist obere Schranke von A.

$$\sigma < \alpha \in A \Longrightarrow \sigma < \frac{\sigma + \alpha}{2} < \alpha \Longrightarrow \frac{\sigma + \alpha}{2} \in R \cap L = \emptyset \quad \lightning$$

Sei nun $\beta \in K$ eine obere Schranke von A, d.h. $\beta \in R$. Die zweite Bedingung für das Schnittelement σ impliziert dann $\sigma \leq \beta$. Damit ist σ kleinste obere Schranke von A. **q.e.d.**

Definition 6.27. Wir wählen einen beliebigen ordnungs-vollständigen Körper und nennen ihn $\mathbb{R}$. Seine Elemente bezeichnen wir als reelle Zahlen.

Bemerkung (Existenzfrage). Es stellt sich unmittelbar die Frage, ob es ordnungs-vollständige Körper überhaupt gibt (wie in der Definition stillschweigend angenommen). Die Axiome der Mengenlehre, die wir bisher eingeführt haben, erlauben es, die Existenz angeordneter Körper zu beweisen. Entscheidend ist dabei das *Unendlichkeitsaxiom*, das die Existenz der Menge $\mathbb{N}^*$ garantiert. Einen Existenzbeweis für die reellen Zahlen liefere ich erst später, weil er an dieser Stelle zu schwierig wäre. Für's erste *verspreche* ich, daß es einen ordnungs-vollständigen Körper gibt.

Definition 6.29. Seien K und K' zwei angeordnete Körper. Eine Abbildung

$$f : K \longrightarrow K'$$

heißt Morphismus angeordneter Körper, wenn gilt:

1. $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in K$.
2. $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in K$.
3. $\alpha \leq \beta \implies f(\alpha) \leq f(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in K$.

Ist f bijektiv, so heißt f Isomorphismus. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung auch ein Morphismus angeordneter Körper.

Versprechen. *Seien K und K' ordnungs-vollständige Körper. Dann gibt es (genau) einen Isomorphismus $f : K \to K'$ angeordneter Körper. Wir sagen: der Körper der reellen Zahlen ist eindeutig bis auf (eindeutige) Isomorphie.*

Die Zahlbereiche

In diesem Abschnitt fixieren wir einen beliebigen angeordneten Körper $\mathbb{K}$. Wir definieren die Teilmengen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$$

der natürlichen, der ganzen und der rationalen Zahlen in $\mathbb{K}$.

Implizit hängen diese Teilmengen vom Körper $\mathbb{K}$ ab. Wenn wir die Abhängigkeit betonen wollen, schreiben wir auch:

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} \qquad \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \qquad \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$$

Später ist unser gewählter Körper stets $\mathbb{R}$ und wir benutzen die Bezeichnungen $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$.

Wichtig ist aber, daß wir nicht grundsätzlich $\mathbb{K}$ als ordnungs-vollständig annehmen. Wir machen diese Annahme nur, wenn sie nötig wird, und dann formulieren wir sie explizit.

Nochmal: die natürlichen Zahlen

Definition 7.1. Ein Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt <u>induktiv</u>, wenn $0 \in A$ ist und A unter Addition der Eins abgeschlossen ist, d.h.:

$$\forall r : r \in A \Longrightarrow (r+1) \in A$$

Wir nennen die Elemente von

$$\mathbb{N} := \mathrm{D}(\{A \in \mathrm{P}(\mathbb{K}) \mid A \text{ ist induktiv}\})$$

<u>natürliche Zahlen</u>. Wir setzen

$$\begin{aligned}
2 &:= 1+1 \\
3 &:= 2+1 = 1+1+1 \\
4 &:= 3+1 = 1+1+1+1 \\
5 &:= 4+1 = 1+1+1+1+1 \\
6 &:= 5+1 = 1+1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Satz 7.4. *Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl.*

Beweis. Wir definieren die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ wiefolgt:

$$A := \{m \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$$

Offensichtlich ist $A = \mathbb{N}$ zu zeigen. Dazu argumentieren wir, daß A induktiv ist. (Vollständige Induktion)

Zunächst ist $0 \in A$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $0 + n = n \in \mathbb{N}$.

Nun zur Abgeschlossenheit unter Addition von Eins. Sei $m \in A$. Zu zeigen ist $m + 1 \in A$, d.h.

$$(m + 1) + n \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nun ist aber für $n \in \mathbb{N}$ auch $n + 1 \in \mathbb{N}$, weil $\mathbb{N}$ induktiv ist. Damit haben wir:

$$(m + 1) + n = m + (1 + n) = m + (n + 1) \in \mathbb{N}$$ **q.e.d.**

Aufgabe. Das Produkt mn zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Natürliche Zahlen sind nicht-negativ

Beobachtung 7.6. *Keine natürliche Zahl ist negativ.*

Beweis. Sei $A := \{m \in \mathbb{N} \mid 0 \leq m\}$. Wir zeigen, daß A induktiv ist.

Weil die Kleiner-Gleich-Relation reflexiv ist, ist $0 \leq 0$ und somit $0 \in A$.

Sei nun $m \in A$. Nun ist $0 \leq= 1$. Darum

$$0 \leq m \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \leq m+1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq m+1$$ **q.e.d.**

Lemma 7.7. *Für jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$0 \neq m \qquad \Longrightarrow \qquad m-1 \in \mathbb{N}$$

Damit gilt für $m \in \mathbb{N}$ auch

$$1 \leq m \quad \Longrightarrow \quad 0 \neq m \quad \Longrightarrow \quad m-1 \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq m-1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq m$$

und die Bedingungen sind alle zueinander äquivalent.

Beweis. Wir setzen $A := \{m \in \mathbb{N} \mid 0 = m \text{ oder } m-1 \in \mathbb{N}\}$ und zeigen, daß A induktiv ist. Offenbar ist $0 \in A$. Wir beobachten außerdem, daß $1 \in A$ ist, weil $1-1 = 0 \in \mathbb{N}$ ist.

Sei nun $m \in A$. Zu zeigen ist $m+1 \in A$. Ist $m = 0$, so ist $m+1 = 1 \in A$. Ist $m \neq 0$, so folgt aus $m \in A$, daß $m-1 \in \mathbb{N}$ ist. Dann aber ist $(m+1)-1 = m \in \mathbb{N}$ und somit $m+1 \in A$. **q.e.d.**

Die Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist algebraisch charakterisierbar I

Satz 7.8-a. *Für zwei natürliche Zahlen m und n gilt:*

$$m \leq n \qquad \Longleftrightarrow \qquad n - m \in \mathbb{N}$$

Beweis. $\Leftarrow$: $n - m \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 \leq n - m \Longrightarrow 0 + m \leq n \Longrightarrow m \leq n$.

$\Rightarrow$: $A_m := \{n \in \mathbb{N} \mid m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}\}$ und $A := \{m \in \mathbb{N} \mid A_m = \mathbb{N}\}$

$$A_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid n - 0 \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \Longrightarrow 0 \in A$$

$$(7.7) \Longrightarrow A_1 = \mathbb{N} \Longrightarrow 1 \in A$$

$$m \in A \text{ und } m + 1 \leq n \underset{0 \leq m}{\Longrightarrow} 1 \leq m + 1 \leq n \underset{(7.7)}{\Longrightarrow} n - 1 \in \mathbb{N}$$

$$\underset{A_m = \mathbb{N}}{\Longrightarrow} n - 1 \in A_m \underset{m \leq n-1}{\Longrightarrow} (n-1) - m \in \mathbb{N}$$

$$\underset{n-(m+1)=(n-1)-m}{\Longrightarrow} n - (m+1) \in \mathbb{N}$$

Also folgt aus $m \in A$, daß $m + 1 \in A$ ist. **q.e.d.**

Die Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist algebraisch charakterisierbar II

Satz 7.8-b. *Für zwei natürliche Zahlen m und n gilt:*

$$m < n \qquad \Longleftrightarrow \qquad m + 1 \leq n$$

Beweis. Wir nutzen (7.8-a) und die Äquivalenzen aus (7.7):

$$\begin{aligned}
m < n \quad &\underset{\text{def} <}{\Longleftrightarrow} \quad m \leq n \text{ und } m \neq n \\
&\underset{\text{(7.8-a)}}{\Longleftrightarrow} \quad n - m \in \mathbb{N} \text{ und } n - m \neq 0 \\
&\underset{\text{(7.7)}}{\Longleftrightarrow} \quad n - m \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n - m \\
&\underset{\text{(*)}}{\Longleftrightarrow} \quad (n - m) - 1 = n - (m + 1) \in \mathbb{N} \\
&\underset{\text{(7.8-a)}}{\Longleftrightarrow} \quad m + 1 \leq n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: (7.7)

$\Leftarrow$: (7.7) und: $(n - m) - 1 \in \mathbb{N} \underset{\mathbb{N}\text{ induktiv}}{\Longrightarrow} n - m \in \mathbb{N}$ **q.e.d.**

Das Wohlordnungsprinzip für die natürlichen Zahlen

Satz 7.9. *Jede nicht-leere Menge M natürlicher Zahlen hat ein <u>kleinstes Element</u> $a \in M$, d.h. $a \leq m$ für jedes $m \in M$.*

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge *ohne* kleinstes Element. Betrachte:

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \; \forall m \in M\} \qquad \text{Menge der unteren Schranken}$$

$M \cap A = \emptyset$, denn sonst: $M \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow M$ hat kleinstes Element $\lightning$

$0 \in A$, denn: 0 ist untere Schranke von $\mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{N}$.

A induktiv, denn:

$$n \in A \underset{\text{Def } A}{\Longleftrightarrow} \forall m \in M : n \leq m \underset{A \cap M = \emptyset}{\Longrightarrow} \forall m \in M : n < m$$

$$\underset{\text{(7.8-b)}}{\Longrightarrow} \forall m \in M : n + 1 \leq m \underset{\text{Def } A}{\Longleftrightarrow} n + 1 \in A$$

Also ist $A = \mathbb{N}$ und darum $\emptyset = A \cap M = \mathbb{N} \cap M = M$. **q.e.d.**

Satz 7.10. *Ist $\mathbb{K}$ ordnungs-vollständig, so gibt es zu jedem Element $r \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $r \leq m$.*

Kurz: In einem ordnungs-vollständigen Körper $\mathbb{K}$ ist die Menge $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ nach oben unbeschränkt.

Beweis. Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, so sei $\sigma \in \mathbb{K}$ eine *kleinste* obere Schranke.

$$\sigma - 1 < \sigma \Longrightarrow \sigma - 1 \text{ ist keine obere Schranke}$$
$$\Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \sigma - 1 < m \Longrightarrow \sigma < m + 1 \in \mathbb{N} \quad ↯$$

q.e.d.

Rekursive Definitionen I

Satz 7.11. *Sei M eine Menge, $m_0 \in M$ ein Element und $F : \mathbb{N} \times M \to M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

die folgenden zwei Bedingungen genügt:

$$f(0) = m_0 \tag{1}$$

$$f(n+1) = F(n, f(n)) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Wieder sagen wir, f sei durch (1) und (2) <u>induktiv oder rekursiv definiert</u>.

Bemerkung. Auch das geht genauso mit von Neumann-Zahlen: Sei M eine Menge, $m_\emptyset \in M$ ein Element und $F : \mathbb{N}^* M \to M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow M$ die folgenden zwei Bedingungen genügt:

$$f(\emptyset) = m_\emptyset$$

$$f\left(\mu^+\right) = F(\mu, f(\mu)) \qquad \forall \mu \in \mathbb{N}^*$$

Rekursive Definitionen II

Gegeben: $F : \mathbb{N} \times M \to M$, gesucht: $f : \mathbb{N} \to M$ mit

$$f(0) = m_0 \tag{1}$$

$$f(n+1) = F(n, f(n)) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Beweis von Satz 7.11 (Eindeutigkeit). $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to M$ wie gefordert.

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid f_1(n) = f_2(n)\}$$

$0 \in A$, denn: $f_1(0) = m_0 = f_2(0)$

$n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$, denn:

$$\begin{aligned} n \in A &\Longrightarrow f_1(n) = f_2(n) \\ &\Longrightarrow f_1(n+1) = F(n, f_1(n)) = F(n, f_2(n)) = f_2(n+1) \end{aligned}$$

Also ist A induktiv und damit $A = \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Rekursive Definitionen III

Gegeben: $F : \mathbb{N} \times M \to M$, gesucht: $f : \mathbb{N} \to M$ mit

$$f(0) = m_0 \tag{1}$$

$$f(n+1) = F(n, f(n)) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Beweis von Satz 7.11 (Existenz). Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N} \times M$ heiße F-induktiv, wenn gilt:

$$(0, m_0) \in A \qquad \text{und} \qquad (n, m) \in A \Longrightarrow (n+1, F(n, m)) \in A$$

$R := \mathrm{D}(\{A \subset \mathbb{N} \times M \mid A : F\text{-induktiv}\})$ ist die *kleinste* F-induktive Menge.

$B := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists! y \in M : (x, y) \in R\}$ ist induktiv:

$0 \in B$, denn:

Existenz $(0, m_0) \in R$, also $\exists y \in M : (0, y) \in R$.

Eindeutigkeit Sei $(0, m') \in R$ mit $m' \neq m_0$, dann wäre $R' := R \setminus \{(0, m')\}$ eine kleinere F-induktive Menge. $\lightning$

Rekursive Definitionen IV

Beweis von Satz 7.11 (Existenz). $A \subseteq \mathbb{N} \times M$ ist F-induktiv, wenn:

$$(0, m_0) \in A \qquad \text{und} \qquad (n, m) \in A \Longrightarrow (n+1, F(n, m)) \in A$$

$R := \mathrm{D}(\{A \subset \mathbb{N} \times M \mid A : F\text{-induktiv}\})$ ist die *kleinste* F-induktive Menge.

$B := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists! y \in M : (x, y) \in R\}$ ist induktiv:

$n \in B \Longrightarrow n+1 \in B$, denn sei $y_n \in M$ *das* Element mit $(n, y_n) \in R$. Wir untersuchen die möglichen Partner von $n+1$.

Existenz $(n+1, F(n, y_n)) \in R$. Also $\exists y \in M : (n+1, y) \in R$.

Eindeutigkeit Sei $(n+1, y') \in R$ mit $y' \neq F(n, y_n)$, dann wäre $R' := R \setminus \{(n+1, y')\}$ eine kleinere F-induktive Menge. $\lightning$

Sonst gäbe es nämlich $(n, y) \in R$ mit $y' = F(n, y)$. Aber da y_n der *einzige* Partner von n in R ist, folgte $y = y_n$ und dann $y' = F(n, y_n)$.

Also ist $B = \mathbb{N}$ und die Menge R ist Graph der gesuchten Funktion f. **q.e.d.**

Nun können wir Potenzen mit höheren Exponenten einführen:

Beispiel 7.13. Für ein Körperelement $x \in K$ sind die Potenzen x^m rekursiv erklärt durch:

$$x^0 = 1$$
$$x^{m+1} = x \cdot x^m$$

Aufgabe 7.14. Zeige: $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

Vorschau. Später haben wir ganze Zahlen. Dann setzen wir

$$x^{m-n} := \frac{x^m}{x^n}$$

Zählen mit natürlichen Zahlen I

Definition 7.16. Für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$[m] := \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\} = \{0, 1, \ldots, m-1\} \in \mathrm{P}(\mathbb{N})$$

Dies ist der zu m gehörige Hauptanfang von $\mathbb{N}$.

Rekursive Interpretation. *Die Abbildung $m \mapsto [m]$ genügt der Rekursionsformel*

$$\begin{aligned} [0] &= \emptyset \\ [m+1] &= [m] \cup \{m\} \end{aligned}$$

mit der Rekursionsabbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathrm{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathrm{P}(\mathbb{N}) \\ (m, A) &\mapsto A \cup \{m\} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} [m+1] &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < m+1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq m\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < m \text{ oder } x = m\} = [m] \cup \{m\} \end{aligned}$$

Satz und Definition 7.17. *Die Rekursionen*

$$f(0) = \emptyset \qquad\qquad g(\emptyset) = 0$$
$$f(m+1) = f(m)^+ \qquad\qquad g(\mu^+) = g(\mu) + 1$$

definieren zueinander inverse Bijektionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ *und* $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$.

Beweis. Die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ erfüllen rekursive Definitionen:

$$(f \circ g)(\emptyset) = f(0) = \emptyset$$
$$(f \circ g)\big(\mu^+\big) = f\big(g\big(\mu^+\big)\big) = f(g(\mu) + 1) = (f \circ g)(\mu)^+$$

und

$$(g \circ f)(0) = g(\emptyset) = 0$$
$$(g \circ f)(m+1) = g(f(m+1)) = g\big(f(m)^+\big) = (g \circ f)(m) + 1$$

Die Eindeutigkeitsaussage des Rekursionssatzes impliziert daher:

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*} \qquad\qquad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$$

Also sind f und g zueinander inverse Bijektionen (3.18). **q.e.d.**

Zählen mit natürlichen Zahlen III

Satz und Definition 7.17 (Fortsetzung). *Jede von Neumann-Zahl μ ist gleichmächtig zu $[g(\mu)]$.*

Beweis. Setze $A := \{\mu \in \mathbb{N}^* \mid \mu \text{ ist gleichmächtig zu } [g(\mu)]\} \subseteq \mathbb{N}^*$.

Dann ist $\emptyset \in A$, denn es ist $[g(\emptyset)] = [0] = \emptyset$.

Erinnerung: $[m+1] = [m] \cup \{m\}$. Ziel: $\mu \in A \Longrightarrow \mu^+ \in A$.

Sei nun $\mu \in A$. Wir setzen $m := g(\mu)$. Nach Definition von A gibt es eine Bijektion:

$$h : \mu \to [m] \qquad\qquad \text{(bijektiv)}$$

Wir setzen h zu einer Abbildung

$$h^+ : \mu^+ = \mu \cup \{\mu\} \to [m] \cup \{m\} = [m+1]$$

fort durch die Setzung $\mu \mapsto m$. Die Fortsetzung h^+ ist surjektiv und wegen $m \notin [m]$ auch injektiv. Damit ist $\mu^+ \in A$. Also ist A induktiv. **q.e.d.**

Satz und Definition 7.17. *Die Rekursionen*

$$f(0) = \emptyset \qquad\qquad g(\emptyset) = 0$$
$$f(m+1) = f(m)^+ \qquad\qquad g(\mu^+) = g(\mu) + 1$$

definieren zueinander inverse Bijektionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ und $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$.

Jede von Neumann-Zahl μ ist gleichmächtig zu $[g(\mu)]$.

Zu jeder endlichen Menge M gibt genau eine natürliche Zahl $|M| \in \mathbb{N}$, so daß $[|M|]$ und M gleichmächtig sind. Wir nennen $|M|$ die Größe von M.

Eindeutigkeit: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, so daß $[m]$ und $[n]$ gleichmächtig zu M sind. Dann folgt:

$$f(m) \cong [g(f(m))] \cong [m] \cong M \cong [n] \cong [g(f(n))] \cong f(n)$$

Also ist $f(m) = \#M = f(n)$ und $m = n$, weil g injektiv ist.

Existenz: Offenbar tut's $|M| := g(\#M) \in \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Definition 7.19. Elemente der Menge

$$\mathbb{Z} := \{r \in \mathbb{K} \mid \exists m, n \in \mathbb{N} : r = m - n\} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

heißen ganze Zahlen.

Die ganzen Zahlen sind diejenigen, die sich als *Differenzen* natürlicher Zahlen schreiben lassen.

Satz 7.20. *Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation: Summe, Differenz und Produkt zweier ganzer Zahlen sind wieder ganze Zahlen.*

Beweis. Seien a_1 und a_2 ganze Zahlen. Dann gibt es natürliche Zahlen $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_1 = m_1 - n_1 \qquad \text{und} \qquad a_2 = m_2 - n_2$$

Dann ist

$$a_1 + a_2 = (m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) \in \mathbb{Z}$$

denn $m_1 + m_2 \in \mathbb{N}$ und $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$ nach Satz (7.4). Genauso argumentieren wir für die Differenz

$$a_1 - a_2 = (m_1 - n_1) - (m_2 - n_2) = (m_1 + n_2) - (n_1 + m_2) \in \mathbb{Z}$$

Für das Produkt ist

$$a_1 a_2 = (m_1 - n_1)(m_2 - n_2) = (m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + n_1 m_2) \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Ganze Zahlen vergleichen

Proposition 7.21. *Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a \in \mathbb{N}$ oder $-a \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $a = m - n$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Nach Totalität der Kleiner-Gleich-Relation ist $m \leq n$ oder $n \leq m$. Nach Satz (7.8) ist im ersten Fall ist $-a = n - m \in \mathbb{N}$ und im zweiten Fall $a = m - n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.22. Seien a und b *ganze Zahlen*. Zeige:

$$a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b - a \in \mathbb{N}$$

Definition 7.23. Die Elemente der Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \in \mathbb{K} \,\middle|\, \exists a, b \in \mathbb{Z} : q = \frac{a}{b} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

heißen rationale Zahlen oder Brüche. In einer Darstellung

$$q = \frac{a}{b}$$

heißt a der Zähler und b der Nenner.

Bemerkung 7.24. Jede rationale Zahl hat eine Darstellung, in der der Nenner eine natürliche Zahl ist, denn:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

Satz 7.25. *$\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen unter den vier Grundrechenarten. Genauer: sind q und p rationale Zahlen, so sind auch die Summe $q+p$, die Differenz $q-p$ und das Produkt qp wieder rationale Zahlen. Ist überdies $p \neq 0$, so existiert der Quotient $\frac{q}{p}$ und ist wieder eine rationale Zahl.*

$\mathbb{Q}$ erbt alle Rechenregeln und die Ordnugnsrelation von $\mathbb{K}$. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ selbst ein angeordneter Körper.

Beweis. Die Behauptung folgt mit Satz (7.20) aus den leicht zu verifizierenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 b_2 \pm b_1 a_2}{b_1 b_2} \\
\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \\
\frac{a_1}{b_1} \Big/ \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}
\end{aligned}$$

Beobachtung 7.27. *Für zwei rationale Zahlen* $q_1 = \frac{a_1}{b_1}$ *und* $q_2 = \frac{a_2}{b_2}$, *dargestellt mit positiven Nennern* $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, *gilt:*

$$\begin{aligned} q_1 \leq q_2 &\Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \\ &\Longleftrightarrow b_1 b_2 \frac{a_1}{b_1} \leq b_1 b_2 \frac{a_2}{b_2} \\ &\Longleftrightarrow b_2 a_1 \leq b_1 a_2 \\ &\Longleftrightarrow b_1 a_2 - b_2 a_1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

denn $0 < b_1 b_2$. *Damit ist Größenvergleich in* $\mathbb{Q}$ *auf die Grundrechenarten zurückgeführt.* **q.e.d.**

Wichtig. Die Teilmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ hängen nicht von der Anordnung des umgebenden Körper $\mathbb{K}$ ab.

Sogar die auf $\mathbb{Q}$ induzierte Ordnung ist aber durch die Algebra bereits eindeutig bestimmt. Es gibt also nur eine mögliche Anordnung der rationalen Zahlen.

Definition 7.29. Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch, wenn zwischen je zwei verschiedenen Elementen $\alpha < \beta$ eine rationale Zahl liegt, d.h., wenn es ein $q \in \mathbb{Q}_K$ mit $\alpha < q < \beta$ gibt.

Beobachtung 7.31. *In einem archimedisch angeordneten Körper K gilt das archimedische Prinzip:*

> *Zu jedem Element α gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_K$ mit $\alpha \leq m$.*

Kurz: $\mathbb{N}_K$ ist nach oben unbeschränkt.

Beweis. Nur der Fall $0 < \alpha$ muß behandelt werden. Sei $\frac{m}{n} > 0$, mit natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_K$ als Zähler und Nennen, eine rationale Zahl zwischen α und $\alpha + 1$. Dann ist

$$\alpha < \frac{m}{n} < m$$

q.e.d.

Satz 7.33. *Gilt in einem Körper K das archimedische Prinzip, so ist er ein archimedischer Körper. Das betriff nach (7.10) insbesondere ordnungs-vollständige Körper.*

Beweis. Seien $\alpha < \beta$ zwei verschiedene Elemente von K. Haben α und β verschiedenes Vorzeichen, so liegt 0 dazwischen. Wir betrachten den Fall $0 \leq \alpha < \beta$. Der verbleibende Fall $\alpha < \beta \leq 0$ ist symmetrisch.

Nach dem archimedischen Prinzip gibt es $m \in \mathbb{N}_K$ mit $0 < \frac{1}{\beta-\alpha} < m$. Dann folgt

$$0 \leq m\alpha < m\alpha + 1 < m\beta$$

Ebenfalls mit dem archimedischen Prinzip gibt es ein $n \in \mathbb{N}_K$ mit

$$M := \{x \in \mathbb{N}_K \mid x < m\beta\} \subseteq [n]$$

Die Menge M ist also endlich und hat als endliche durch $\leq$ angeordnete Menge ein größtes Element m_+, d.h., $m_+ < m\beta \leq m_+ + 1$. Es folgt, $m\alpha < m_+$. Schließlich ist darum $\alpha < \frac{m_+}{m} < \beta$. **q.e.d.**

Beobachtung 7.30. *Sei K ein archimedischer Körper und $\alpha \in K$ ein beliebiges Element. Dann ist*

$$\sup \{q_l \in \mathbb{Q}_K \mid q_l < \alpha\} = \alpha = \inf \{q_r \in \mathbb{Q}_K \mid \alpha < q_r\}$$

Denn nach Definition ist α eine untere Schranke von $\{q_r \in \mathbb{Q}_K \mid \alpha < q_r\}$. Eine größere kann es aber nicht geben, denn zwischen ihr und α müßte ja noch eine rationale Zahl liegen. **q.e.d.**

Proposition 7.32. *In einem archimedischen Körper läßt sich jedes Element* beliebig genau *durch rationale Elemente approximieren: Sei K ein archimedischer Körper und $\alpha \in K$ beliebig. Dann gibt es zu jedem Körperelement $\varepsilon > 0$ rationale Zahlen $q_l, q_r \in \mathbb{Q}_K$ mit:*

$$q_l < \alpha < q_r < q_l + \varepsilon$$

Beweis. Wir wählen q_l rational mit $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < q_l < \alpha$ und q_r rational mit $\alpha < q_r < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. **q.e.d.**

Bemerkung 7.28. Ausdrücke der Form
$$\frac{-(1+1+1+1+1)}{1+1+1}$$
lassen sich in *jedem* angeordneten Körper interpretieren. Die Bedeutung von Beobachtung (7.27) liegt darin, daß der Größenvergleich für Ausdrücke dieser Form unabhängig davon ist, in welchem angeordneten Körper wir sie ausrechnen. Die Ungleichung
$$\frac{1}{1+1} \leq \frac{1+1}{1+1+1}$$
gilt in *jedem* angeordneten Körper.

Seien K und K' angeordnete Körper. Vermöge (7.17) erhalten wir Bijektionen
$$\mathbb{N}_K \longleftrightarrow \mathbb{N}^* \longleftrightarrow \mathbb{N}_{K'} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathbb{Q}_K \longleftrightarrow \mathbb{Q}_{K'}$$
die mit allen Grundrechenarten verträglich ist. Es gibt genau eine solche Bijektion, und sie automatisch mit der Anordnung verträglich (siehe 7.27). Sie besteht gerade in der Uminterpretation von Ausdrücken.

Die Starrheit der Rationalen Zahlen

Die Diskussion des vorigen Abschnitts, insbesondere (7.27) und (7.28), können wir wiefolgt zusammenfassen:

Satz 8.1. *Seien K und K' zwei angeordnete Körper. Dann gibt es genau einen Körpermorphismus von $\mathbb{Q}_K$ nach K'. Sein Bild ist $\mathbb{Q}_{K'}$ und er ist automatisch anordnungserhaltend.* **q.e.d.**

Korollar 8.2. *Seien K und K' zwei angeordnete Körper. Dann sind die Teilkörper $\mathbb{Q}_K$ und $\mathbb{Q}_{K'}$ auf eindeutige Weise isomorph, und die Isomorphie ist eine Isomorphie angeordneter Körper.* **q.e.d.**

Lemma 8.3. *Seien K und K' angeordnete Körper. Zusätzlich sei K' archimedisch. Dann gibt es* höchstens *einen Morphismus angeordneter Körper $\varphi : K \longrightarrow K'$.*

Beweis. Seien $\varphi : K \to K'$ und $\psi : K \to K'$ zwei Morphismen angeordneter Körper. Wir haben zu zeigen, daß die Abbildungen φ und ψ (werteverlaufs)gleich sind. Sei also ferner $\alpha \in K$ beliebig. Zu zeigen ist nun noch:

$$\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$$

Wäre aber $\varphi(\alpha) < \psi(\alpha)$, so gäbe es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}_K$ mit

$$\varphi(\alpha) < \varphi(q) = \psi(q) < \psi(\alpha)$$

und es folgte der Widerspruch

$$\alpha < q < \alpha$$

Den verbleibenden Fall $\psi(\alpha) < \varphi(\alpha)$ behandelt man analog. **q.e.d.**

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen II

Satz 8.4. *Sei K ein archimedischer und K' ein ordnungsvollständiger Körper. Dann gibt es genau einen Morphismus angeordneter Körper $\varphi : K \longrightarrow K'$.*

Sind insbesondere K und K' beide *ordnungs-vollständig, so sind sie isomorph, und zwar vermöge eines eindeutig bestimmten Isomophismus. Kurz: die reellen Zahlen sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

Beweis (Definition von φ). Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma (8.3).

Weil für jedes $x \in K$ die Menge $\{q \in \mathbb{Q}_K \mid x < q\}$ nach unten beschränkt ist, wird durch

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow K' \\ x &\mapsto \inf M_x \qquad \text{mit } M_x := \{\overline{q} \in \mathbb{Q}_{K'} \mid q \in \mathbb{Q}_K \text{ mit } x < q\} \end{aligned}$$

ist eine Abbildung $\varphi : K \to K'$ erklärt. Der Übergang $q \mapsto \overline{q}$ ist die Uminterpretation rationaler Zahlen von einem umgebenden Körper zum andern (siehe 7.28).

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen III

$$\begin{aligned}\varphi : K &\longrightarrow K' \\ x &\mapsto \inf M_x \qquad \text{mit } M_x := \{\overline{q} \in \mathbb{Q}_{K'} \,|\, q \in \mathbb{Q}_K \text{ mit } x < q\}\end{aligned}$$

Beweis (φ erhält rationale Approximationen). $\varphi(q) = \overline{q}$ für $q \in \mathbb{Q}_K$: Wegen (7.30) ist $\overline{q} = \inf M_q$ für rationales $q \in \mathbb{Q}_K$.

φ erhält die Ordnung:

$$\begin{aligned} x < y \text{ in } K \underset{K\text{: arch.}}{\Longrightarrow} & \exists q, q' <\in \mathbb{Q}_K : x < q < q' < y \\ \Longrightarrow & \varphi(x) \leq \overline{q} < \overline{q'} \leq \varphi(y)\end{aligned}$$

Also für $q_l, x, q_r \in K$ mit *rationalem* q_l und q_r:

$$q_l < x < q_r \quad \Longrightarrow \quad \overline{q_l} = \varphi(q_l) < \varphi(x) < \varphi(q_r) = \overline{q_r}$$

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen IV

$$\varphi : K \longrightarrow K'$$
$$x \mapsto \inf M_x \qquad \text{mit } M_x := \{\overline{q} \in \mathbb{Q}_{K'} \,|\, q \in \mathbb{Q}_K \text{ mit } x < q\}$$

Beweis (φ ist additiv). Das heißt:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten:

$$\varphi(x+y) > \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{oder}$$
$$\varphi(x+y) < \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{oder}$$
$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Um Gleichheit zu zeigen, genügt es also, die beiden Alternativen jeweils zum Widerspruch zu führen.

Wir führen die Annahme $\varphi(x+y) > \varphi(x)+\varphi(y)$ zum Widerspruch. In diesem Fall gibt es nämlich eine rationale Zahl $q \in K$ mit:

$$0 < \overline{q} < \varphi(x+y) - (\varphi(x) + \varphi(y))$$

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen V

$$\varphi : K \longrightarrow K'$$
$$x \mapsto \inf M_x \qquad \text{mit } M_x := \{\overline{q} \in \mathbb{Q}_{K'} \,|\, q \in \mathbb{Q}_K \text{ mit } x < q\}$$

Beweis (φ ist additiv, Fortsetzung). Wähle $q, q_x, q_y \in K$ mit:

$$0 < \overline{q} < \varphi(x+y) - (\varphi(x) + \varphi(y)) \qquad q_x - \frac{q}{2} < x < q_x \qquad q_y - \frac{q}{2} < y < q_y$$

$$q_x + q_y - q < x + y < q_x + q_y$$

Da φ ordnungserhaltend ist, folgt:

$$\overline{q_x} - \frac{\overline{q}}{2} < \varphi(x) < \overline{q_x} \quad \text{und} \quad \overline{q_y} - \frac{\overline{q}}{2} < \varphi(y) < \overline{q_y}$$
$$\Longrightarrow \quad \overline{q_x} + \overline{q_y} - \overline{q} < \varphi(x) + \varphi(y) < \overline{q_x} + \overline{q_y}$$
$$\overline{q_x} + \overline{q_y} - \overline{q} < \varphi(x+y) < \overline{q_x} + \overline{q_y}$$

Das aber widerspricht der Annahme $\varphi(x) + \varphi(y) + \overline{q} < \varphi(x+y)$.

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen VI

$$\varphi : K \longrightarrow K'$$
$$x \mapsto \inf M_x \qquad \text{mit } M_x := \{\overline{q} \in \mathbb{Q}_{K'} \mid q \in \mathbb{Q}_K \text{ mit } x < q\}$$

Beweis (φ ist multiplkativ). Das Argument für die Multiplikativität von φ ist ähnlich, wird aber durch Vorzeichen verkompliziert. Wir zeigen

$$0 < x, y \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

Wieder gibt es drei Möglichkeiten:

$$\varphi(xy) > \varphi(x)\,\varphi(y) \quad \text{oder} \quad \varphi(xy) < \varphi(x)\,\varphi(y) \quad \text{oder} \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

und wir widerlegen hier lediglich $\varphi(xy) > \varphi(x)\,\varphi(y)$. In diesem Fall gäbe es ein $q \in \mathbb{Q}_K$ mit $0 < \overline{q} < \varphi(xy) - \varphi(x)\,\varphi(y)$. Wir wählen ferner eine rationale Zahl $q' > x + y$ und eine rationale Zahl $\varepsilon \in K$ mit:

$$0 < \varepsilon < \frac{q}{2q'}$$
$$0 < \varepsilon < q'$$

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen VII

$\varphi : K \longrightarrow K'$ ordnungserhaltend, additiv, schreibt rationale Zahlen bloß um.

$$0 < \overline{q} < \varphi(xy) - \varphi(x)\,\varphi(y) \qquad\qquad 0 < \varepsilon < \tfrac{q}{2q'}$$
$$x + y < q' \qquad\qquad 0 < \varepsilon < q'$$

Beweis (φ ist multiplkativ, Fortsetzung). Wähle $q_x, q_y \in \mathbb{Q}_K$ mit:

$$0 < q_x < x < q_x + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad 0 < q_y < y < q_y + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \qquad q_x q_y < xy < (q_x + \varepsilon)(q_y + \varepsilon) = q_x q_y + \varepsilon(q_x + q_y) + \varepsilon^2$$
$$< q_x q_y + \varepsilon q' + \varepsilon^2 < q_x q_y + 2\varepsilon q' < q_x q_y + q$$
$$\Longrightarrow \qquad \overline{q_x q_y} < \varphi(xy) < \overline{q_x q_y} + \overline{q}$$

Diese Rechnung erklärt die kryptische Wahl von q' und ε. Nun wenden wir φ an und erhalten mit analoger Rechnung:

$$0 < \overline{q_x} < \varphi(x) < \overline{q_x} + \overline{\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad 0 < \overline{q_y} < \varphi(y) < \overline{q_y} + \overline{\varepsilon}$$
$$\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \qquad \overline{q_x q_y} < \varphi(x)\,\varphi(y) < \overline{q_x q_y} + \overline{q}$$

Und da ist der Widerspruch.

Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen VIII

$\varphi : K \longrightarrow K'$ ordnungserhaltend, additiv, multiplikativ auf positiven Zahlen.

Beweis (φ ist multiplkativ, Schluß).

$$\varphi \text{ ist additiv} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(-x) &= -\varphi(x) \end{cases}$$

Wegen $0x = 0$ folgt dann zunächst Multiplikativität auf nicht-negativen Zahlen:

$$0 \leq x, y \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

Ist nun $x < 0$ und $y \geq 0$, so ist $-x > 0$ und wir haben:

$$\varphi(xy) = -\varphi(-xy) = -\varphi(-x)\,\varphi(y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

Ist schließlich $y < 0$, so rechnen wir analog:

$$\varphi(xy) = -\varphi(x(-y)) = -\varphi(x)\,\varphi(-y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

wobei diese Rechnung mit der Zeile vorher für beliebiges $x \in K$ gültig ist.

q.e.d.

Folgen

Definition 9.1. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge oder Folge reeller Zahlen. Traditionell bezeichnet man den Wert von a an der Stelle m als m-tes Glied der Folge oder auch als Folgenterm. Ferner ist dafür die Notation a_m anstelle von $a(m)$ üblich. Anstelle der Funktionsnotation $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ verwendet man üblicherweise die Familiennotation:

$$(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

Ich probiere hier etwas anderes: Mit der Notation $a_\star$ notiere ich die Folge und mit a_i ihren Wert an der Stelle i.

$a_\star$ Der Stern $\bigstar$ symbolisiert das Argument.
Analog wäre $f(\bigstar)$ für eine normal notierte Funktion.
Wir könnten dann $f(\bigstar) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben.
Hm ... warum eigentlich nicht?

Definition 9.3. Eine Folge $a_\star$ reeller Zahlen heißt nach unten beschränkt, wenn ihr Bild (die Folge ist eine Funktion!) eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Entsprechend heißt die Folge $a_\star$ nach oben beschränkt, wenn ihr Bild nach oben beschränkt ist. Eine Folge, die nach unten und nach oben beschränkt ist, heißt beschränkt.

Die Begriffe Supremum, kleinste obere Schranke, Infimum und größte untere Schranke werden ebenso vom Bild der Folge auf die Folge selbst übertragen.

Definition 9.4. Durch

$$\begin{aligned} |\bigstar| : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wird die Betragsfunktion auf den reellen Zahlen erklärt. Wie die $\bigstar$-Notation andeutet, notieren wir den Betrag von x mit $|x|$.

Definition 9.5. Wir führen folgende Sprechweise ein: Seien r und s reelle Zahlen und sei ε eine reelle Zahl mit $0 < \varepsilon$. Wir sagen r liege in der ε-Umgebung von s, wenn $|r-s| < \varepsilon$ ist. Implizit in dieser Sprechweise steck die Definition der ε-Umgebung als Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathbb{B}_\varepsilon(s) := \{r \in \mathbb{R} \mid |r - s| < \varepsilon\}$$

ist die ε-Umgebung von s.

Definition 9.7. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $a_\star$ reeller Zahlen, wenn in *jeder* (noch so kleinen) ε-Umgebung von λ *unendlich viele* Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda| < \varepsilon\} \text{ ist unendlich}$$

Definition 9.8. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge $a_\star$ reeller Zahlen, wenn in *jeder* (noch so kleinen) ε-Umgebung von λ fast alle (d.h. alle bis auf höchstens endlich viele) Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda| \not< \varepsilon\} \text{ ist endlich}$$

In diesem Fall sagen wir auch, die Folge $a_\star$ konvergiere gegen den Grenzwert λ. Die Bedingung läßt sich auch wiefolgt ausbuchstabieren:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h : \quad |a_i - \lambda| < \varepsilon$$

Eine Folge, die (gegen mindestens einen Grenzwert) konvergiert heißt konvergent. Wir schreiben dafür

$$\lambda = \lim_{i \to \infty} a_i$$

Eine Folge, die gegen keinen Wert konvergiert, heißt divergent. Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen 0 konvergiert.

Bemerkung 9.9. Für eine Folge $a_\star$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda| \not< \varepsilon\} \text{ ist endlich} \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h : \quad |a_i - \lambda| < \varepsilon \tag{2}$$

Beweis. Für festes ε betrachten wir die Menge:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda| \not< \varepsilon\}$$

Als Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist sie endlich *genau dann*, wenn sie beschrän Bedingung (2) sagt nun, daß all diese Mengen (also für jedes $\varepsilon > 0$) beschränkt sind, während Bedingung (1) lediglich ihre Endlichkeit fordert. Das aber ist für Teilmengen von $\mathbb{N}$ eben äquivalent. **q.e.d.**

Bemerkung 9.11. Eine reelle Zahlenfolge $a_\star$ hat *höchstens* einen Grenzwert. Genauer gilt: hat die Folge $a_\star$ einen Grenzwert, so hat sie keine weiteren Häufungspunkte.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist. Dann ist $\varepsilon := \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2} > 0$ und die beiden Mengen

$$A_1 := \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda_1| < \varepsilon\}$$
$$A_2 := \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lambda_2| < \varepsilon\}$$

sind disjunkt. Ist nun λ_1 ein Grenzwert, so enthält A_1 fast alle natürlichen Zahlen, d.h., alle bis auf höchstens endlich viele. Insbesondere ist A_2 eine endliche Menge. Dann aber ist λ_2 kein Häufungspunkt. **q.e.d.**

Aufgabe 9.10. Jeder Grenzwert ist auch Häufungspunkt.

Aufgabe 9.14. Ein eindeutiger Häufungspunkt ist nicht unbeding Grenzwert.

Beobachtung 9.15. *Für $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$x \in \mathbb{B}_\varepsilon(0) \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$$

Sei nun $a_\star$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)\} = \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i| \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)\}$$

Also ist $a_\star$ genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge $|a_\star|$ der Beträge eine Nullfolge ist. **q.e.d.**

Definition 9.17. Sei $a_\star$ eine Folge. Wir betrachten die Mengen

$$L := \{x \in \mathbb{R} \mid \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} \text{ ist endlich}\}$$
$$R := \{x \in \mathbb{R} \mid \{i \in \mathbb{N} \mid x \leq a_i\} \text{ ist endlich}\}$$

Wir nennen L die Linksmenge und R die Rechtsmenge der Folge $a_\star$.

Ist die Linksmenge L nicht-leer und nach oben beschränkt, so nennen wir die kleinste obere Schranke von L den Limes inferior der Folge $a_\star$; und ist die Rechtsmenge R nicht-leer und nach unten beschränkt, so nennen wir die größte untere Schranke von R den Limes superior von $a_\star$.

Wir notieren Limes inferior und Limes superior, falls sie existieren, mit:

$$\liminf_{i \to \infty} a_i := \sup L \qquad \text{bzw.} \qquad \limsup_{i \to \infty} a_i := \inf R$$

Das Gemeinsame in diesen Definitionen

Jede dieser Definitionen variiert das Thema: gegeben eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, enthält die Menge

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in M\}$$

endlich viele, unendliche viele oder sogar fast alle natürlichen Zahlen?

Erinnerung. Teilmengen endlicher Mengen sind endlich.

Obermengen unendlicher Mengen sind unendlich.

Die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist endlich.

$\emptyset$ ist endlich.

$\mathbb{N}$ ist unendlich.

Endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben ein kleinstes und ein größtes Element.

Beobachtung 9.18. *Die Linksmenge L einer Folge $a_\star$ ist nicht-leer genau dann, wenn $a_\star$ nach unten beschränkt ist. Entsprechend ist die Rechtsmenge der Folge nicht-leer genau dann, wenn $a_\star$ nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Wir zeigen nur die Linksversion. Ist $a_\star$ von unten beschränkt durch b_L, so ist jedes $x < b_L$ Element der Linksmenge, denn für solche x ist

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} = \emptyset$$

Und die leere Menge $\emptyset$ ist endlich.

Sei umgekehrt $x \in L$ ein Element der Linksmenge. Dann ist

$$\{a_i \mid a_i \leq x\}$$

eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ und hat also ein kleinstes Element. Dies ist eine untere Schranke der Folge $a_\star$. **q.e.d.**

Beobachtung 9.19. *Seien L und R die Links- bzw. Rechtsmenge der Folge $a_\star$. Dann ist:*

$$L < R$$

Das soll heißen: Ist $x \in L$ und $y \in R$, dann ist $x < y$.

Insbesondere:

1. *L und R sind disjunkt.*
2. *Ist $L \neq \emptyset$, so ist R nach unten beschränkt.*
3. *Ist $R \neq \emptyset$, so ist L nach oben beschränkt.*

Mit (9.18) ergibt sich unmittelbar:

> *Für eine beschränkte Folge existieren sowohl der Limes inferior als auch der Limes superior.*

$L < R$

Beobachtung 9.19. *Seien L und R die Links- bzw. Rechtsmenge der Folge $a_\star$. Dann ist:*

$$L < R$$

Das soll heißen: Ist $x \in L$ und $y \in R$, dann ist $x < y$.

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition:

$$x \not< y \qquad \Longrightarrow \qquad x \notin L \text{ oder } y \notin R$$

Sei also $y \leq x$. Dann ist

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} \cup \{i \in \mathbb{N} \mid y \leq a_i\} = \mathbb{N}$$

Darum ist mindestens eine der beiden Mengen unendlich. Es ist also $x \notin L$ oder $y \notin R$. **q.e.d.**

Beobachtung 9.20. *Seien L und R die Links- bzw. Rechtsmenge der Folge $a_\star$. Seien ferner $x \le y$ reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$y \in L \Longrightarrow x \in L$$
$$x \in R \Longrightarrow y \in R$$

Insbesondere:

1. *Hat L ein Supremum, so enthält L jede Zahl, die kleiner ist als $\sup L$.*
2. *Hat R ein Infimum, so enthält R jede Zahl, die größer ist als $\inf R$.*

Beweis. $x \le y \quad \Longrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \le x\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \le y\}$

Ist nun $y \in L$ so ist die Obermenge endlich und es folgt $x \in L$.

Sei nun $x < \sup L$, dann ist x keine obere Schranke von L und es gibt ein $y \in L$ mit $x \le y$. Wir haben eben gesehen, daß nun $x \in L$ folgt.

Die beiden Aussagen über R argumentiert man symmetrisch. **q.e.d.**

Limes inferior und superior sind Häufungspunkte

Beobachtung 9.21. *Existiert der Limes inferior der Folge $a_\star$, so ist er Häufungspunkt von $a_\star$. Symmetrisch: Existiert der Limes superior der Folge, so ist er einer ihrer Häufungspunkte.*

Beweis. Sei L die Linksmenge von $a_\star$ und $\lambda = \sup L$ der Limes inferior. Wir haben zu zeigen, daß in jeder ε-Umgebung von λ unendlich viele Folgenglieder liegen. Sei also $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgegebene Genauigkeit.

$$\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \notin L \Longrightarrow \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_i \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subseteq \{ i \in \mathbb{N} \mid a_i < \lambda + \varepsilon \} \text{ unendlich}$$
$$\lambda - \varepsilon \in L \Longrightarrow \{ i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq \lambda - \varepsilon \} = \{ i \in \mathbb{N} \mid \lambda - \varepsilon \not< a_i \} \text{ endlich}$$

Also ist

$$\{ i \in \mathbb{N} \mid \lambda - \varepsilon < a_i < \lambda + \varepsilon \} = \{ i \in \mathbb{N} \mid a_i < \lambda + \varepsilon \} \setminus \{ i \in \mathbb{N} \mid \lambda - \varepsilon \not< a_i \}$$

unendlich: In $\mathbb{B}_\varepsilon(\lambda)$ liegen unendlich viele Folgenglieder. **q.e.d.**

Der Limes inferior ist der kleinste Häufungspunkt

Aufgabe 9.22. Sei $a_\star$ eine Folge, deren Limes inferior existiert, was ja heißt, daß die Linksmenge

$$L := \{x \in \mathbb{R} \mid \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} \text{ ist endlich}\}$$

nicht-leer und nach oben beschränkt ist. Zeige, daß kein Häufungspunkt von $a_\star$ kleiner ist als das Supremum $\sup L$. Also: der Limes inferior ist der kleinste Häufungspunkt, sofern er existiert.

Konvergenz via Limes inferior und Limes superior

Satz 9.23. *Eine Folge $a_\star$ konvergiert genau dann, wenn ihre Linksmenge L und ihre Rechtsmenge R beider nicht-leer sind und $\sup L = \inf R$ gilt. Dadurch ist dann auch der Limes von $a_\star$ gegeben.*

Beweis. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\underbrace{\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \notin \mathbb{B}_\varepsilon(\lambda)\}}_{\text{endlich}} = \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq \lambda - \varepsilon\}}_{\text{endlich}} \cup \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda + \varepsilon \leq a_i\}}_{\text{endlich}}$$

endlich $\iff$ endlich und endlich

1. Die Folge $a_\star$ konvergiert gegen λ.

$\iff$ 2. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\lambda - \varepsilon \in L$ und $\lambda + \varepsilon \in R$.

$\iff$ 3. Jede reelle Zahl $x < \lambda$ ist Element von L aber nicht von R und jede reelle Zahl $y > \lambda$ ist Element von R aber nicht von L.

$\iff$ 4. $\sup L = \lambda = \inf R$.

L und R sind disjunkt (sogar $L < R$) nach (9.19).

L ist Anfang und R ist Ende von $\mathbb{R}$ nach (9.20) **q.e.d.**

Korollar 9.24. *Jede beschränkte Folge $a_\star$ hat mindestens einen Häufungspunkt. Hat sie genau einen Häufungspunkt, so ist dieser ihr Grenzwert.*

Beweis. Eine beschränkte Folge hat nach (9.19) Limes inferior und Limes superior. Das sind nach 9.21 Häufungspunkte.

Hat die Folge nur einen Häufungspunkt, so stimmen Limes inferior und superior überein. Nach (9.23) ist die Folge also konvergent gegen den einen Häufungspunkt. **q.e.d.**

Satz und Definition 9.30. *Eine Folge $a_\star$ reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie Cauchy-konvergent ist, d.h. wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i, j \geq h : \quad |a_i - a_j| < \varepsilon$$

$$\text{Für } \varepsilon > 0 \text{ setzte:} \quad H_\varepsilon := \{h \in \mathbb{N} \mid \forall i, j \geq h : |a_i - a_j| < \varepsilon\}$$

Beweis $\Longrightarrow$. Seien L und R die Links- bzw. Rechtsmenge von $a_\star$. Sei $x \in L$ und $y \in R$. Dann gibt es ein h mit

$$x \underset{x \in L}{<} a_i \underset{y \in R}{<} y \qquad \forall i \geq h$$

Dann ist:

$$h \in H_{y-x} \neq \emptyset$$

Ist nun $\sup L = \inf R$, so können wir $y - x$ unter jede vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$ drücken. Also:

Jede konvergente Folge ist Cauchy-konvergent. **q.e.d.**

Cauchy-Konvergenz II

Satz und Definition 9.30. *Eine Folge $a_\star$ reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie* <u>*Cauchy-konvergent*</u> *ist, d.h. wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i, j \geq h : \quad |a_i - a_j| < \varepsilon$$

Für $\varepsilon > 0$ setzte: $\quad H_\varepsilon := \{h \in \mathbb{N} \mid \forall i, j \geq h : |a_i - a_j| < \varepsilon\}$

Beweis $\Longleftarrow$. Aus $h \in H_\varepsilon$ folgt:

$$a_h - \varepsilon < a_i < a_h + \varepsilon \qquad \forall i \geq h$$

Insbesondere ist $a_h - \varepsilon \in L$ und $a_h + \varepsilon \in R$. Ist also $H_\varepsilon \neq \emptyset$, so sind L und R beide nicht-leer und es gilt:

$$\sup L \leq \inf R \leq 2\varepsilon + \sup L$$

Ist $a_\star$ Cauchy-konvergent, so gilt die Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ und es folgt $\sup L = \inf R$ und damit Konvergenz. **q.e.d.**

Monotonie

Definition 9.36. Eine Folge $a_\star$ reeller Zahlen heißt

1. monoton wachsend (steigend), wenn gilt

$$i < j \quad \Longrightarrow a_i \leq a_j \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

2. streng monoton wachsend (steigend), wenn gilt

$$i < j \quad \Longrightarrow a_i < a_j \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

3. monoton fallend, wenn gilt

$$i < j \quad \Longrightarrow a_i \geq a_j \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

4. streng monoton fallend, wenn gilt

$$i < j \quad \Longrightarrow a_i > a_j \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Beobachtung 9.37. *Eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge konvergiert gegen ihr Supremum.*

Analog konvergiert eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge gegen ihr Infimum.

Beweis. Sei $a_\star$ eine nach oben beschränkte Folge und ω sei ihre kleinste obere Schranke.

Ist $y > \omega$, so liegen alle Folgenglieder unterhalb von y. Also ist y Element der Rechtsmenge R.

Ist umgekehrt $x < \omega$, so ist x keine obere Schranke von $a_\star$ und es gibt ein h mit $x < a_h$. Weil $a_\star$ monoton ist, liegen alle weiteren Folgenglieder ebenfalls oberhalb von x und x gehört zur Linksmenge L.

$$\omega < y \Longrightarrow y \in R$$

$$x < \omega \Longrightarrow x \in L$$

Also ist $\sup L = \omega = \inf R$. Somit konvergiert $a_\star$ gegen ω. **q.e.d.**

Beispiel 9.39. *Die Folge*

$$\mathrm{e}_\star : m \mapsto \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Also konvergiert sie. Ihr Grenzwert wird <u>*Eulersche Zahl*</u> *genannt und mit* e *bezeichnet.*

Beweis der Monotnonie. Zunächst ist $\mathrm{e}_0 = 1 < 2 = \mathrm{e}_1$. Für höhere Indizes bilden wir den Quotienten aufeinanderfolgender Glieder. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}_{m+1}}{\mathrm{e}_m} &= \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^{m+1} \Big/ \left(\frac{m+1}{m}\right)^m = \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \frac{m+1}{m} \\ &= \left(\frac{m^2+2m}{m^2+2m+1}\right)^{m+1} \frac{m+1}{m} = \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{m+1} \frac{m+1}{m} \\ &\underset{(7.15)}{\geq} \left(1 - \frac{m+1}{(m+1)^2}\right) \frac{m+1}{m} = \frac{m}{m+1} \frac{m+1}{m} = 1 \end{aligned}$$

$1 + kx \leq (1+x)^k$ für $-1 < x$. **q.e.d.**

Beispiel 9.39. *Die Folge*

$$e_\star : m \mapsto \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist monoton wachsend und nach oben beschränkt durch 4. Also konvergiert sie. Ihr Grenzwert wird Eulersche Zahl genannt und mit e bezeichnet.

Beweis der Beschränktheit. Monotonie $\Longrightarrow$ gerade Indizes $2m$ reichen.

$$0 < \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{m}{2m+1} \underset{(7.15)}{\leq} \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)^m$$

Quadrieren:

$$0 < \frac{1}{4} \leq \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)^{2m}$$

Stürzen ergibt:

$$0 < e_{2m} = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{2m} \leq 4$$

$0 \leq xy \leq y^2$

$\Uparrow$

$0 \leq x \leq y$

$\Downarrow$

$0 \leq x^2 \leq xy$

also:

$0 \leq x^2 \leq y^2$

q.e.d.

Beispiel 9.42. *Die <u>geometrische Folge</u> zur Basis t ist die Folge $t^\star : i \mapsto t^i$. Sie ist eine Nullfolge für $-1 < t < 1$, sie konvergiert für $-1 < t \leq 1$ und sie ist beschränkt für $-1 \leq t \leq 1$.*

Für $t = -1$ hat sie zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und -1. Für $t < -1$ und für $1 < t$ hat sie keine Häufungspunkte und ist unbeschränkt.

Beweis $t \in \{0, 1, -1\}$.

$\underline{t = 0}$: Hier ist die Folge $(1, 0, 0, 0, \ldots)$ <u>ultimativ konstant</u>. Sie konvergiert gegen 0.

$\underline{t = 1}$: Hier ist die Folge $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ <u>konstant</u>. Sie konvergiert gegen 1.

$\underline{t = -1}$: Hier <u>alterniert</u> die Folge $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ zwischen den Werten 1 und -1. Sie ist nach unten und nach oben beschränkt, hat die beiden Häufungspunkte 1 und -1, aber keinen Grenzwert. **q.e.d.**

Die geometrische Folge II

Beispiel 9.42. *Für $-1 < t < 1$ ist $t^\star$ eine Nullfolge.*

Beweis. $t^\star$ Nullfolge $\Longleftrightarrow$ $|t|^\star$ Nullfolge; und $t = 0$ war oben. Also o.B.d.A.:

$\underline{0 < t < 1}$: Einfache Induktion:

$$0 \leq t^{i+1} \leq t^i \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

Wir sehen also, daß $t^\star$ monoton fällt.

Also konvergiert $t^\star$ gegen das Infimum λ der Folge. Da 0 eine untere Schranke ist, gilt $0 \leq \lambda$. Wir behaupten $\lambda = 0$.

$$0 < \lambda \underset{0<1-t}{\Longrightarrow} 0 < \frac{\lambda(1-t)}{t} \Longrightarrow \exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{\lambda(1-t)}{t}$$
$$\Longrightarrow t\varepsilon < \lambda - \lambda t \Longrightarrow t(\lambda + \varepsilon) < \lambda$$

$$t^\star \to \lambda \Longrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : t^i < \lambda + \varepsilon \underset{\cdot t}{\Longrightarrow} t^{i+1} < t(\lambda + \varepsilon) < \lambda \quad ↯$$

Die geometrische Folge III

Beispiel 9.42. *Ist $t < -1$ oder $1 < t$, so ist $t^\star$ unbeschränkt.*

Beweis.

$\underline{1 < t}$: Eine einfache Induktion zeigt, daß die Folge in diesem Fall streng monoton wächst. Ferner ist sie unbeschränkt: Andernfalls konvergierte $t^\star$ gegen die kleinste obere Schranke λ. Diese Annahme läßt sich mit ähnlichen Argumenten wie im Fall $0 \leq t < 1$ zum Widerspruch führen. Siehe Aufgabe (9.43).

$\underline{t < -1}$: Die Folgen $t^\star$ und $|t|^\star$ unterscheiden sich bloß in den Vorzeichen. Also kann $t^\star$ auch nicht konvergieren. **q.e.d.**

Majorisierung

Definition 10.1. Sei M eine Menge und $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige Funktionen auf M. Wir sagen, daß g die Funktion f (überall) majorisiert, wenn $f(x) \leq g(x)$ für *alle* $x \in M$ gilt. Wir schreiben dafür $f \leq g$ oder unter Verwendung der $\bigstar$-Notation $f(\bigstar) \leq g(\bigstar)$.

Wir sagen, daß g die Funktion f (überall) strikt majorisiert, wenn $f(x) < g(x)$ für *alle* $x \in M$ gilt. Wir schreiben dafür $f < g$ oder unter Verwendung der $\bigstar$-Notation $f(\bigstar) < g(\bigstar)$.

Wir sagen, daß g die Funktion f fast (überall) majorisiert, wenn $f(x) \leq g(x)$ für *fast alle* $x \in M$ gilt. Wir schreiben dafür $f \trianglelefteq g$ oder unter Verwendung der $\bigstar$-Notation $f(\bigstar) \trianglelefteq g(\bigstar)$.

Wir sagen, daß g die Funktion f fast (überall) strikt majorisiert, wenn $f(x) < g(x)$ für *fast alle* $x \in M$ gilt. Wir schreiben dafür $f \triangleleft g$ oder unter Verwendung der $\bigstar$-Notation $f(\bigstar) \triangleleft g(\bigstar)$.

Eine überall majorisierende Funktion majorisiert insbesondere fast überall.

Beobachtung 10.2. *Seien $a_\star$ und $b_\star$ zwei Zahlenfolgen mit Linksmengen L_a bzw. L_b und Rechtsmengen R_a bzw. R_b. Dann gilt:*

$$a_\star \trianglelefteq b_\star \qquad \Longrightarrow \qquad L_a \subseteq L_b \quad \textit{und} \quad R_a \supseteq R_b$$

Beweis. Beobachte, daß allgemein gilt:

$$b_i \leq x \qquad \Longrightarrow \qquad a_i \leq x \text{ oder } a_i \not\leq b_i$$

Darum ist:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid b_i \leq x\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} \cup \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \not\leq b_i\} \tag{1}$$

Nun ist nach Definition der Linksmenge:

$$\begin{aligned} x \in L_a \quad &\Longleftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq x\} \text{ ist endlich} \\ &\underset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \{i \in \mathbb{N} \mid b_i \leq x\} \text{ ist endlich} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in L_b \end{aligned}$$

Rechtsmengen behandelt man symmetrisch. **q.e.d.**

Korollar 10.3. *Seien $a_\star$, $b_\star$ und $c_\star$ drei Folgen mit*

$$a_\star \trianglelefteq b_\star \trianglelefteq c_\star$$

Dann gilt:

1. *Ist $a_\star$ nach unten beschränkt so ist $b_\star$ nach unten beschränkt.*
2. *Ist $c_\star$ nach oben beschränkt, so ist $b_\star$ nach oben beschränkt.*
3. *Konvergieren $a_\star$ und $c_\star$ gegen λ, so konvergiert auch $b_\star$ gegen λ.*

Beweis. L_a, R_a, L_b, R_b, L_c, R_c: Links- bzw. Rechtsmenge von $a_\star$, $b_\star$, $c_\star$.

$$(10.2) \quad \Longrightarrow \quad L_a \subseteq L_b \subseteq L_c \text{ und } R_a \supseteq R_b \supseteq R_c$$

$$a_\star \text{ nach u. beschr.} \underset{(9.18)}{\Longleftrightarrow} \emptyset \neq L_a \underset{L_a \subseteq L_b}{\Longrightarrow} \emptyset \neq L_b \underset{(9.18)}{\Longleftrightarrow} b_\star \text{ nach u. beschr.}$$

Das ist (1). Und (2) argumentiert man symmetrisch.

Engführung und Einschnürung II

Korollar 10.3. *Seien $a_\star$, $b_\star$ und $c_\star$ drei Folgen mit*

$$a_\star \trianglelefteq b_\star \trianglelefteq c_\star$$

Dann gilt:

3. Konvergieren $a_\star$ und $c_\star$ gegen λ, so konvergiert auch $b_\star$ gegen λ.

Beweis. L_a, R_a, L_b, R_b, L_c, R_c: Links- bzw. Rechtsmenge von $a_\star$, $b_\star$, $c_\star$.

$$(10.2) \quad \Longrightarrow \quad L_a \subseteq L_b \subseteq L_c \text{ und } R_a \supseteq R_b \supseteq R_c$$

$$a_\star \text{ und } c_\star \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \sup L_a & \leq & \sup L_b & \leq & \sup L_c \\ | \wedge & & | \wedge & & | \wedge \\ \inf R_a & \leq & \inf R_b & \leq & \inf R_c \end{array}$$

Konvergieren $a_\star$ und $c_\star$ gegen denselben Limes, folgt durgängig Gleichheit:

$$\sup L_a = \sup L_b = \sup L_c = \inf R_a = \inf R_b = \inf R_c$$

Insbesondere konvergiert $b_\star$ ebenfalls gegen diesen Limes (9.23). **q.e.d.**

Definition 10.4. Wir nennen zwei Folgen $a_\star$ und $b_\star$ fast gleich oder kofinal, wenn gilt $a_\star \trianglelefteq b_\star$ und $b_\star \trianglelefteq a_\star$. Wir notieren dafür $a_\star \approx b_\star$.

Das bedeutet, daß $a_\star$ und $b_\star$ nur an endlich vielen Stellen voneinander abweichen.

Beobachtung 10.5. *Aus dem Einschnürungssatz (10.3) folgt unmittelbar, daß zwei fast gleiche Folgen entweder beide konvergieren (und dann gegen denselben Limes) oder beide nicht konvergieren.* **q.e.d.**

Aufgabe 10.10. Fast gleiche Folgen haben dieselben Häufungspunkte.

Kofinalität ist eine Äquivalenzrelation

Beobachtung 10.6. *Die Relation $\trianglelefteq$ ist reflexiv: Seien $a_\star$ eine Zahlenfolge, dann ist offensichtlich $a_\star \trianglelefteq a_\star$.* **q.e.d.**

Beobachtung 10.7. *Die Relation $\trianglelefteq$ ist transitiv: Für je drei Zahlenfolgen $a_\star$, $b_\star$ und $c_\star$ gilt:*

$$a_\star \trianglelefteq b_\star \quad \text{und} \quad b_\star \trianglelefteq c_\star \qquad \Longrightarrow \qquad a_\star \trianglelefteq c_\star$$

Beweis. Für reelle Zahlen x, y und z gilt:

$$x \not\leq z \quad \Longrightarrow \quad x \not\leq y \text{ oder } y \not\leq z$$

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \not\leq c_i\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \not\leq b_i\} \cup \{i \in \mathbb{N} \mid b_i \not\leq c_i\}$$

Die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist endlich. **q.e.d.**

Korollar 10.8. *Kofinalität ist eine Äquivalenzrelation, also reflexiv (folgt aus 10.6), transitiv (folgt aus 10.7), und symmetrisch (klar nach Definition 10.4).* **q.e.d.**

Definition 10.11. Seien $a_\star$ und $b_\star$ zwei Folgen. Dann können wir die Folgen *gliedweise* addieren, subtrahieren und multiplizieren. Verschwindet keines der Glieder von $b_\star$, so läßt sich auch der Quotient bilden:

$$\begin{aligned} a_\star + b_\star &: m \mapsto a_m + b_m \\ a_\star - b_\star &: m \mapsto a_m - b_m \\ a_\star b_\star &: m \mapsto a_m b_m \\ \frac{a_\star}{b_\star} &: m \mapsto \frac{a_m}{b_m} \end{aligned}$$

Entsprechend sind für eine reelle Zahl s erklärt:

$$s + a_\star \quad s - a_\star \quad s a_\star \quad \frac{s}{a_\star}$$

Beobachtung 10.12. *Eine Folge $a_\star$ konvergiert gegen λ genau dann, wenn $\lambda - a_\star$ eine Nullfolge ist.* **q.e.d.**

Beobachtung 10.13. *Sind $a_\star \approx a'_\star$ und $b_\star \approx b'_\star$, so folgt*

$$a_\star + b_\star \approx a'_\star + b'_\star \qquad a_\star - b_\star \approx a'_\star - b'_\star \qquad a_\star b_\star \approx a'_\star b'_\star \qquad \frac{a_\star}{b_\star} \approx \frac{a'_\star}{b'_\star}$$

q.e.d.

Bemerkung 10.14. Sind $a_\star$ und $b_\star$ beide beschränkt, so sind auch die Summe $a_\star + b_\star$, die Differenz $a_\star - b_\star$ und das Produkt $a_\star b_\star$ beschränkt.

Aufgabe 10.15. Finde zwei beschränkte Folgen $a_\star$ und $b_\star$ derart, daß $b_i \neq 0$ für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ ist und daß der Quotient $\frac{a_\star}{b_\star}$ keine beschränkte Folge ist.

Proposition 10.16. *Summe, Differenz und Produkt zweier Nullfolgen sind wieder Nullfolgen.*

Beweis. Wir behandel nur das Produkt – das ist am schwierigsten. Seien also $a_\star$ und $b_\star$ Nullfolgen. Da eine Folge genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge ihrer Beträge eine Nullfolge ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $a_\star$ und $b_\star$ nur nicht-negative Terme haben.

Für $0 \leq x, y < \varepsilon < 1$ gilt: $0 \leq xy < \varepsilon^2 < \varepsilon$. Für beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ gilt also:

> Liegen fast alle a_i und fast alle b_i in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$, dann liegen auch fast alle Produkte $a_i b_i$ in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$. **q.e.d.**

$$0 \leq x \leq x' \text{ und } 0 \leq y \leq y' \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq xy \leq x'y'$$

Aufgabe 10.17. Sei $a_\star$ eine Nullfolge und $b_\star$ beschränkt. Zeige, daß das Produkt $a_\star b_\star$ eine Nullfolge ist.

Rechnen mit Grenzwerten I

Proposition 10.18. Konvergiert sowohl $a_\star$ als auch $b_\star$, so konvergieren auch die Summe $a_\star + b_\star$, die Differenz $a_\star - b_\star$ und das Produkt $a_\star b_\star$. Die Grenzwerte sind die Summe, die Differenz, bzw. das Produkt der Grenzwerte:

$$\lim_{\star\to\infty}(a_\star + b_\star) = (\lim_{\star\to\infty} a_\star) + (\lim_{\star\to\infty} b_\star)$$
$$\lim_{\star\to\infty}(a_\star - b_\star) = (\lim_{\star\to\infty} a_\star) - (\lim_{\star\to\infty} b_\star)$$
$$\lim_{\star\to\infty}(a_\star b_\star) = (\lim_{\star\to\infty} a_\star)(\lim_{\star\to\infty} b_\star)$$

Ist $b_\star$ gliedweise ungleich 0 *und ist überdies* $0 \neq \lim_{\star\to\infty} b_\star$, so konvergiert der Quotient $\frac{a_\star}{b_\star}$ und es gilt:

$$\lim_{\star\to\infty} \frac{a_\star}{b_\star} = \frac{\lim_{\star\to\infty} a_\star}{\lim_{\star\to\infty} b_\star}$$

Beweis Summe und Differenz. Es konvergiere $a_\star$ gegen λ_a und $b_\star$ gegen λ_b. Dann sind $\lambda_a - a_\star$ und $\lambda_b - b_\star$ Nullfolgen. Also ist $\lambda_a - a_\star + \lambda_b - b_\star = \lambda_a + \lambda_b - (a_\star + b_\star)$ eine Nullfolge. Darum konvergiert $a_\star + b_\star$ gegen $\lambda_a + \lambda_b$. Das Argument für $a_\star - b_\star$ ist entsprechend.

Rechnen mit Grenzwerten II

Proposition 10.18. Konvergiert sowohl $a_\star$ als auch $b_\star$, so konvergieren auch die Summe $a_\star + b_\star$, die Differenz $a_\star - b_\star$ und das Produkt $a_\star b_\star$. Die Grenzwerte sind die Summe, die Differenz, bzw. das Produkt der Grenzwerte:

$$\lim_{\star\to\infty}(a_\star b_\star) = (\lim_{\star\to\infty} a_\star)(\lim_{\star\to\infty} b_\star)$$

Ist $b_\star$ gliedweise ungleich 0 *und ist überdies* $0 \neq \lim_{\star\to\infty} b_\star$, so konvergiert der Quotient $\frac{a_\star}{b_\star}$ und es gilt:

$$\lim_{\star\to\infty}\frac{a_\star}{b_\star} = \frac{\lim_{\star\to\infty} a_\star}{\lim_{\star\to\infty} b_\star}$$

Beweis Produkt. Für das Produkt haben wir die Nullfolge

$$(\lambda_a - a_\star)(\lambda_b - b_\star) = \lambda_a\lambda_b - (\lambda_a - a_\star)b_\star - a_\star(\lambda_b - b_\star) - a_\star b_\star$$

Da konvergente Folgen beschränkt sind, sind $(\lambda_a - a_\star)b_\star$ und $a_\star(\lambda_b - b_\star)$ Nullfolgen wegen (10.17). Es folgt, daß $\lambda_a\lambda_b - a_\star b_\star$ eine Nullfolge ist. Daher konvergiert $a_\star b_\star$ gegen $\lambda_a\lambda_b$.

Proposition 10.18. Konvergiert sowohl $a_\star$ als auch $b_\star$, und ist $b_\star$ gliedweise ungleich 0 *und ist überdies* $0 \neq \lim_{\star\to\infty} b_\star$, so konvergiert der Quotient $\frac{a_\star}{b_\star}$ und es gilt:

$$\lim_{\star\to\infty} \frac{a_\star}{b_\star} = \frac{\lim_{\star\to\infty} a_\star}{\lim_{\star\to\infty} b_\star}$$

Beweis Kehrwert ($\Longrightarrow$ Quotient). Da $b_\star$ konvergiert, hat $b_\star$ außer dem Limes λ_b keine weiteren Häufungspunkte (9.11). Also ist 0 kein Häufungspunkt von $b_\star$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß nur endlich viele Folgenglieder in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ liegen. Da kein Folgenglied verschwindet, können wir ε soweit verkleinern, daß *kein* Folgenglied in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ liegt. Dann liegen aber alle Glieder der Folge $\frac{1}{b_\star}$ in $\mathbb{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$. Das heißt:

$$\frac{1}{b_\star} \text{ ist beschränkt.}$$

Dann aber ist

$$\frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{b_\star} = -\frac{1}{\lambda_b b_\star}(\lambda_b - b_\star)$$

beschränkt (Nullfolge mal beschränkte Folge). **q.e.d.**

Definition 9.31. Seien $a_\star$ und $b_\star$ zwei Folgen. Wir nennen $a_\star$ und $b_\star$ Cauchy-kokonvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex $h \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für Indizes $i, j \geq h$ stets $|a_i - b_j| < \varepsilon$ gilt. Wir notieren dafür:

$$a_\star \doteq b_\star$$

Aufgaben 9.33 und 9.35. *Zwei Folgen Cauchy-kokonvergierern genau dann, wenn beide konvergieren, und zwar gegen denselben Limes.*

Aufgabe 10.19. *Die Aussage (10.18) läßt eine alternative Formulierung zu: Seien $a_\star$, $a'_\star$, $b_\star$ und $b'_\star$ Folgen. Ferner sei $a_\star \doteq a'_\star$ und $b_\star \doteq b'_\star$. Dann gilt auch*

$$a_\star + b_\star \doteq a'_\star + b'_\star \qquad a_\star - b_\star \doteq a'_\star - b'_\star \qquad a_\star b_\star \doteq a'_\star b'_\star$$

Kokonvergieren $b_\star$ und $b'_\star$ gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert, so ist überdies

$$\frac{a_\star}{b_\star} \doteq \frac{a'_\star}{b'_\star}$$

Definition 10.20. Sei $a_\star$ eine Folge reeller Zahlen und $b_\star$ eine Folge *natürlicher* Zahlen. Dann können wir die Glieder der Folge $b_\star$ als Indizes in die Folge $a_\star$ benutzen und die Folge $a_{b_\star}$ bilden. Als Abbildung ist diese Folge einfach die Verkettung:

$$i \mapsto b_i \mapsto a_{b_i}$$

Wir nennen Folgen, die sich so schreiben lassen, Teilfolgen der Folge $a_\star$, *sofern $b_\star$ streng monoton wächst*. Durch diese Forderung wird ausgeschlossen, daß in der Teilfolge ein Glied a_i mehrfach vorkommt: Eine streng monotone Folge ist insbesondere eine injektive Abbildung.

Beobachtung 10.21. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $a_\star$ mit Bild in M.*

Beweis. Das offensichtliche Argument geht so: Da M unbeschränkt (insbesondere nicht-leer) ist, gibt es ein Element $m_0 \in M$. Nun gibt es ein Element $m_1 > m_0$, nun gibt es ein Element $m_2 > m_1$, nun gibt es ein Element $m_3 > m_2$, etc.

Hm ...

Beobachtung 10.21. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $a_\star$ mit Bild in M.*

Beweis (jetzt richtig). Wir betrachten den Relationsgraphen

$$R := \{(x, y) \in M \times M \mid x < y\}$$

$$M \text{ unbeschränkt} \implies \forall x \in M\, \exists y \in M : (x, y) \in R$$

$$\text{Auswahlaxiom (3.31)} \implies \exists F : M \longrightarrow M \text{ mit } F(x) > x$$

Diese Funktion F formalisiert den Teil „gegeben $m_i \in M$, dann wählen wir $m_{i+1} > m_i$“ des intuitiven Arguments.

Mit der „Wählfunktion“ F können wir die Folge $a_\star$ rekursiv definieren durch

$$a_0 \in M \quad \text{beliebig}$$

$$a_{i+1} = F(a_i) > a_i$$

Es ist also klar, daß $a_\star$ streng monoton wächst. **q.e.d.**

Die Teilfolge zu einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$

Beobachtung 10.22. *Eine streng monoton wachsende Folge ist durch ihr Bild eindeutig bestimmt. Anders herum: Sind $a_\star$ und $b_\star$ zwei streng monoton wachsende* verschiedene *Folgen, dann unterscheiden sich ihre Bildmengen.*

Beweis. Aus $a_\star \neq b_\star$ folgt die Existenz eines *kleinsten* $i \in \mathbb{N}$ mit $a_i \neq b_i$. Wir nehmen $a_i < b_i$ an (nötigenfalls vertauschen wir die Rollen von $a_\star$ und $b_\star$). Dann kommt die Zahl a_i nicht unter den Gliedern der Folge $b_\star$ vor. Für $j < i$ ist nämlich $b_j = a_j < a_i$ und für $j \geq i$ ist $b_j \geq b_i > a_i$. **q.e.d.**

Proposition 10.23. *Zu jeder unendlichen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es genau eine streng monoton wachsende Folge $m_\star$ mit Bild M.*

Beweis. Wichtig ist hier, daß $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist. Darum hat die nicht-leere Teilmenge M ein kleinstes Element m_0. Da M unendlich ist, ist aber auch $\{x \in M \mid m_0 < x\}$ nicht-leer und hat ein kleinstes Element $m_1 > m_0$. Dann ist $\{x \in M \mid m_1 < x\}$ nicht-leer und hat ein kleinstes Element $m_2 > m_1$. Das geht so weiter, und jedes Element von M erwischen wir irgendwann.

Hm ...

Proposition 10.23. *Zu jeder unendlichen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es genau eine streng monoton wachsende Folge $m_\star$ mit Bild M.*

Beweis. Formal geht das mit Rekursion:

$$\begin{aligned} F : M &\longrightarrow M \\ m &\mapsto \min\{x \in M \mid m < x\} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} m_0 &= \min M \\ m_{i+1} &= F(m_i) > m_i \end{aligned}$$

Monotonie ist klar, und Eindeutigkeit haben wir in (10.22) gesehen.

$$\text{Rekursion} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Bild}(f) \subseteq M$$

Sei $y \in M$ minimal mit $y \notin \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist zunächst $y > m_0 = \min M$. Sei ferner $i \in \mathbb{N}$ minimal mit $y < f(i)$. Dann ist also $0 < i$ und $f(i-1) < y$ (Gleichheit kann nicht angehen, weil y ja nicht im Bild von f liegt). Dann aber wäre

$$f(i) = \min\{x \in M \mid f(i-1) < x\} \leq y \qquad \lightning \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Monotone Teilfolgen

Lemma 10.24. *Jede Folge hat eine monoton wachsende oder eine streng monoton fallende Teilfolge.*

Beweis. Sei $a_\star$ eine Folge. Wir betrachten die Menge

$$M := \{i \in \mathbb{N} \,|\, \forall j > i : a_j < a_i\} \subseteq \mathbb{N}$$

und unterscheiden die beiden Fälle

$\underline{M \text{ ist unbeschränkt}}$: In diesem Fall sei $b_\star$ eine streng monoton wachsende Folge in M wie in (10.21) angegeben. Die Teilfolge $a_{b_\star}$ ist dann streng monoton fallend.

$\underline{M \text{ ist beschränkt}}$: Sei $m \in \mathbb{N}$ eine Schranke. Das heißt:

$$i > m \quad \Longrightarrow \quad i \notin M \quad \Longrightarrow \quad \exists j > i : a_i \leq a_j$$

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow & m < \ i_0 \ < \ i_1 \ < \ i_2 \ < \ i_3 \ < \cdots \\ \rightsquigarrow & \qquad a_{i_0} \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \cdots \end{array}$$

und dann ist die Folge $a_{i_\star}$ monoton wachsend. **q.e.d.**(hm...)

Nochmal Bolzano-Weierstraß

Aufgabe 10.26. Sei $a_\star$ eine Zahlenfolge. Zeige, daß $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt von $a_\star$ ist, wenn $a_\star$ eine Teilfolge hat, die gegen λ konvergiert.

Bemerkung 10.27. Daraus ergibt sich ein zweiter Beweis für Bolzano-Weierstraß: eine beschränkte Folge hat eine monotone Teilfolge, die ist immer noch beschränkt und konvergiert darum. Dieser Grenzwert der Teilfolge ist dann Häufungspunkt der ursprünglichen Folge.

Indexverschiebung

Definition 10.28. Sei $a_\star$ eine Zahlenfolge und $m \in \mathbb{Z}$. Wir definieren die Folgen $a_{\star+m}$ und $a_{m-\star}$ wiefolgt:

$$a_{\star+m} : i \mapsto \begin{cases} a_{i+m} & i+m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$a_{m-\star} : i \mapsto \begin{cases} a_{m-i} & m-i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nennen eine Folge der Form $a_{\star+m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ einen Rest oder ein Ende der Folge $a_\star$.

Wir nennen die Folge $a_\star$ ultimativ blah, wenn sie einen Rest hat, der blah ist. Z.B. ist $a_\star$ ultimativ monoton wachsend, wenn ab einem Schwellindex $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_i \leq a_{i+1} \qquad \forall i \geq m$$

Beobachtung 10.29. *Ist eine Folge blah, so ist sie ultimativ blah.* **q.e.d.**

Beobachtung 10.30. *Sei $a_\star$ eine Zahlenfolge, $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:*

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in M\} \setminus \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in M \text{ und } i \geq m\} \subseteq [m] \text{ endlich}$$

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in M\} \text{ ist endlich} \quad \Longleftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \mid a_{i+m} \in M\} \text{ ist endlich}$$

Diese Äquivalenz läßt sich für verschiedene Teilmengen M ausbuchstabieren:

1. *Eine Folge und jeder ihrer Reste haben diegleichen Links- und Rechtsmengen. ($M = (-\infty, x]$ oder $M = [x, \infty)$)*

2. *Ist ein Ende der Folge $a_\star$ nach unten (oben) beschränkt, so ist $a_\star$ nach unten (oben) beschränkt, allerding möglicherweise mit einer anderen Schranke. (Folgt aus 1.)*

3. *Eine Folge $a_\star$ hat dieselben Häufungspunkte wie jeder ihrer Reste. Der Rest $a_{\star+m}$ konvergiert genau dann, wenn $a_\star$ konvergiert. In diesem Fall bleibt der Limes gleich. ($M = \mathbb{B}_\varepsilon(\lambda)$)* **q.e.d.**

Folge und Folgenreste II

Korollar 10.31. *Eine ultimativ nach unten beschränkte und ultimativ monoton fallende Folge konvergiert.* **q.e.d.**

Korollar 10.32. *Sei $a_\star$ eine Folge. Gibt es $0 < t < 1$ so daß*

$$|a_{i+1}| \leq t\,|a_i| \qquad \text{für alle } i \geq m$$

gilt, so wird der Folgenrest $|a_{\star+m}|$ majorisiert von dem Vielfachen $|a_m|\,t^\star$ einer geometrischen Folge. Also ist ist $a_\star$ eine Nullfolge. **q.e.d.**

Aufgabe 10.33. Die Fakultät $m!$ einer natürlichen Zahl ist rekursiv definiert durch

$$0! = 1$$
$$m + 1! = (m + 1)m!$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeige, daß die Folge $\frac{x^\star}{\star!}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 10.34. Sei $0 \leq x < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigstar^k x^\star : m \mapsto m^k x^m$ eine Nullfolge.

Die Folge der Differenzen

Definition 10.35. Die Folge $\Delta a_\star$ ist definiert durch

$$\Delta a_i := a_{i+1} - a_i$$

Wir haben also:

$$\Delta a_\star = a_{\star+1} - a_\star$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_\star & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots \\
\Delta a_\star & & a_1 - a_0 & & a_2 - a_1 & & a_3 - a_2 & & a_4 - a_3 & & & \cdots
\end{array}$$

Beobachtung 10.36. *Konvergiert $a_\star$, so ist $\Delta a_\star$ eine Nullfolge. (Folgt aus Cauchy-Konvergenz)* **q.e.d.**

Definition 10.37. Sei $a_\star$ eine Zahlenfolge. Wir definieren rekursiv die Folge $\Sigma a_\star$ wiefolgt:

$$\begin{aligned}\Sigma a_0 &= a_0\\ \Sigma a_{i+1} &= (\Sigma a_i) + a_{i+1}\end{aligned}$$

Mit der Summennotation können wir das auch auf folgende Weisen schreiben:

$$\Sigma a_m = \sum_{i=0}^{m} a_i = \sum_{i \leq m} a_i$$

Wir nennen die Terme von $\Sigma a_\star$ Partialsummen der Folge $a_\star$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_\star & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \cdots\\
\Sigma a_\star & a_0 & & a_0 + a_1 & & a_0 + a_1 + a_2 & & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & & \cdots\\
\Delta\Sigma a_\star & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots
\end{array}$$

Beobachtung 10.38. *Für eine Folge $a_\star$ ist $a_{\star+1} = \Delta\Sigma a_\star$. Konvergiert $\Sigma a_\star$, dann ist $a_\star$ eine Nullfolge (10.36).*

Definition 10.39. Seien $a_\star$ und $b_\star$ zwei Folgen.

$$(a_\star * b_\star)_m := \Sigma(a_\star b_{m-\star})_m$$ Faltungsprodukt

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
b_5 & a_0b_5 & a_1b_5 & a_2b_5 & a_3b_5 & a_4b_5 & a_5b_5 & \cdots \\
b_4 & a_0b_4 & a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 & a_5b_4 & \cdots \\
b_3 & a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 & a_5b_3 & \cdots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 & a_5b_2 & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 & a_5b_1 & \cdots \\
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & a_4b_0 & a_5b_0 & \cdots \\
\hline
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots
\end{array}$$

Summennotation:

$$(a_\star * b_\star)_m = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}$$

$$= \sum_{i+j=m} a_i b_j$$

$$(a_\star * b_\star)_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0$$

$$\Sigma a_\star = a_\star * 1^\star \qquad (a_\star * 1^\star)_4 = a_0 1^4 + a_1 1^3 + a_2 1^2 + a_3 1^1 + a_4 1^0 = \Sigma a_4$$

Geometrische Folgen Falten

Beispiel 10.42. *Seien $s \neq t$. Wir falten die geometrischen Folgen $s^\star$ und $t^\star$. Aus*

$$
\begin{aligned}
(t-s)\sum_{i=0}^{m} s^i t^{m-i} &= \sum_{i=0}^{m} s^i t^{m+1-i} - \sum_{i=0}^{m} s^{i+1} t^{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} s^i t^{m+1-i} - \sum_{i=1}^{m+1} s^i t^{m+1-i} \\
&= t^{m+1} - s^{m+1}
\end{aligned}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
s^\star * t^\star &= \frac{1}{t-s}(t^{\star+1} - s^{\star+1}) = \frac{1}{s-t}(s^{\star+1} - t^{\star+1}) \\
&= \frac{s}{s-t}s^\star - \frac{t}{s-t}t^\star
\end{aligned}
$$

Bemerkung. $s^\star * s^\star = (1, 2s, 3s^2, 4s^3, \ldots)$

Nochmal, diesmal mit Nummer 10.41. $\Sigma a_\star = a_\star * (1,1,1,\ldots) = a_\star * 1^\star$

Definition 11.1. Ist eine Folge gegeben in der Form $\Sigma a_\star$, so bezeichnen wir sie als Reihe. Konvergiert $\Sigma a_\star$, so schreiben wir

$$\sum_\star a_\star := \sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{\star\to\infty} \Sigma a_\star = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{j} a_i$$

Den Grenzwert einer konvergenten Reihe nennen wir auch ihre Summe.

Bemerkung. Wir unterscheiden in der Notation zwischen der Folge $\Sigma a_\star$ der Partialsummen und ihrem Limes $\sum_\star a_\star$, so er existiert.

Die Notation $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ wird uneinheitlich und teilweise sogar mehrdeutig verwendet. Sie kann beides bedeuten.

Beispiel 11.2. *Die harmonische Reihe*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

divergiert, denn sie majorisiert die offensichtlich divergente Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Hier ist es von Vorteil, die Indizierung bei 1 anzufangen. In der *Summe* können wir das.

In der ★-Notation können wir die Folge der Partialsummen schreiben als $\Sigma \frac{1}{\star+1}$. Hier *muß* die Indizierung bei 0 anfangen, weil Folgen als Abbildungen immer auf ganz $\mathbb{N}$ definiert sind.

Beispiel 11.4. *Die geometrische Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} t^i$ *zur Basis* $t \in \mathbb{R}$ *ist gegeben durch*

$$\Sigma t^\star : j \mapsto \sum_{i=0}^{j} t^i = 1 + t + t^2 + \cdots + t^j$$

Für $-1 < t < 1$ *konvergiert* $\Sigma t^\star$ *und es gilt:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$$

Beweis. Mit (10.42) und (10.41) ist:

$$\Sigma t^\star = t^\star * 1^\star = \frac{1}{1-t} 1^\star - \frac{t}{1-t} t^\star \quad \underset{\star \to \infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{1-t} \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Archimedes hat gezeigt, daß die geometrische Reihe zur Basis $\frac{1}{4}$ konvergiert und zwar gegen den Grenzwert $\frac{4}{3}$.

Absolute Konvergenz und Summierbarkeit

Definition 11.5. Sei $a_\star$ eine Folge. Die Reihe $\Sigma a_\star$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\Sigma\,|a_\star|$ konvergiert.

Eine Reihe heißt bedingt konvergent, wenn sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Beobachtung und Definition 11.6. *Die Reihe $\Sigma a_\star$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge $a_\star$ summierbar ist, d.h., wenn die Menge*

$$\left\{ \sum_{i\in I} |a_i| \;\middle|\; I \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}$$

beschränkt ist.

Beobachtung 11.7. *Sei $\Sigma a_\star$ absolut konvergent. Dann ist die Folge der Reihenreste $m \mapsto \sum_\star |a_{\star+m}| = \sum_{i=m}^\infty |a_{\star+m}|$ eine Nullfolge wegen:*

$$\sum\nolimits_\star |a_{\star+m}| = (\lim_{m\to\infty} \sum_{i<m} |a_i|) - \sum_{i<m} |a_i| \xrightarrow[m\to\infty]{} (\lim_{m\to\infty} \sum_{i<m} |a_i|) - (\lim_{m\to\infty} \sum_{i<m} |a_i|)$$

Definition 11.8. Sei $a_\star$ eine Folge und $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *bijektive* Abbildung. Dann nennen wir die Verkettung $a_{\pi(\star)}$ eine Umordnung der Folge $a_\star$.

Die zu einer Umordnung gehörige Reihe bezeichnen wir mit $\Sigma(a_{\pi(\star)})$. Die Klammerung deutet an, das wir erst die Folge umordnen und dann zu Partialsummen übergehen. Wir betrachten also

$$a_{\pi(0)} + a_{\pi(1)} + \cdots + a_{\pi(i)} \qquad i + 1 \text{ Summanden}$$

und nicht

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{\pi(i)} \qquad \pi(i) + 1 \text{ Summanden}$$

Der Umordnungssatz I

Satz 11.9. *Ist eine Reihe $\Sigma a_\star$ absolut konvergent, dann konvergieren alle Umordnungen $\Sigma(a_{\pi(\star)})$, und überdies alle gegen denselben Limes.*

Insbesondere konvergiert jede absolut konvergente Reihe.

Beweis. Wir betrachten die Folgen $s_m := \sum_{i=0}^{m} a_i$ und $s_n^\pi := \sum_{j=0}^{n} a_{\pi(j)}$ von Partialsummen. Nach (9.33) reicht es zu zeigen, daß $s_\star$ und $s_\star^\pi$ Cauchy-kokonvergent (9.31) sind. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $h \in \mathbb{N}$ mit:

$$\varepsilon > |s_m - s_n^\pi| = \left| \sum_{i=0}^{m} a_i - \sum_{j=0}^{n} a_{\pi(j)} \right| \qquad \forall m, n \geq h$$

$$\Sigma a_\star \text{ absolut konvergent} \quad \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \quad \Sigma\, |a_\star| \text{ Cauchy-konvergent}$$

Zunächst gibt es also $h' \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=0}^{j} |a_k| - \sum_{k=0}^{i} |a_k| = \sum_{k=i+1}^{j} |a_k| \qquad \forall j \geq i \geq h'$$

Satz 11.9. $\Sigma a_\star \doteq \Sigma(a_{\pi(\star)})$, *falls* $\Sigma a_\star$ *absolut konvergiert.*

Beweis (Fortsetzung). Durch Weglassen nicht-negativer Summanden kann eine Summe nicht wachsen. Also ist

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=i+1}^{\max M} |a_k| \geq \sum_{m\in M} |a_m| \quad \forall M \subset \mathbb{N} \text{ endlich und } \geq h'$$

Nun wählen wir $h \geq h'$ so, daß

$$\{0, 1, \ldots, h'\} \subseteq \{\pi(0)\,, \pi(1)\,, \ldots, \pi(h)\}$$

ist. Für $m, n \geq h$ kommen dann die Summanden $a_0, a_1, \ldots, a_{h'}$ sowohl in $\sum_{i=0}^{m} a_i$ als auch in $\sum_{j=0}^{n} a_{\pi(j)}$ vor. Wir können sie in beiden Summen abziehen und erhalten für zwei endliche Menge $I, J \geq h'$:

$$|s_m - s_n^\pi| = \left|\sum_{i=0}^{m} a_i - \sum_{j=0}^{n} a_{\pi(j)}\right| = \left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{j\in J} a_j\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i| + \sum_{j\in J} |a_j| < \varepsilon$$

Also sind $s_\star$ und $s_\star^\pi$ Cauchy-kokonvergent. **q.e.d.**

Der große Umordnungssatz

Aufgabe 11.12. Wenn eine Reihe nicht absolut konvergiert, so hat sie eine divergente Umordnung.

Aufgabe 11.13. Sei $\Sigma a_\star$ eine bedingt konvergente Reihe und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es eine Umordnung $\Sigma(a_{\pi(\star)})$, die die Summe λ hat.

Definition 11.14. Man nennt eine Reihe $\Sigma a_\star$ <u>unbedingt konvergent</u>, wenn jede Umordnung $\Sigma(a_{\pi(\star)})$ konvergiert.

Satz 11.15. *Eine Reihe konvergiert genau dann absolut, wenn sie unbedingt konvergiert. In diesem Fall konvergieren alle Umordnungen absolut und unbedingt gegen dieselbe Summe. Eine bedingt konvergente Reihe kann so umgeordnet werden, daß die Umordnung eine beliebig vorgegebene Summe annimmt.*

Satz 11.18. *Seien $a_\star$ und $b_\star$ Folgen nicht-negativer Zahlen derart, daß $b_\star$ einen Folgenrest $a_{\star+m}$ fast überall majorisiert:*

$$a_{\star+m} \trianglelefteq b_\star$$

Wenn die Reihe $\Sigma b_\star$ konvergiert, dann konvergiert auch $\Sigma a_\star$.

Beweis. Zunächst beseitigen wir das „fast“. Es gibt nämlich ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $a_{\star+m+n} \leq b_{\star+n}$. Nun sind die alle Folgenglieder nicht-negativ. Die Partialsummen wachsen also monoton und es geht um die Frage ihrer Beschränktheit. Die Partialsummen von $a_\star$ lassen sich beschränken durch die Partialsummen von $b_\star$ vermöge:

$$\Sigma a_\star \leq \left(\sum_{i=0}^{m+n} a_i \right) + \Sigma b_{\star+n}$$

$\Sigma a_\star$ ist also monoton und beschränkt also konvergent. **q.e.d.**

Beispiel 11.19. *Sei $a_\star$ eine beschränkte Folge und $0 \leq t < 1$. Dann konvergiert $\Sigma a_\star t^\star$ absolut. Ist nämlich $|a_\star| \leq \beta$, so wird $|a_\star t^\star|$ durch $\beta t^\star$ majorisiert.* **q.e.d.**

Beispiel 11.21. *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen absolut:*

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$ *Exponentialfunktion/-reihe*

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$ *Sinusfunktion/-reihe*

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$ *Cosinusfunktion/-reihe*

Wende (11.19) auf $\frac{x^m}{m!} = \frac{(2x)^m}{m!}(\frac{1}{2})^m$ an, denn $\frac{(2x)^m}{m!}$ ist beschränkt (10.33). **q.e.d.**

Potenzreihen und ihr Konvergenzradius I

Satz und Definition 11.22. *Sei* $\Sigma a_\star x^\star$ *eine* *Potenzreihe*. *Dann gibt es genau ein nicht-negatives* $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Ist* $|x| < R$, *dann konvergiert* $\Sigma a_\star x^\star$ *absolut.*
2. *Ist* $|x| > R$, *dann divergiert* $\Sigma a_\star x^\star$.

Wir nennen R *den* *Konvergenzradius* *der Potenzreihe* $\Sigma a_\star x^\star$. *Er ist gegeben als das Supremum der Menge*

$$M := \left\{ s \in \mathbb{R}^{>0} \,\middle|\, a_\star s^\star \text{ beschränkt} \right\}$$

sofern sie beschränkt ist. Ist M *unbeschränkt, so gilt* $R = \infty$.

Bemerkung: der formal erlaubte Wert $R = \infty$ *bedeutet einfach, daß* $x < \infty$ *stets und* $x > \infty$ *niemals erfüllt ist.*

Bemerkung. Der Konvergenzradius kann 0 sein. (Aufgabe 11.28)

Potenzreihen und ihr Konvergenzradius II

$$M := \left\{ s \in \mathbb{R}^{>0} \,\middle|\, a_\star s^\star \text{ beschränkt} \right\}$$

Beweis. Ist $0 \leq x < y \in M$, dann ist mit $t := \frac{x}{y} < 1$:

$$a_\star x^\star = (a_\star y^\star) t^\star$$

ein Produkt aus einer beschränkten und einer geometrischen Folge. Nach (11.19) konvergiert $\Sigma a_\star x^\star$ also absolut. Daraus folgt die erste Behauptung.

Außerdem folgt $x \in M$.

Ist umgekehrt $0 < y \notin M$ und $y \leq z$ dann ist also $z \notin M$ und $a_\star z^\star$ nicht beschränkt und die Reihe $\Sigma a_\star z^\star$ divergiert. Daraus folgt die zweite Behauptung.

Eine Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Beobachtung. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *läßt sich bijektiv auf* $\mathbb{N}$ *abbilden (abzählen).*

Es gibt viele Aufzählungen. Diese zwei werden noch wichtig:

27							
20	26						
14	19	25					
9	13	18	24				
5	8	12	17	23			
2	4	7	11	16	22		
0	1	3	6	10	15	21	

48	47	46	45	44	43	42	
35	34	33	32	31	30	41	
24	23	22	21	20	29	40	
15	14	13	12	19	28	39	
8	7	6	11	18	27	38	
3	2	5	10	17	26	37	
0	1	4	9	16	25	36	

Die erste sollte an die Faltung erinnern.

Je zwei Aufzählungen unterscheiden sich durch Umordnung vermittels einer Bijketion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Doppelfolgen und Doppelreihen

Definition 11.30. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Doppelfolge. Der entsprechende Summenausdruck $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ heißt Doppelreihe.

Frage. *Was wäre ein guter Wert für die Doppelsumme:* $\sum_i \sum_j a_{ij}$
Idee: nutze eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *und setze*

$$\sum_i \sum_j a_{ij} := \sum_\star a_{f(\star)}$$

Dumm nur, daß der Wert der Summe kann von der Aufzählung f *abhängen kann: Ist die Reihe bedingt konvergent, können wir durch eine geeignete Aufzählung* jeden *Wert erzielen.*

Definition 11.30. Die Doppelfolge $a_{\star\bullet}$ heißt summierbar, wenn:

$$\left\{ \sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}| \;\middle|\; M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ endlich} \right\} \quad \text{ist beschränkt}$$

Äquivalent: $\Sigma(a_{f(\star)})$ konvergiert absolut / unbedingt.

Der Doppelreihensatz I

Satz 11.32. *Sei $a_{\star\bullet}$ eine summierbare Doppelfolge. Dann gilt:*

1. *Für* jede *Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\Sigma(a_{f(\star)})$ absolut gegen einen von f unabhängigen Wert λ.*
2. *Die Zeilen $a_{i\bullet}$ und Spalten $a_{\star j}$ haben absolut konvergente Reihen $\Sigma a_{i\bullet}$ und $\Sigma a_{\star j}$.*
3. *Ferner konvergieren die Reihe der Spaltensummen und die Reihe der Zeilensummen beide absolut, und zwar gegen λ:*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

Beweis zu (1) und (2). $\Sigma\left|a_{f(\star)}\right|$ ist wächst monoton (Summanden ≥ 0) und ist beschränkt. Also konvergiert $\Sigma(a_{f(\star)})$ absolut und darum unbedingt.

Für die Reihen $\Sigma a_{i\bullet}$ und $\Sigma a_{\star j}$ argumentiert man ähnlich: Die Reihe $\Sigma\left|a_{i\bullet}\right|$ ist monoton und beschränkt.

Der Doppelreihensatz II

Satz 11.32. *Sei $a_{\star\bullet}$ summierbar, f Aufzählung und $\lambda = \sum_\star a_{f(\star)}$. Dann kovergieren die folgenden Reihen absolut:*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right) \qquad \textit{und} \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right)$$

Beweis. Sei β eine Summierbarkeitsschranke für die Doppelfolge $a_{\star\bullet}$. Dann ist für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \leq \beta$. Für *jedes* m ist also die die monoton wachsende Folge $n \mapsto \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|$ durch β beschränkt. Darum konvergiert sie gegen einen Grenzenwert $\leq \beta$. Also:

$$\beta \geq \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| \geq \sum_{i=0}^{m}\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right| \qquad\qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Das heißt $\sum_i \sum_j a_{ij}$ konvergiert absolut. Für die Reihe der Spaltensummen argumentiert man entsprechend.

Der Doppelreihensatz III

Satz 11.32. *Sei $a_{\star\bullet}$ summierbar, f Aufzählung und $\lambda = \sum_\star a_{f(\star)}$. Dann:*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

Beweis. $\sum_i \sum_j a_{ij}$ konvergiert (absolut) und es bleibt noch zu sehen, daß λ die Summe dieser Reihe der Zeilensummen ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir benutzen (11.7) und finden

$$h \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \qquad \sum_{k=h+1}^{\infty} \left|a_{f(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun wählen wir

$$m \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \qquad \{f(0), f(1), \ldots, f(h)\} \subseteq \{(i,j) \mid i,j \leq m\}$$

Dann ist:

$$\left|\sum_{i=0}^{n_i}\sum_{j=0}^{n_j} a_{i,j} - \sum_{k=0}^{h} a_{f(k)}\right| \leq \sum_{k=h+1}^{\infty} \left|a_{f(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n_i, n_j \geq m$$

Satz 11.32. *Sei $a_{\star\bullet}$ summierbar, f Aufzählung und $\lambda = \sum_\star a_{f(\star)}$. Dann:*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

Beweis. Die Ungleichung bleibt für $n_j \to \infty$ erhalten:

$$\left|\sum_{i=0}^{n_i}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} - \sum_{k=0}^{h} a_{f(k)}\right| \leq \sum_{k=h+1}^{\infty} \left|a_{f(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Andererseit ist auch:

$$\left|\lambda - \sum_{k=0}^{h} a_{f(k)}\right| = \left|\sum_{k=h+1}^{\infty} a_{f(k)}\right| \leq \sum_{k=h+1}^{\infty} \left|a_{f(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mithin ist

$$\sum_{i=0}^{n_i}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \in \mathbb{B}_\varepsilon(\lambda) \qquad \forall n_i \geq m$$

Damit ist $\sum_i \sum_j a_{i,j} = \lambda$. **q.e.d.**

Das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen I

Satz 11.33. *Seien $\Sigma a_\star$ und $\Sigma b_\star$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert $\Sigma(a_\star * b_\star)$ absolut gegen $(\sum_\star a_\star)(\sum_\star b_\star)$.*

Beweis. Wir betrachten die Doppelfolge

$$(i, j) \mapsto a_i b_j$$

und beobachten, daß sie summierbar ist: Für jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{(i,j)\in M} |a_i b_j| = \sum_{(i,j)\in M} |a_i|\,|b_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)$$

Damit konvergiert jede Anordnung dieser Doppelreihe absolut und gegen dieselbe Reihensumme.

Das Produkt der Limiten ist der Limes der Produkte:

$$(\lim_{m\to\infty} \sum_{i\leq m} a_i)(\lim_{m\to\infty} \sum_{j\leq m} b_j) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\leq m} a_i \sum_{j\leq m} b_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\leq m} \sum_{j\leq m} a_i b_j$$

Das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen II

Satz 11.33. *Seien $\Sigma a_\star$ und $\Sigma b_\star$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert $\Sigma(a_\star * b_\star)$ absolut gegen $(\sum_\star a_\star)(\sum_\star b_\star)$.*

Beweis. Die Folgenglieder $\sum_{i\leq m}\sum_{j\leq m} a_i b_j$ treten jedoch als Teilfolge der Partialsummen einer bestimmten Anordnung der Doppelreihe auf:

$$(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_1) + \cdots$$

Darum konvergiert die Doppelreihe $\sum_{ij} a_i b_j$ gegen das Produkt $(\sum_\star a_\star)(\sum_\star b_\star)$.

Die Folge $\Sigma(a_\star * b_\star)$ läßt sich ebenfalls als Teilfolge der Partialsummen einer anderen Anordnung der Doppelfolge auffassen:

$$(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

Darum konvergiert $\Sigma(a_\star * b_\star)$ gegen dieselbe Reihensumme. **q.e.d.**

Die Klammerung deutet an, welche Partialsummen zur Teilfolge gehören.

Produkte von Potenzreihen

Anwendung 11.34. *Seien $\Sigma a_\star x^\star$ und $\Sigma b_\star x^\star$ zwei Potenzreihen. Wir bilden ihr formales Produkt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen gleicher Ordnung:*

$$\begin{aligned}(\Sigma a_\star x^\star)(\Sigma b_\star x^\star) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\ &= \Sigma(a_\star * b_\star)x^\star\end{aligned}$$

Das formale Produkt der Potenzreihen korrespondiert dem Faltungsprodukt der Koeffizientenfolgen.

Wo beide Potenzreihen absolut konvergieren, konvergiert das formale Produkt auch, und zwar gegen das Produkt der Reihensummen.

Beweis. Folgt aus (11.33) und der Identität

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}\right) x^m = \sum_{i=0}^{m} (a_i x^i)(b_{m-i} x^{m-i})$$

$$\Longrightarrow \qquad (a_\star * b_\star)x^\star = (a_\star x^\star) * (b_\star x^\star) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Definition 11.36. Für zwei natürliche Zahlen $m \leq n$ heißt

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Binomialkoeffizient. Man spricht das Symbol als „n über m“ aus. Ich sage gern “m aus n“ wegen der folgenden kombinatorischen Interpretation:

Aufgabe 11.38. Eine endliche Menge der Größe n hat genau $\binom{n}{m}$ Teilmengen der Größe m.

Die Menge $\{a, b, c, d\}$ hat die 2-elementigen Teilmengen

$$\{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{a, d\} \quad \{b, c\} \quad \{b, d\} \quad \{c, d\}$$

Das sind gerade $\binom{4}{2} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ Stück.

Rekursionsformel

Beobachtung 11.37. *Für* $m+1 \leq n$ *ist:*

$$\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!(n-m) + n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n+1}{m+1}$$

Das Pascallsche Dreieck

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Satz 11.39. $(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i}$

Beweis. Wir gehen mit Induktion nach k vor. Der Fall $k=0$ ist klar.

Für den Induktionsschritt rechnen wir

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k = (x+y)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{i+1}y^{k-i} \\
&= \binom{k}{0}x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^{i+1}y^{k-i} + \binom{k}{k}x^{k+1}y^0 \\
&= x^0 y^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i+1}x^{i+1}y^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^{i+1}y^{k-i} + x^{k+1}y^0 \\
&= \binom{k+1}{0}x^0 y^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i+1}x^{i+1}y^{k-i} + \binom{k+1}{k+1}x^{k+1}y^0 \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^i y^{k+1-i}
\end{aligned}
$$

Damit ist das Gewünschte gezeigt. **q.e.d.**

Satz 11.40. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *für alle* x, y.

Beweis. Wir werten von rechts nach links aus und erhalten mit der Produktformel für absolut konvergente Reihen:

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m+n=k} \frac{k!}{m!n!} x^m y^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m+n=k} \binom{k}{m} x^m y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y)$$

q.e.d.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Das meiste hier ist Übungsaufgabe:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
2. $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$
3. $\exp(x) > 0$
4. Die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ wächst streng monoton.
5. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) < \varepsilon$

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(0) &= 0 \\ \cos(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad x^0\text{-Term}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\cos(y) \end{aligned}\right\} \quad \text{Additionstheoreme}$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad \text{Pythagoras}$$

Die Additionstheoreme rechnen sich so wie die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. (Siehe Übungsaufgaben)

Intervalle

Definition 12.1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Intervalle sind:

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	offenes Intervall
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	offenes Intervall
$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$	offenes Intervall

Intervalle sind beschränkt oder unbeschränkt Die Größen a und b heißen linke bzw. rechte Intervallgrenze. Ihre Differenz $b - a$ heißt Länge des Intervalls. Die Länge eines beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ notieren wir mit $|I|$.

Wir nennen ein Intervall entartet, wenn es aus einem einzigen Punkt besteht oder leer ist: (a, a) oder $[a, a]$.

Definition 12.4. Sei $I := [a, b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes, nicht-entartetes Intervall. Unter einer Unterteilung von I verstehen wir eine endliche Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq I$, die die Endpunkte enthält: $\{a, b\} \subseteq \mathcal{J}$. Die Elemente von $\mathcal{J}$ nennen wir Unterteilungspunkte oder Unterteilungsstellen.

Als Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ erbt eine Unterteilung die $\leq$-Relation von den reellen Zahlen. Als endliche angeordnete Menge ist $\mathcal{J}$ wohlgeordnet (4.21). Die Elemente von $\mathcal{J}$ lassen sich also der Größe nach nummerieren:

$$\mathcal{J} = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$$

Die *offenen Intervalle* (a_i, a_{i+1}) nennen wir Unterteilungsstücke oder Unterteilungsintervalle.

Beobachtung 12.6. *Zwei Punkte $x \leq y$ liegen genau dann im gleichen Unterteilungsstück, wenn kein Unterteilungspunkt zwischen ihnen liegt, soll heißen:*

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{J} \cap [x, y] = \emptyset$$

Insbesondere ist $x \not\sim x$ genau dann, wenn x ein Unterteilungspunkt ist.

Definition 12.7. Sind $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ zwei Unterteilungen von I mit

$$\{a, b\} \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq I,$$

so heißt $\mathcal{J}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{J}_1$. Bei einer Verfeinerung kommen also nur Unterteilungspunkte hinzu, es gehen aber keine verloren.

Äquivalent: Jedes Unterteilungsstück der Verfeinerung $\mathcal{J}_2$ ist enthalten in einem Unterteilungsstück $\mathcal{J}_1$.

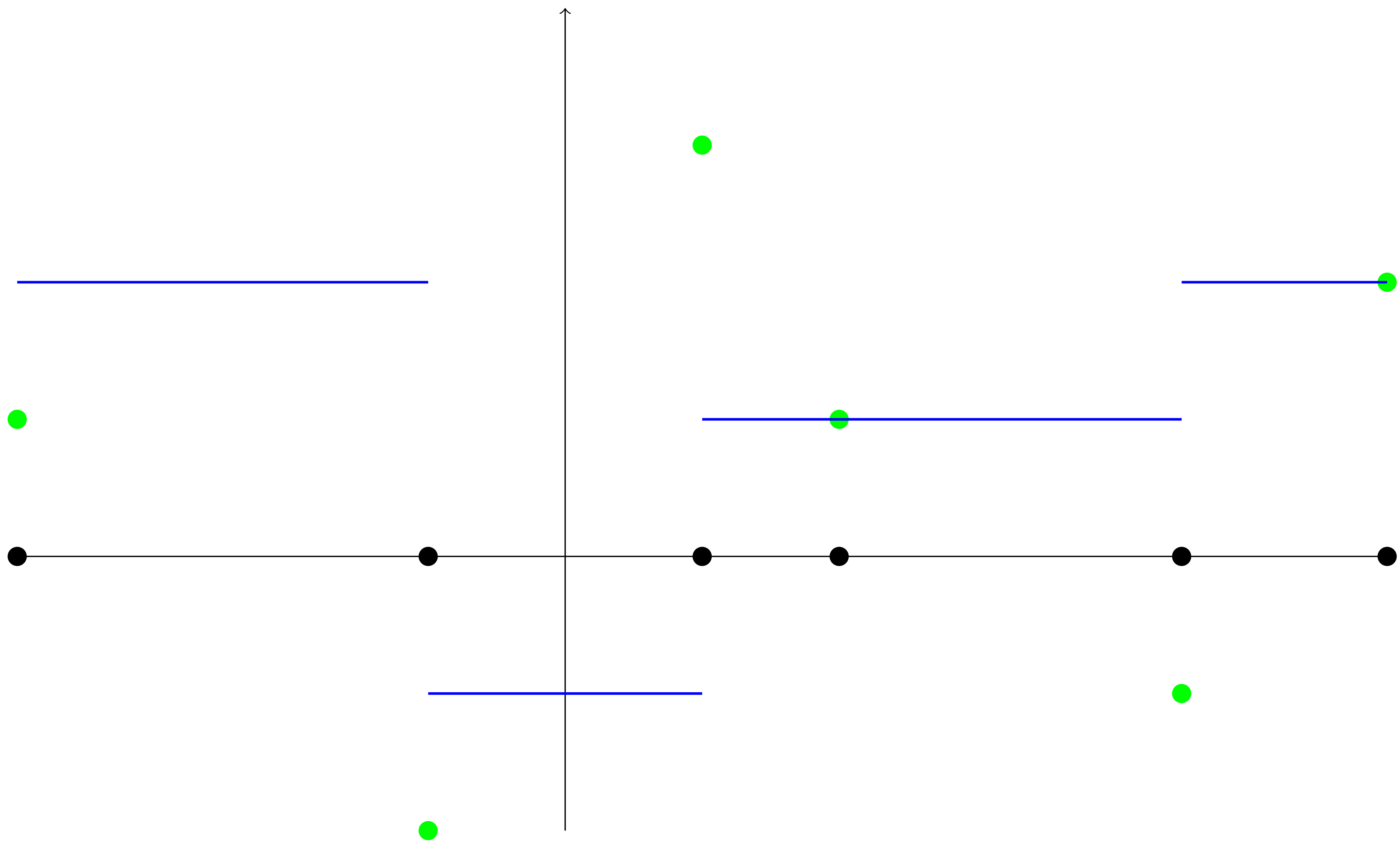
Definition 12.8. Sei $I := [a, b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes, nicht-entartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf I. Wir nennen f eine <u>Treppenfunktion</u>, wenn es eine Unterteilung $\mathcal{J} = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ von I gibt, so daß f konstant ist auf jedem der Unterteilungsstücke (a_i, a_{i+1}). Wir sagen in diesem Fall, daß $\mathcal{J}$ <u>bezeugt</u>, daß f eine Treppenfunktion ist.

Bemerkung 12.9. Die Unterteilung $\mathcal{J}$ bezeugt, daß $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, genau dann, wenn für $x \leq y$ aus I gilt:

$$f(x) \neq f(y) \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in \mathcal{J} : x \leq a \leq y$$

Also: Zwei Stellen, an denen sich f unterscheidet, sind durch mindestens einen Unterteilungspunkt getrennt.

Graph einer Treppenfunktion mit bezeugender Unterteilung



Der Vektorraum der Treppenfunktionen

Bemerkung und Definition 12.11. $\mathrm{Tr}(I) := \{\text{Treppenfunktionen auf } I\}$ sei die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall I.

$\mathrm{Tr}(I)$ ist ein Vektorraum ist, d.h., abgeschlossen bezüglich punktweiser Addition von Funktionen und punktweiser Multiplikation mit Skalaren.

Multiplikation ist dabei klar: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit Zeuge $\mathcal{J} \subset I$ und $s \in \mathbb{R}$, so ist das Produkt $sf : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, und wir erfahren das vom gleichen Zeugen $\mathcal{J}$.

Seien nun $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen mit Zeugen $\mathcal{J}_1$ bzw. $\mathcal{J}_2$. Dann ist die Vereinigung $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ eine gemeinsame Verfeinerung, die bezeugt, daß die Summe $f_1 + f_2$ eine Treppenfunktion ist. Ist nämlich $x \leq y$ mit $f_1(x) + f_2(x) \neq f_1(y) + f_2(y)$, so folgt $f_1(x) \neq f_1(y)$ oder $f_2(x) \neq f_2(y)$. Mithin sind x und y durch einen Unterteilungspunkt aus $\mathcal{J}_1$ oder $\mathcal{J}_2$ getrennt.

Die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktionen I

Lemma und Definition 12.12. Sei I ein abgeschlossenes, beschränktes, nicht-entartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, bezeugt von der Unterteilung $\mathcal{J} = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\} \subseteq I$. Für $i \in [n]$ wählen wir einen beliebigen Punkt $x_i \in (a_i, a_{i+1})$ im jeweiligen Unterteilungsstück. Dann ist

$$\int_I f := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1} - a_i)$$

unabhängig von der Wahl der bezeugenden Unterteilung $\mathcal{J}$ und unabhängig von der Wahl der Stützstellen x_i.

Wir nennen $\int_I f$ das bestimmte Integral von f oder auch die Fläche unter dem Graphen.

Beweis. Die Unabhängigkeit von der Wahl der Stützstellen x_i ist klar: Eben weil die Treppenfunktion konstant auf dem Unterteilungsstück (a_i, a_{i+1}) ist, hängt der Faktor $f(x_i)$ nicht davon ab, welcher Punkt in (a_i, a_{i+1}) genau gewählt wird.

Die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktionen II

Lemma und Definition 12.12. Für $x_i \in (a_i, a_{i+1})$ ist

$$\int_I f := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1} - a_i)$$

unabhängig von der Wahl der bezeugenden Unterteilung $\mathcal{J}$.

Beweis. Für die Unabhängigkeit von der Verteilung führen wir zunächst eine Bezeichnung ein, die die erst auszuschließende Abhängigkeit von der Unterteilung wenigstens in der Notation anzeigt. Wir setzen:

$$\int_{\mathcal{J}} f := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1} - a_i)$$

Nun ist zu zeigen:

> Sind $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ zwei Unterteilungen von I, die beide bezeugen, daß $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, dann ist
>
> $$\int_{\mathcal{J}_1} f = \int_{\mathcal{J}_2} f$$

Die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktionen III

Lemma und Definition 12.12. Sind $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ zwei Unterteilungen von I, die beide bezeugen, daß $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, dann ist

$$\int_{\mathcal{J}_1} f = \int_{\mathcal{J}_2} f$$

Beweis. Diese Behauptung zeigen wir, indem wir argumentieren, daß sich das Integral bezüglich einer Unterteilung nicht ändert, wenn wir zu einer Verfeinerung übergehen. Dann ist nämlich

$$\int_{\mathcal{J}_1} f = \int_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2} f = \int_{\mathcal{J}_2} f,$$

denn $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ ist ja eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$.

Invarianz des Integrals unter Unterteilung ergibt sich aber induktiv bereits daraus, daß Hinzufügen eines einzelnen weiteren Unterteilungspunktes den Wert des Integral nicht zu ändern vermag.

Die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktionen IV

Lemma und Definition 12.12. Sei $\mathcal{J}$ Unterteilung, die bezeugt, daß f eine Treppenfunktion ist, und $s \in (a_j, a_{j+1})$ ein zusätzlicher Unterteilungspunkt. Dann ist

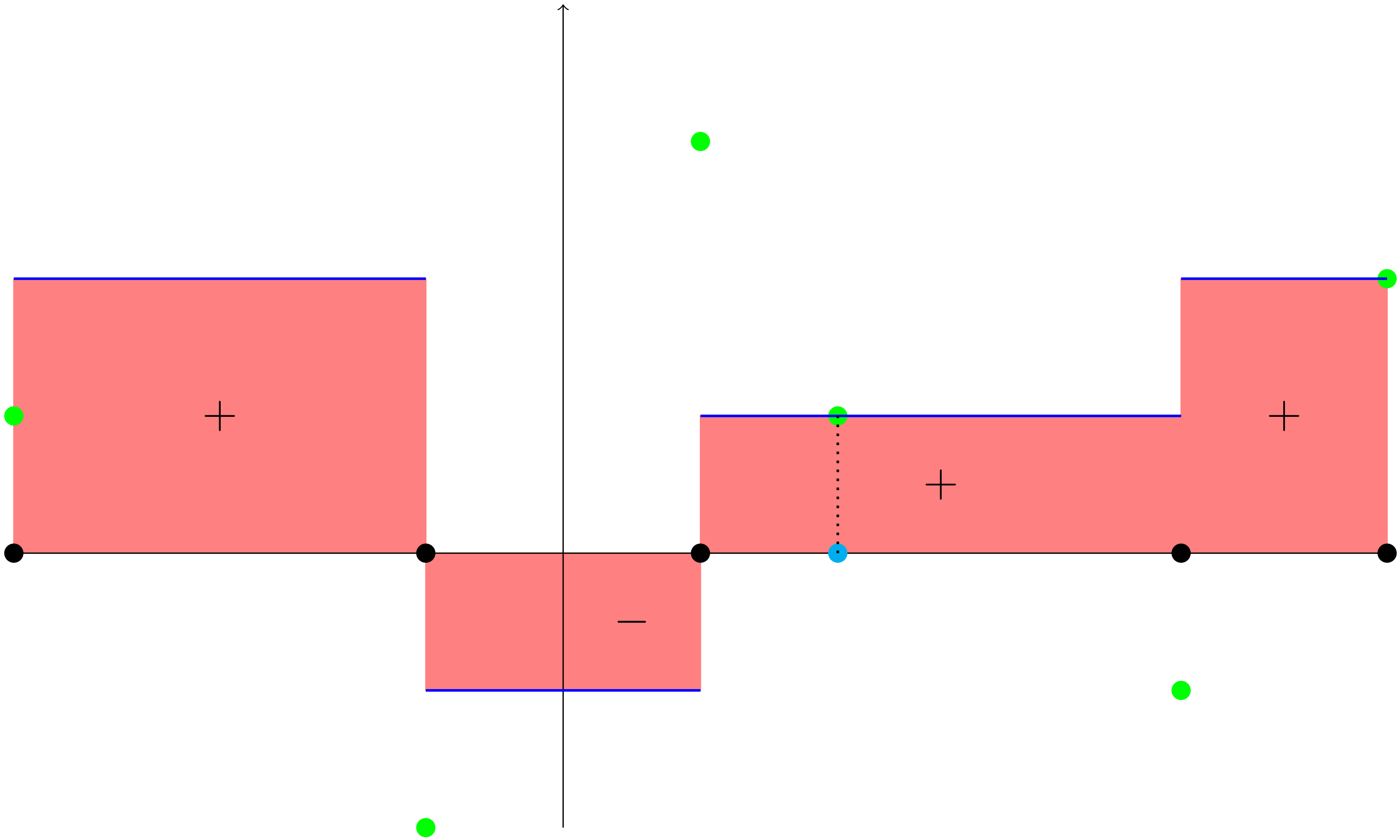
$$\int_{\mathcal{J}\cup\{s\}} f = \int_{\mathcal{J}} f$$

Beweis. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{J}\cup\{s\}} f &= \sum_{i=0}^{j-1} f(x_i)\,(a_{i+1}-a_i) + f(x_j)\,(s-a_j) + f(x_j)\,(a_{j+1}-s) \\ &\qquad + \sum_{i=j+1}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1}-a_i) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} f(x_i)\,(a_{i+1}-a_i) + f(x_j)\,(a_{j+1}-a_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1}-a_i) \\ &= \int_{\mathcal{J}} f\end{aligned}$$

q.e.d.

Die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktionen V



Aufgabe 12.15. *Durch $f \mapsto \int_I f$ ist eine lineare Abbildung*

$$\int : \mathrm{Tr}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

defininiert. Das heißt:

1. *Integration ist additiv:*

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g \qquad \forall f, g \in \mathrm{Tr}(I)$$

2. *Integration ist verträglich mit skalarer Multiplikation:*

$$\int_I (sf) = s \int_I f \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ f \in \mathrm{Tr}(I)$$

Proposition 12.16. *Weil das Intervall I nicht zu einem einzelnen Punkt entartet, also $|I| > 0$ gilt, ist das Integral monoton in folgendem Sinne:*

Sind $f < g$ Treppenfunktionen auf I, dann ist $\int_I f < \int_I g$.

Beweis. Mit Linearität (12.15) ist nur zu zeigen, daß

$$0 < \int_I (g - f)$$

ist. Nun sei $\mathcal{J}$ eine Unterteilung von I, die bezeugt, daß $g - f$ eine Treppenfunktion ist. Auf den Unterteilungsstücken der Unterteilung ist $g - f > 0$ jeweils konstant. Da es nur endlich viele Unterteilungsstücke gibt, nimmt $g-f$ hier nur endlich viele, sämtlich strikt positive Werte an. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß $g - f > \varepsilon$ auf allen Unterteilungsstücken ist. Dann ist:

$$0 < |I|\,\varepsilon < \int_I (g - f) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Definition 12.17. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf dem abgeschlossenenen Intervall I. Die Linksmenge L und Rechtsmenge R von f sind wiefolgt erklärt:

$$L = L(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, g \in \mathrm{Tr}(I) \text{ und } g < f \right\}$$
$$R = R(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, g \in \mathrm{Tr}(I) \text{ und } f < g \right\}$$

Wir schreiben $L(f)$ bzw. $R(f)$, wenn wir die Abhängigkeit von f betonen wollen, oder wenn wir Links- und Rechtsmengen zu verschiedenen Funktionen betrachten.

Bemerkung 12.18. Es ist durchaus möglich, daß f keine majorisierende Treppenfunktion zuläßt. In diesem Fall hat f eine leere Rechtsmenge. Entsprechend kann der Fall einer leeren Linksmenge auftreten, wenn f keine Treppenfunktion majorisiert.

Proposition 12.19. *Es ist $L < R$, das heißt:*

$$x \in L \textit{ und } y \in R \quad \Longrightarrow \quad x < y$$

Beweis. Sei $x \in L$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $g < f$ und $x = \int_I g$. Entsprechend sei $h > f$ eine Treppenfunktion mit $\int_I h = y \in R$. Dann ist $g < h$ und wegen (12.16) folgt $x = \int_I g < \int_I h = y$. **q.e.d.**

Aufgabe 12.20. Sei $x < y$. Zeige:

$$\begin{aligned} y \in L \quad &\Longrightarrow \quad x \in L \\ x \in R \quad &\Longrightarrow \quad y \in R \end{aligned}$$

Definition 12.21. Wir nennen $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, wenn $\sup L = \inf R$ gilt. In diesem Fall nennen wir

$$\int_I f := \sup L = \inf R$$

das bestimmte Integral der Funktion f auf dem Intervall I. Ist $I = [a, b]$, schreiben wir in Anlehnung an die Summennotation auch

$$\int_a^b f := \int_I f$$

Andere mögliche Notationen involvieren eine wählbare Integrationsvariable:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x := \int_I f$$

Ein Kriterium der Integrierbarkeit

Aufgabe 12.22. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem abgeschlossenen, beschänkten, nicht-entarteten Intervall. Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:*

1. *Die Funktion f ist integrierbar.*

3. *. Für* jedes $\varepsilon > 0$ *gibt es Treppenfunktionen $g_+, g_- : I \to \mathbb{R}$ mit $g_- \leq f \leq g_+$ und:*

$$\int_I g_+ \leq \varepsilon + \int_I g_-$$

5. *Es gibt genau eine reelle Zahl ξ, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $g_+, g_- : I \to \mathbb{R}$ existieren mit $g_- \leq f \leq g_+$ und:*

$$\int_I g_- \leq \xi \leq \int_I g_+ \leq \varepsilon + \int_I g_-$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist

$$\xi = \int_I f$$

Integrierbarkeit monotoner Funktionen I

Proposition 12.23. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h.:*

$$x<y \quad\Longrightarrow\quad f(x)\le f(y) \qquad \forall x,y\in[a,b]$$

Dann ist f integrierbar. Monoton fallende Funktionen sind auch integrierbar.

Beweis. Wir teilen $[a,b]$ in $m\ge 1$ gleichgroße Unterteilungsstücke:

$$\mathcal{J}_m=\{a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b\} \qquad \text{mit} \qquad a_i:=a+i\frac{b-a}{m}$$

Wir betrachten die Treppenfunktionen

$$f_m^-: I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f_m^+: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(a_0) \\ f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_{m-2}) \\ f(a_{m-1}) \end{cases} \qquad\qquad x \mapsto \begin{cases} f(a_1) & a_0\le x<a_1 \\ f(a_2) & a_1\le x<a_2 \\ \vdots & \vdots \\ f(a_{m-1}) & a_{m-2}\le x<a_{m-1} \\ f(a_m) & a_{m-1}\le x\le a_m \end{cases}$$

Integrierbarkeit monotoner Funktionen II

Beweis Fortsetzung. Dann ist mit Monotonie von f:

$$f_m^- \leq f \leq f_m^+$$

und:

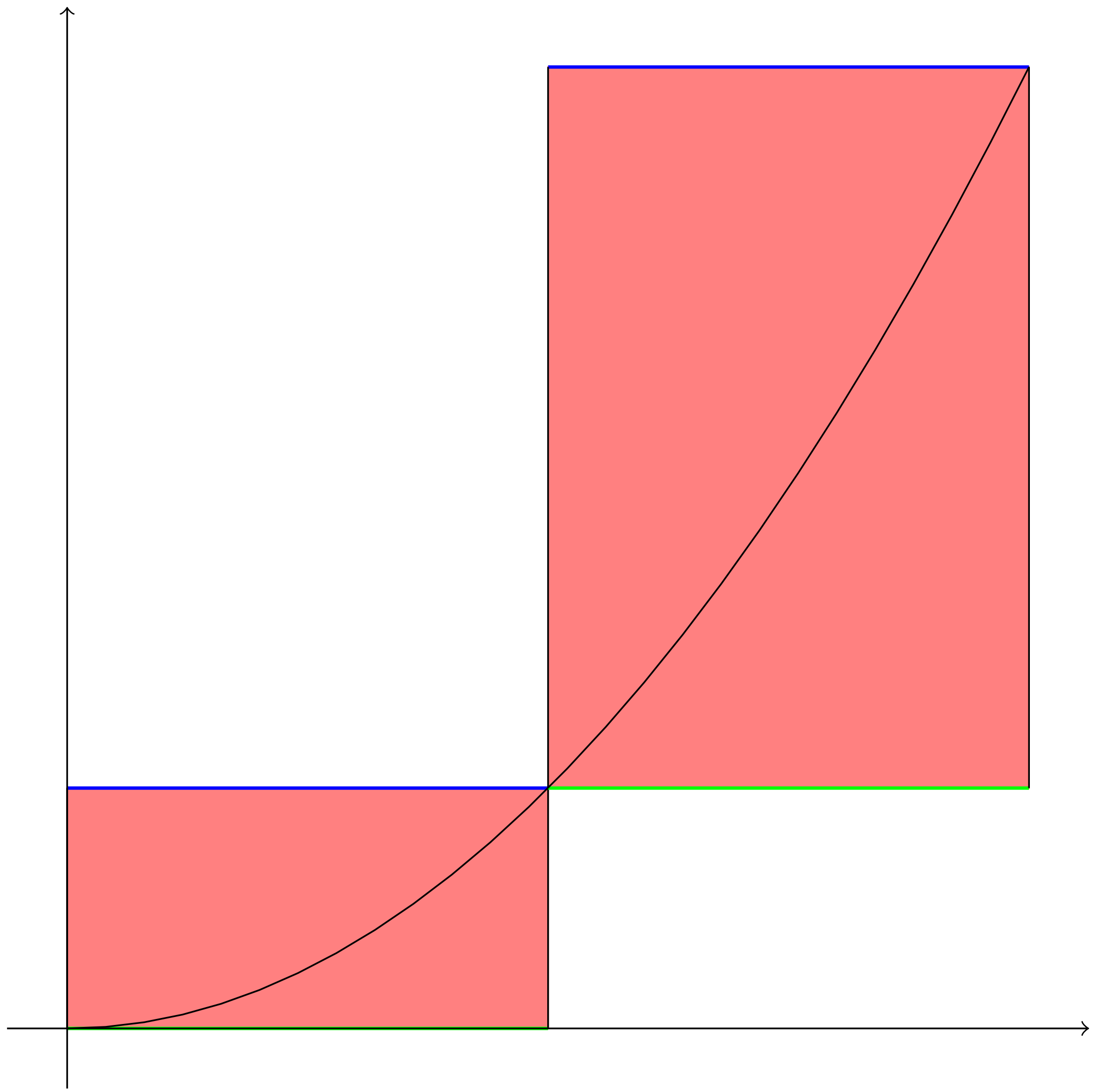
$$\begin{aligned}
\int_I f_m^+ - \int_I f_m^- &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} f(a_{i+1})\right) - \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} f(a_i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{m}
\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein m mit:

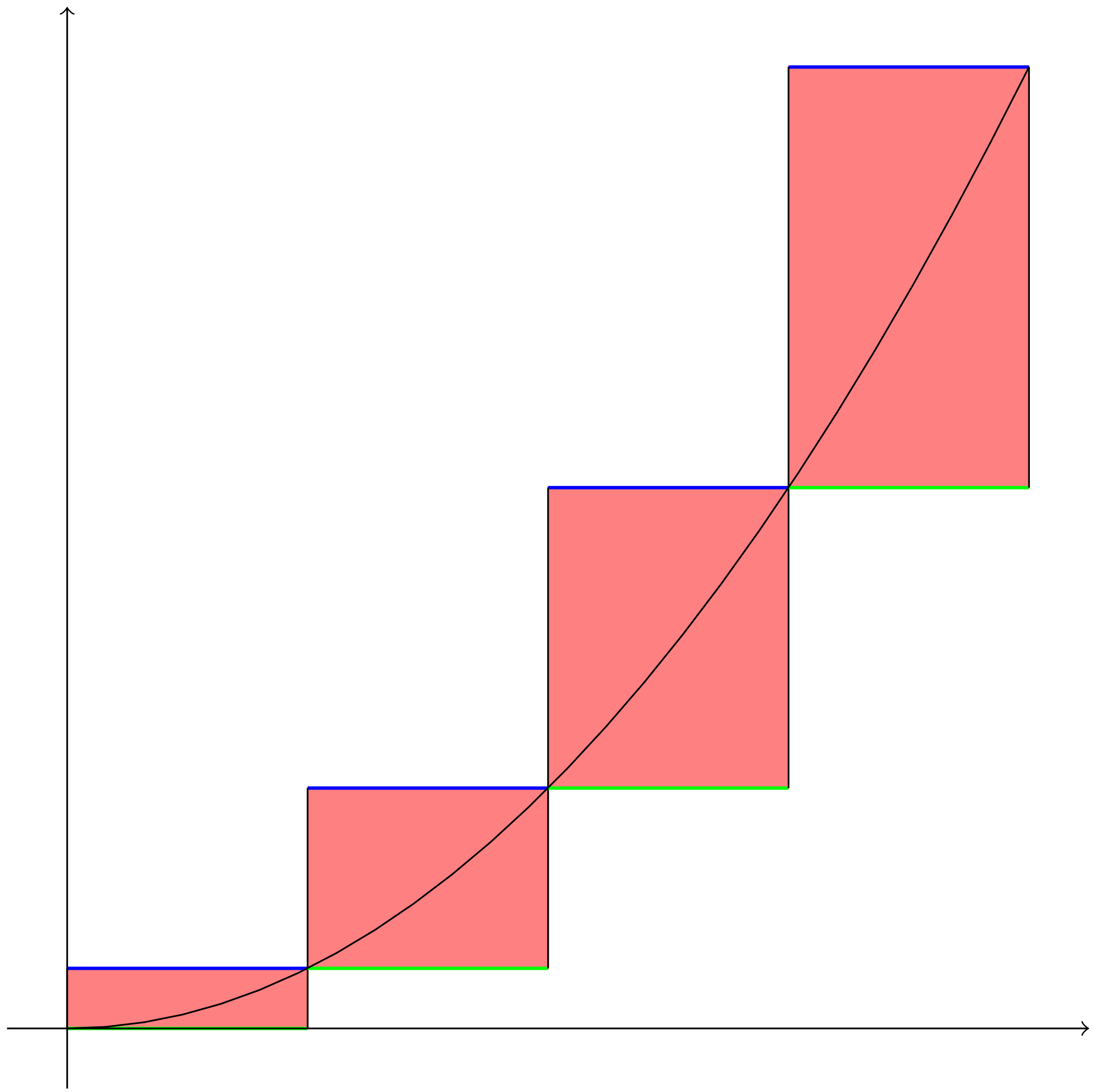
$$\int_I f_m^+ \leq \varepsilon + \int_I f_m^-$$

Die Integrierbarkeit von f folgt nun aus (12.22). **q.e.d.**

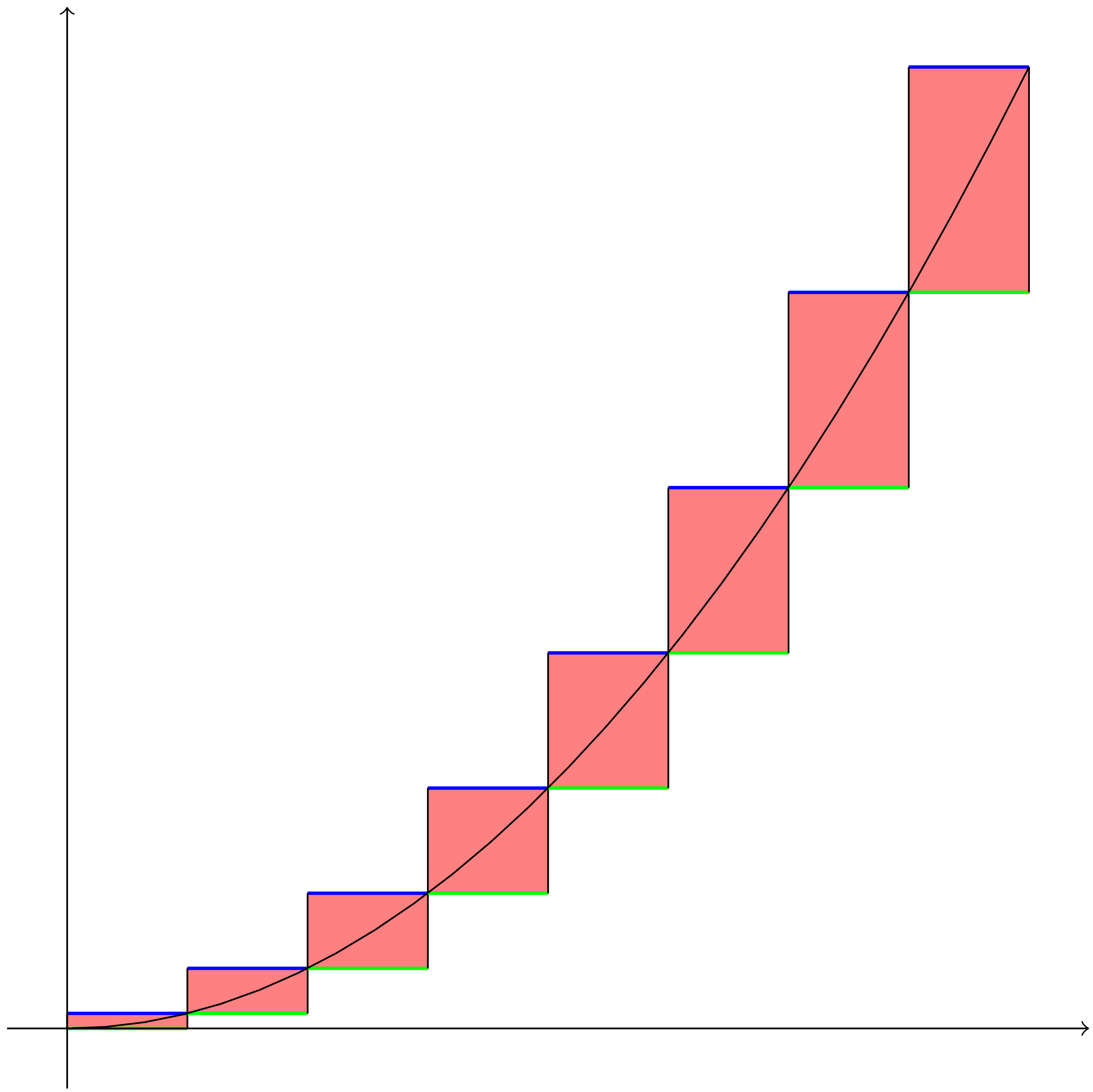
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 2$)



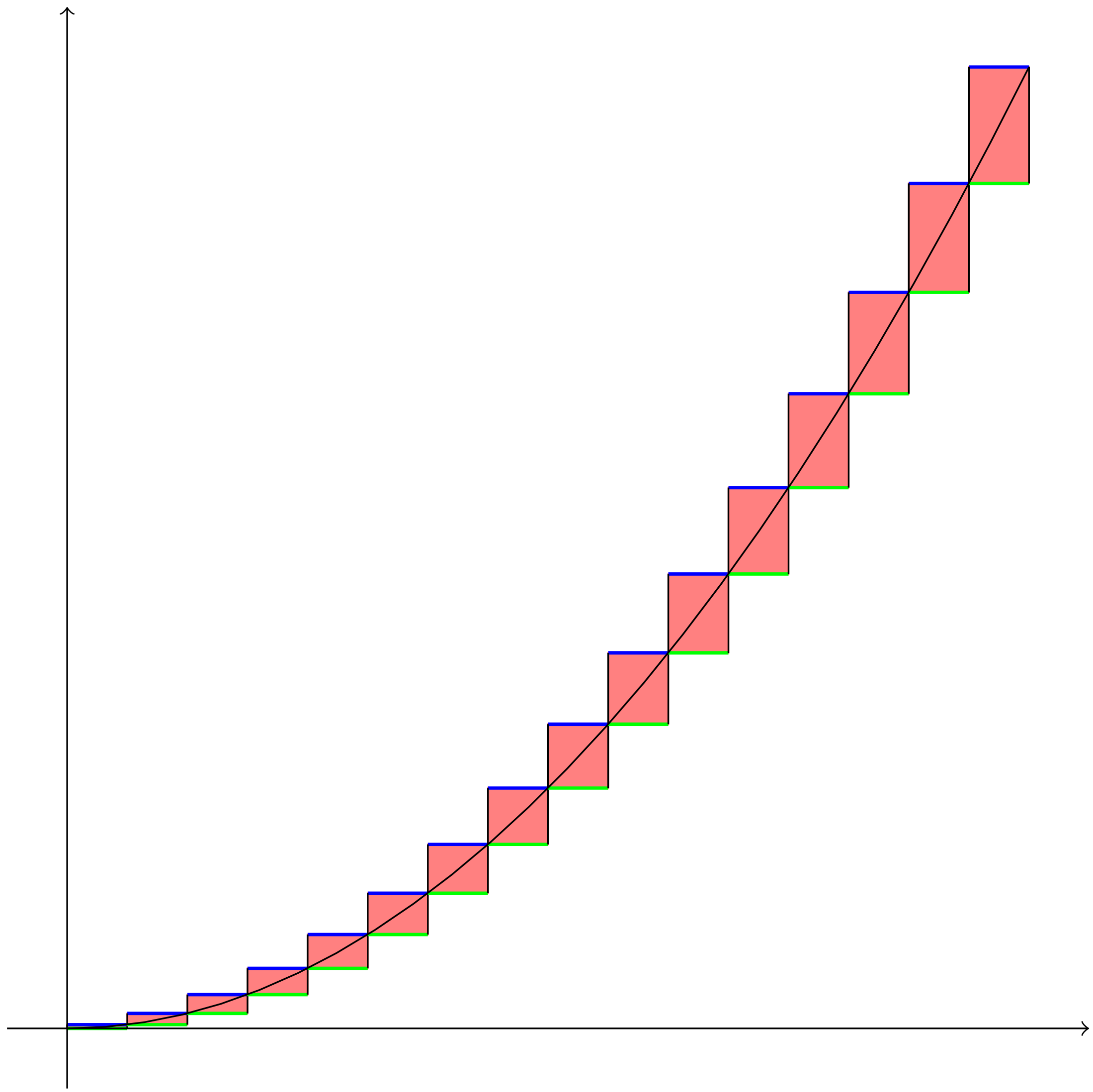
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 4$)



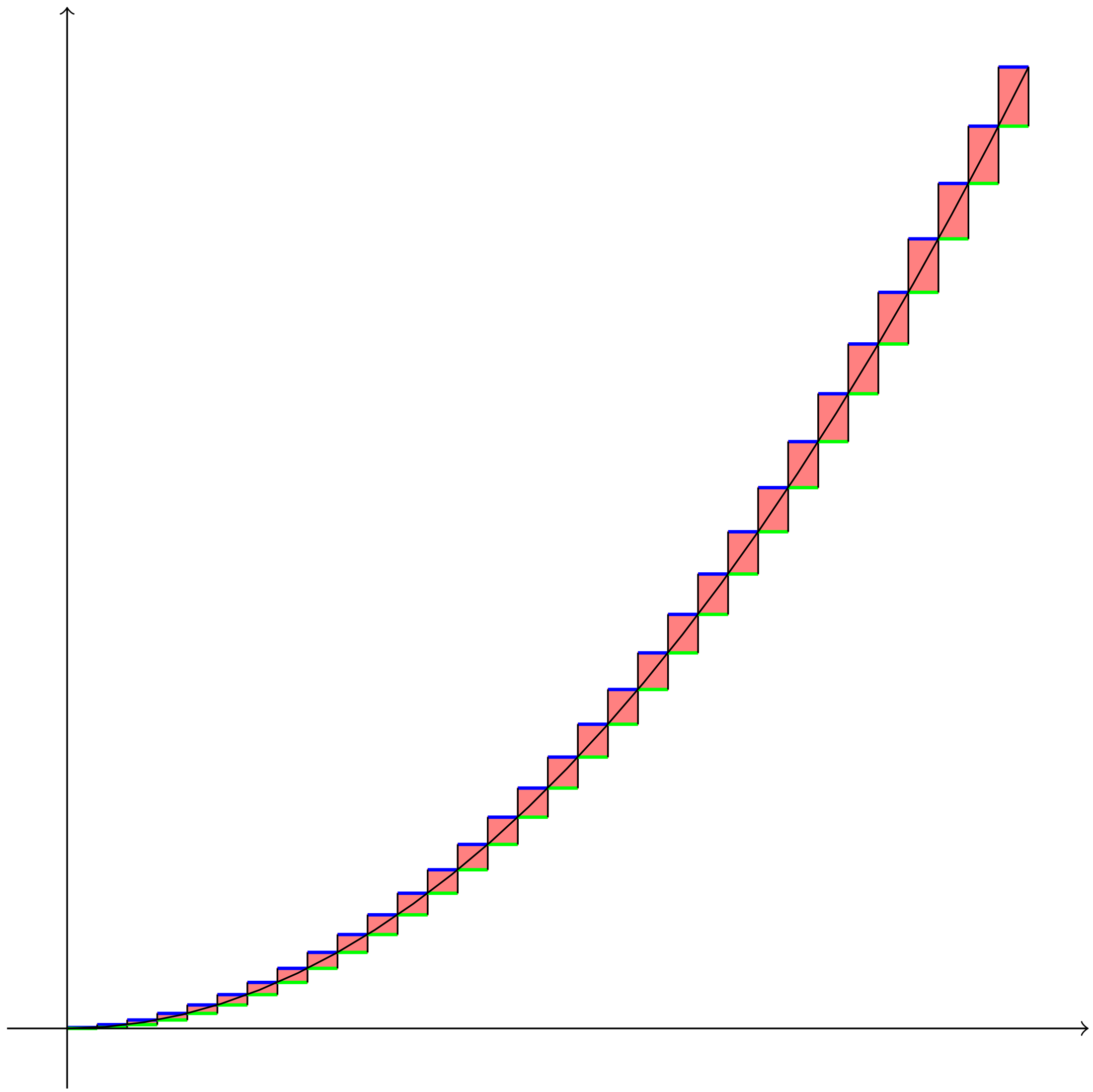
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 8$)



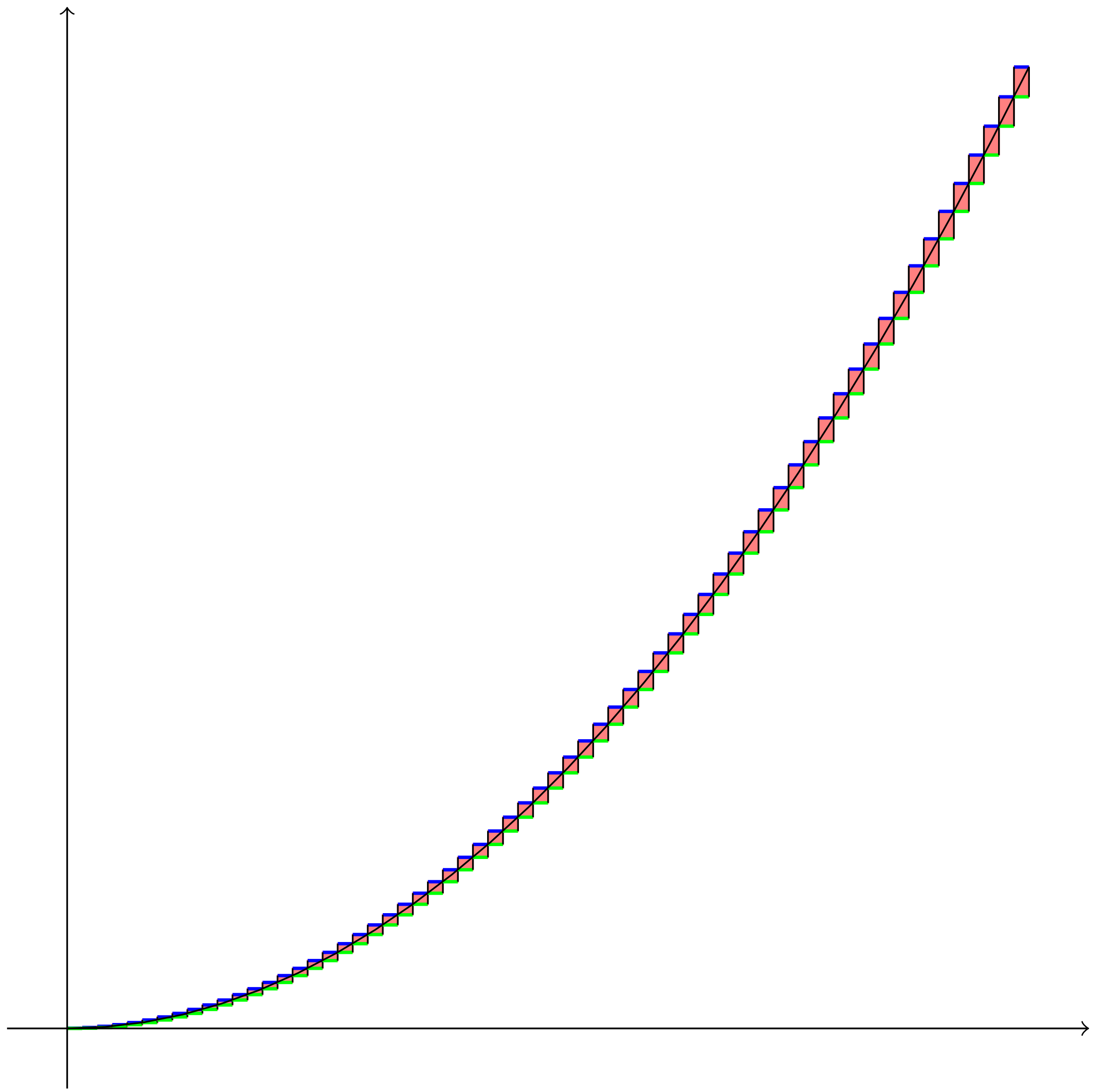
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 16$)



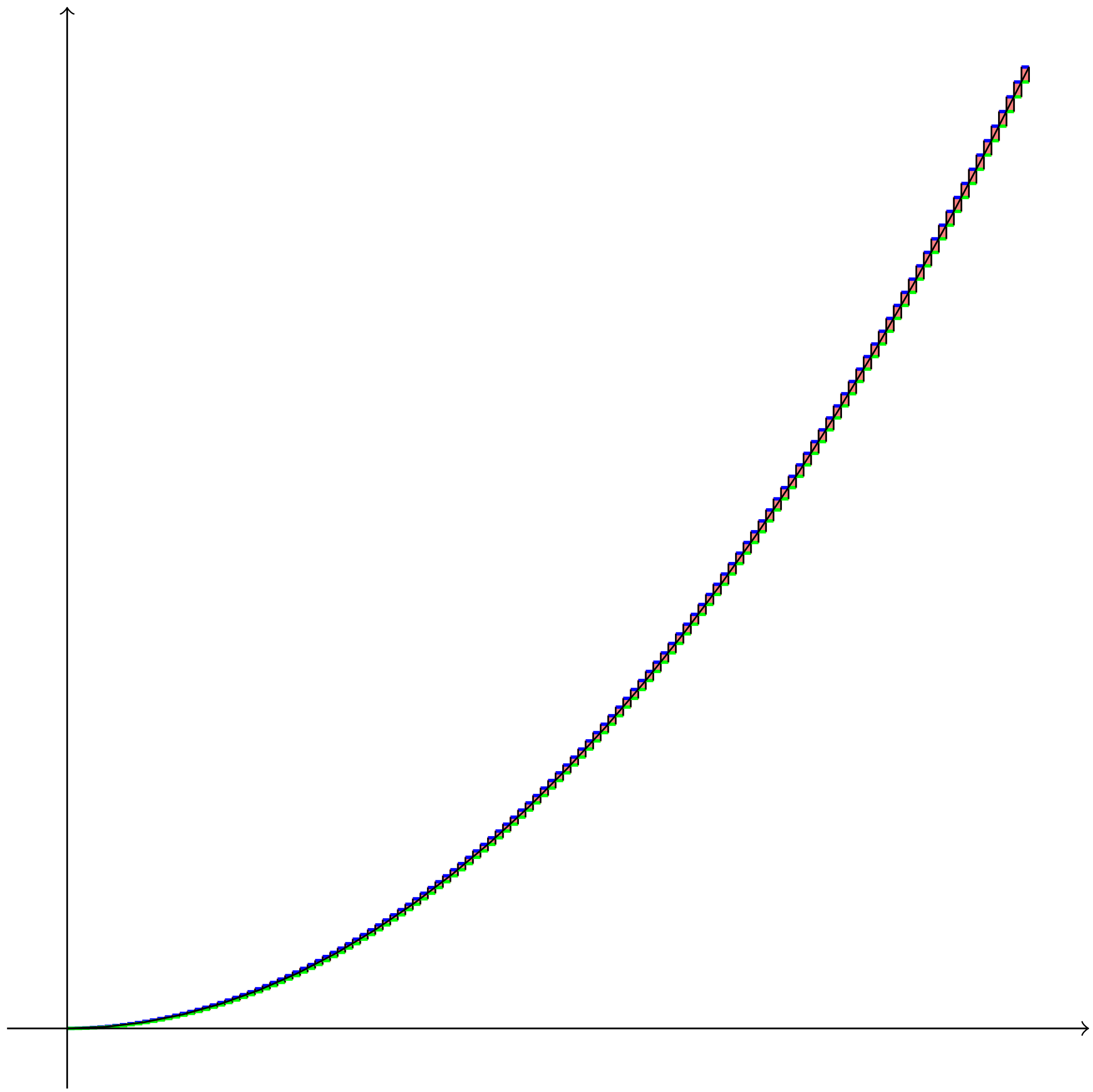
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 32$)



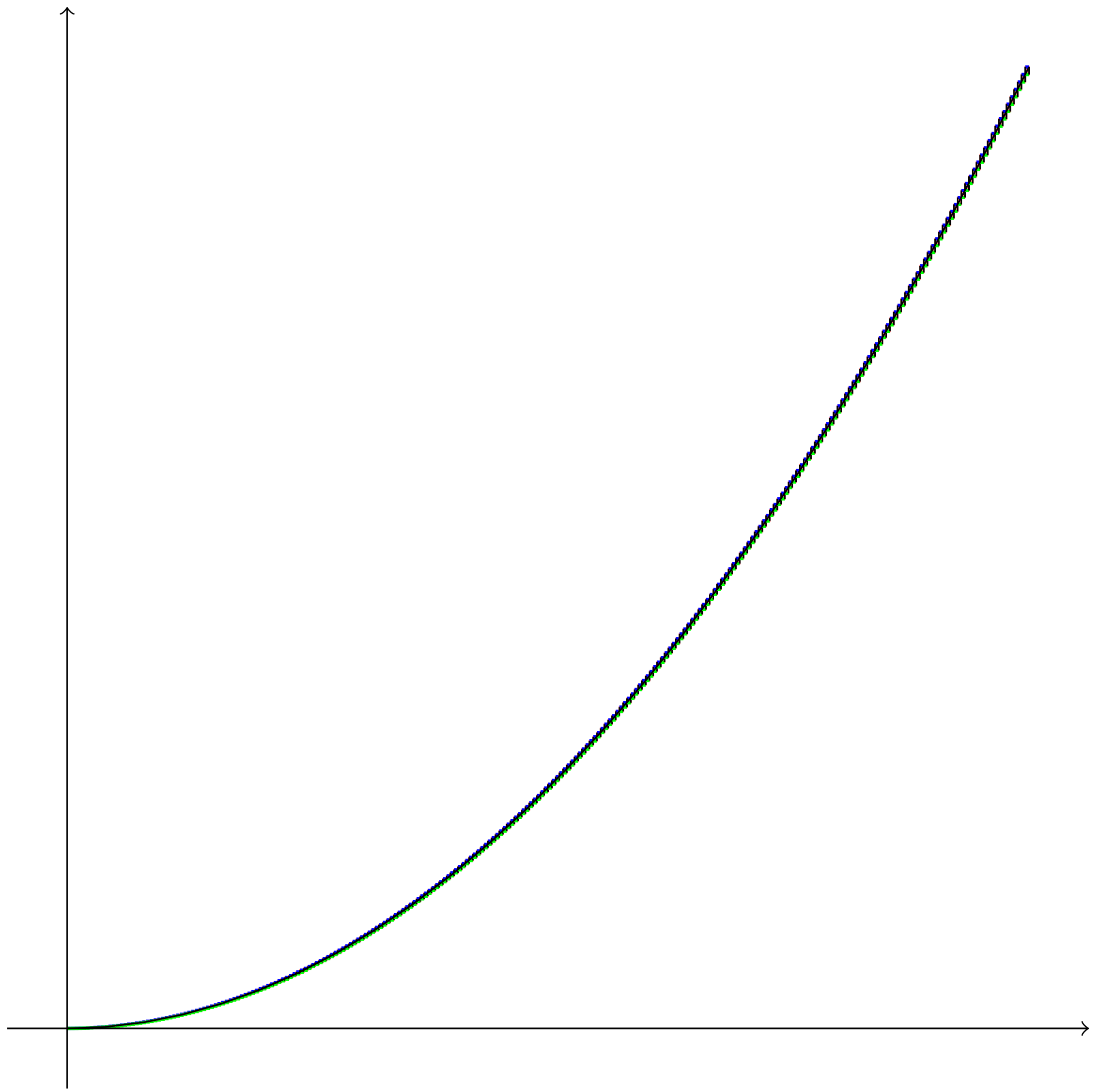
Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 64$)



Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 128$)



Integrierbarkeit monotoner Funktionen III ($m = 256$)



Korollar 12.24. *Für jeden natürlichen Exponenten* $k \in \mathbb{N}$ *ist die Funktion* $x \mapsto x^k$ *auf* $[0, 1]$ *monoton und damit integrierbar. Wir setzen*

$$\mu_k := \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}\, x$$

Die Integrale der Potenzen I

$$\mu_k = \frac{1}{k+1}$$

Beweis. Sei $f : x \mapsto x^k$ definiert auf dem Intervall $[0,1]$. Seien L und R die Links- bzw. Rechtsmenge von f. Die konstanten Funktionen $x \mapsto -1$ und $x \mapsto 2$ zeigen, daß $-1 \in L$ und $2 \in R$ ist. Also ist L nach oben beschränkt (durch 2) und R nach unten (durch -1). Insbesondere existieren $\sup L$ und $\inf R$ und es ist $\sup L \leq \inf R$.

Wir zeigen zunächst $\inf R \leq \frac{1}{k+1}$. Dazu konstuieren wir eine Familie von Treppenfunktionen, die alle f majorisieren. Sei $t \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Wir betrachten die Unterteilung:

$$0 < t^N < t^{N-1} < \cdots < t^2 < t < 1$$

Die Integrale der Potenzen II

$$\inf R \leq \frac{1}{k+1}$$

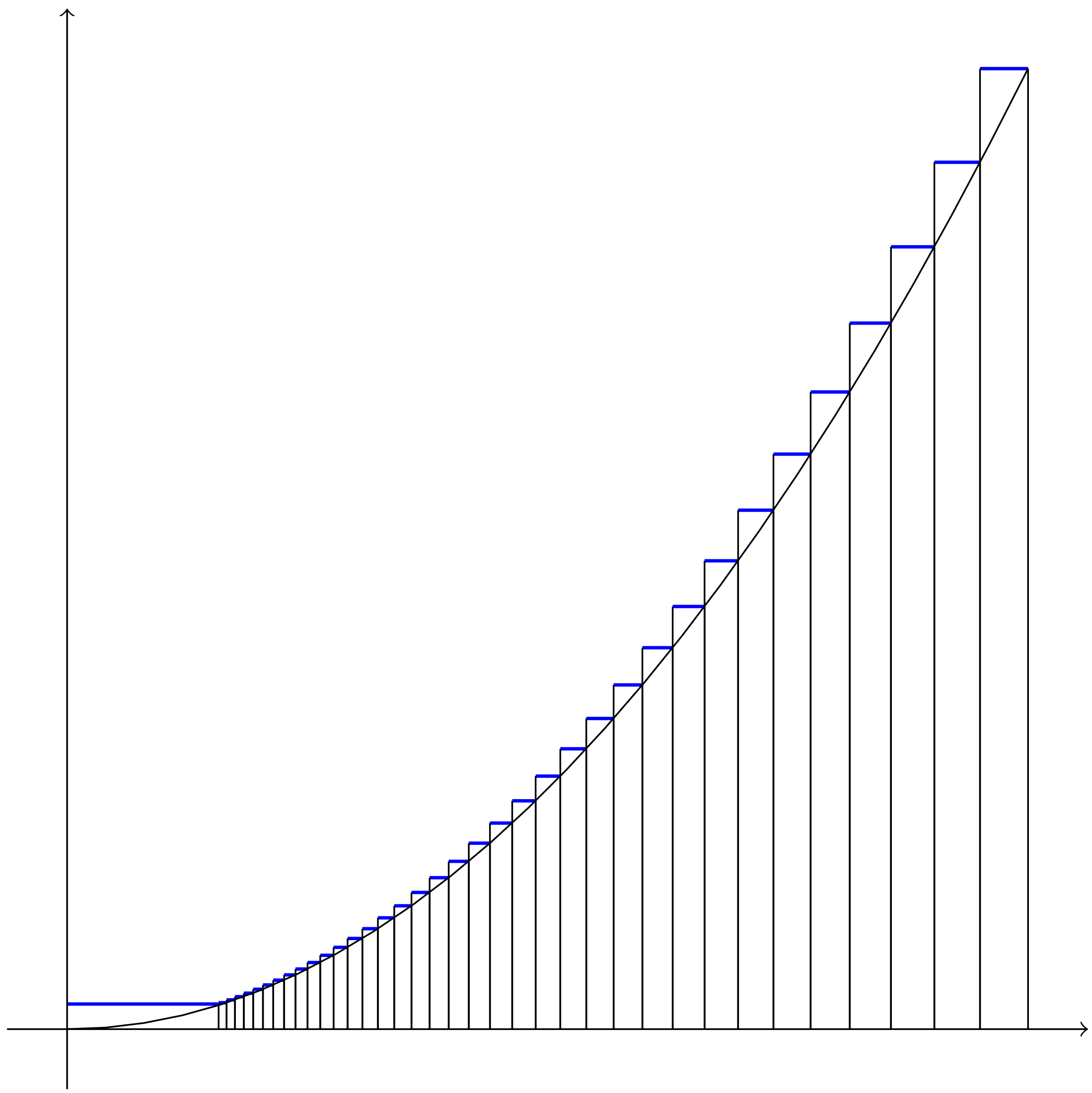
Beweis. Betrachte die Treppenfunktion

$$\begin{aligned} g_{t,N} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} t^{Nk} & 0 < x < t^N \\ t^{(N-1)k} & t^N < x < t^{N-1} \\ \vdots & \vdots \\ t^k & t^2 < x < t \\ 1 & t < x < 1 \\ 2 & \text{an Unterteilungspunkten} \end{cases} \end{aligned}$$

Mit dieser künstlichen Wahl an den Unterteilungsstellen ist $f < g_{t,N}$.

Die Integrale der Potenzen III

$$\inf R \leq \frac{1}{k+1}$$



Die Integrale der Potenzen IV

$$\inf R \leq \frac{1}{k+1}$$

Beweis. Wir berechnen $\int_0^1 g_{t,N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_{t,N} &= 1^k(1-t) + t^k(t-t^2) + \cdots + t^{(N-1)k}(t^{N-1}-t^N) + t^{Nk}(t^N - 0) \\
&= (1-t)\left(1 + t^{k+1} + t^{2(k+1)} + \cdots + t^{(N-1)(k+1)}\right) + t^{Nk}t^N \\
&= (1-t)\frac{1-t^{N(k+1)}}{1-t^{k+1}} + t^{N(k+1)}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\inf R \leq (1-t)\frac{1-t^{N(k+1)}}{1-t^{k+1}} + t^{N(k+1)}$$

und durch den Grenzübergang $N \to \infty$ erhalten wir:

$$\inf R \leq \frac{1-t}{1-t^{k+1}} = \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^k}$$

Die Integrale der Potenzen V

$$\inf R \leq \frac{1}{k+1}$$

Beweis. Nun wollen wir t ganz nah bei 1 wählen. Formal betrachten wir eine Folge t_i, die gegen 1 konvergiert. Wir können zum Beispiel $t_i := 1 - \frac{1}{2^i}$ wählen. Betrachten wir damit den Grenzübergang $i \to \infty$, erhalten wir aus

$$\inf R \leq \frac{1}{1 + t_i + t_i^2 + \cdots + t_i^k}$$

schließlich die gewünschte Ungleichung:

$$\inf R \leq \frac{1}{1 + 1 + \cdots + 1} = \frac{1}{k+1}$$

Die Integrale der Potenzen VI

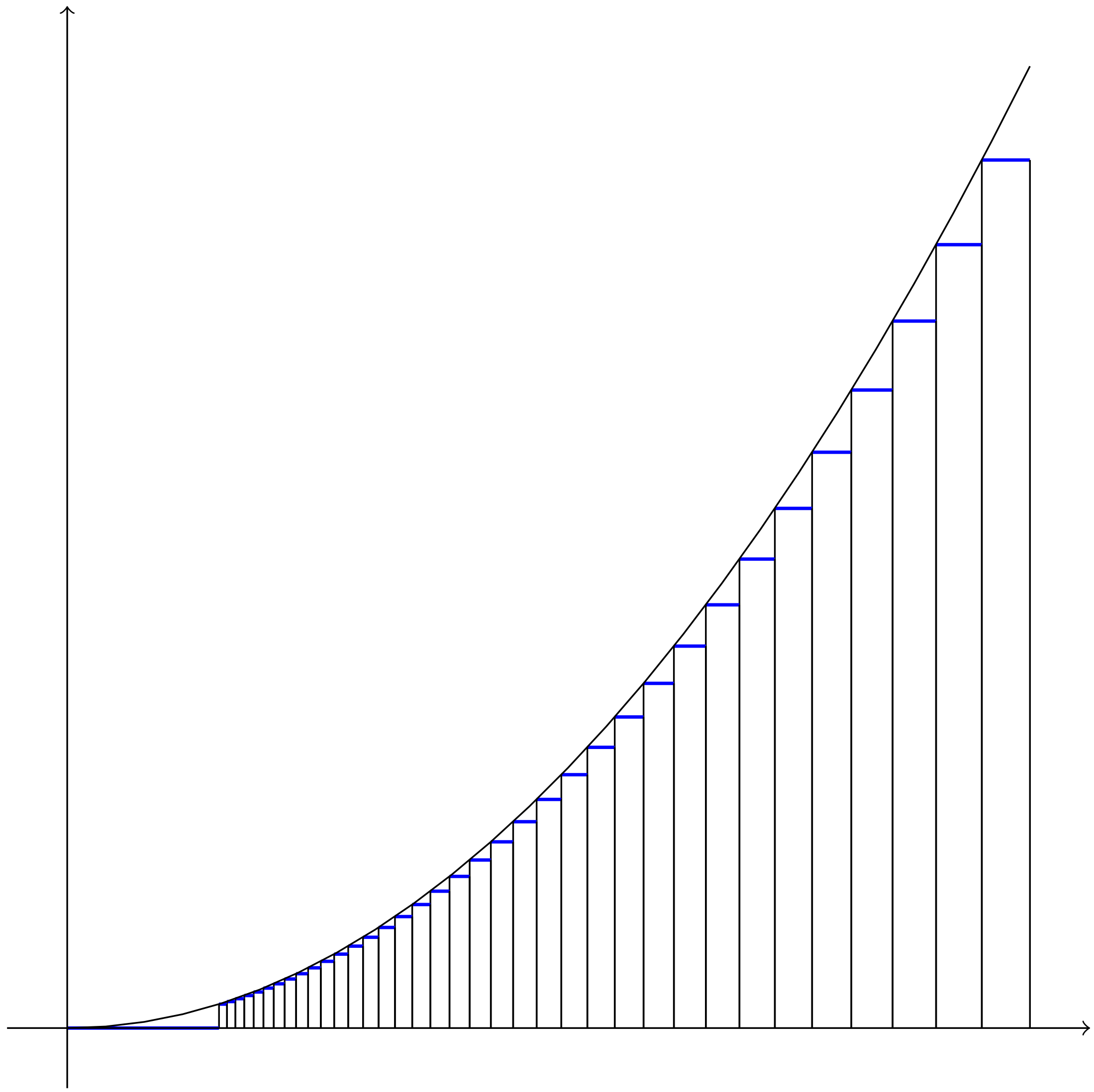
$$\sup L \geq \frac{1}{k+1}$$

Beweis. Um $\sup L$ abzuschätzen, betrachten wir die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} h_{t,N} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & 0 < x < t^N \\ t^{Nk} & t^N < x < t^{N-1} \\ \vdots & \vdots \\ t^{2k} & t^2 < x < t \\ t^k & t < x < 1 \\ -1 & \text{an Unterteilungspunkten} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Integrale der Potenzen VII

$$\sup L \geq \frac{1}{k+1}$$



Die Integrale der Potenzen VIII

$$\sup L \geq \frac{1}{k+1}$$

Beweis. mit $f > h_{t,N}$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h_{t,N} &= t^k(1-t) + t^{2k}(t-t^2) + \cdots + t^{Nk}(t^{N-1}-t^N) + 0(t^N - 0) \\
&= t^k(1-t)\left(1 + t^{k+1} + t^{2(k+1)} + \cdots + t^{(N-1)(k+1)}\right) \\
&= t^k(1-t)\frac{1-t^{N(k+1)}}{1-t^{k+1}} \in L
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sup L \geq t^k(1-t)\frac{1-t^{N(k+1)}}{1-t^{k+1}}$$

und mit dem Grenzüberganz $N \to \infty$ ergibt sich:

$$\sup L \geq t^k(1-t)\frac{1}{1-t^{k+1}} = t^k\frac{1-t}{1-t^{k+1}} = t^k\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^k}$$

Die Integrale der Potenzen IX

$$\sup L \geq \frac{1}{k+1}$$

Beweis. Daraus analog zum vorigen Fall:

$$\sup L \geq \frac{1}{k+1}$$

Also ist $\sup L = \frac{1}{k+1} = \inf R$. **q.e.d.**

Beobachtung 12.27. *Sind f und g reellwertige Funktionen definiert auf I und gilt $f \leq g$, dann wird jede von f strikt majorisierte Treppenfunktion auch von g strikt majorisiert. Es folgt:*

$$L(f) \subseteq L(g)$$

Sind f und g überdies integrierbar, dann ist

$$\int_I f = \sup L(f) \leq \sup L(g) = \int_I g \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Frage 12.28. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide integrierbar und es gelte $f < g$, d.h., f wird von g strikt majorisiert. Folgt dann auch eine strikte Ungleichung

$$\int_I f < \int_I g$$

für die Integrale? Wenn f und g beide Treppenfunktionen sind, haben wir in (12.16) eine positive Antwort gefunden. Für den allgemeinen Fall, sehe ich noch kein Argument. Später werden wir sehen, daß zumindest für *stetige* Funktionen die Antwort ebenfalls positiv ist.

Proposition 12.29. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann ist die Summe $f + g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:*

$$\int_I (f+g) = \left(\int_I f\right) + \left(\int_I g\right)$$

Beweis. Seien $f_\pm, g_\pm$ Treppenfunktionen auf I mit $f_- < f < f_+$ und und $g_- < g < g_+$. Dann sind $f_- + g_-$ und $f_+ + g_+$ ebenfalls Treppenfunktionen und es gilt:

$$f_- + g_- < f + g < f_+ + g_+$$

$$L(f+g) \supseteq \{x + y \mid x \in L(f) \text{ und } y \in L(g)\} =: L(f) + L(g)$$
$$R(f+g) \supseteq \{x + y \mid x \in R(f) \text{ und } y \in R(g)\} = R(f) + R(g)$$

$$\begin{aligned} \sup L(f+g) &\geq \sup L(f) + \sup L(g) \\ &= \inf R(f) + \inf R(g) \geq \inf R(f+g) \underset{(12.19)}{\geq} \sup L(f+g) \end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 12.30. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann ist das Vielfache $\alpha f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$$

Durch Kombination von (12.29) und (12.30) ergibt sich:

Korollar 12.31. *Seien* $f_1, \ldots, f_m : I \to \mathbb{R}$ *integrierbare Funktionen und* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *feste Faktoren. Dann ist die Linearkombination* $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i : I \to \mathbb{R}$ *integrierbar, und es gilt:*

$$\int_I \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_I f_i$$

q.e.d.

Streckung und Stauchung im Argument

Aufgabe 12.32. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha \neq 0$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} g : \alpha I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\alpha I} g = |\alpha| \int_I f$$

Proposition 12.33. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $J \subseteq I$ ein abgeschlossenes Teilintervall von I. Dann ist die Einschränkung $f|_J : J \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Sei f integrierbar, also $\sup L(f) = \inf R(f)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also Treppenfunktionen $g_- < f < g_+$ mit $\int_I g_+ - \int_I g_- = \int_I (g_+ - g_-) < \varepsilon$. Wir schränken $g_\pm$ auf das Teilintervall J ein und erhalten:

$$g_-|_J < f|_J < g_+|_J$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_J g_+ - \int_J g_- = \int_J (g_+ - g_-) \leq \int_I (g_+ - g_-) < \varepsilon$$

denn für positive Treppenfunktionen ist das Integral wirklich die Fläche unter dem Graphen. Es folgt:

$$\sup L(f|_J) \leq \inf R(f|_J) \leq \sup L(f|_J) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

und die Integrierbarkeit der Einschränkung $f|_J$ folgt. **q.e.d.**

Proposition 12.34. *Sei $I = [a, c]$ und $b \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sind die Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ beide integrierbar, so ist f integrierbar, und es gilt:*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Beweis. Wir zeigen

$$L(f) \supseteq L\big(f|_{[a,b]}\big) + L\big(f|_{[b,c]}\big) \qquad \text{und} \qquad R(f) \supseteq R\big(f|_{[a,b]}\big) + R\big(f|_{[b,c]}\big)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sup L(f) &\geq \sup L\big(f|_{[a,b]}\big) + \sup L\big(f|_{[b,c]}\big) \\ &= \inf R\big(f|_{[a,b]}\big) + \inf R\big(f|_{[b,c]}\big) \geq \inf R(f) \underset{(12.19)}{\geq} \sup L(f) \end{aligned}$$

Also ist f integrierbar mit: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Unterteilungsadditivität des Integral II

Proposition 12.34. *Sei $I = [a,c]$ und $b \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sind die Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ beide integrierbar, so ist f integrierbar, und es gilt:*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

$$L(f) \supseteq L\big(f|_{[a,b]}\big) + L\big(f|_{[b,c]}\big)$$

Beweis. Sei g_L eine Treppenfunktion auf $[a,b]$ mit $g_L < f|_{[a,b]}$ und g_R eine Treppenfunktion auf $[b,c]$ mit $g_R < f|_{[b,c]}$. Wir definieren

$$g : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} g_L(x) & a \le x \le b \\ g_R(x) & b < x \le c \end{cases}$$

Dann ist g eine Treppenfunktion mit $g < f$ und $\int_a^c g = \int_a^b g_L + \int_b^c g_R$: Wir müssen nur b als Unterteilungspunkt vorgeben. **q.e.d.**

Bemerkung 12.35. Wir setzen

$$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

und

$$\int_c^c f = 0$$

für alle a, b, c.

Damit ist dann unabhängig von den Größenverhältnissen zwischen a, b, und c stets

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

sobald f integrierbar ist auf dem kleinsten Intervall, das a, b und c enthält.

q.e.d.

Nochmal zur Integration der Potenzen I

Beispiel 12.36. *Für jeden Exponenten* $k \in \mathbb{N}$ *ist die Funktion* $f : x \mapsto x^k$ *auf* jedem *abgeschlossenen beschränkten Intervall* $[a, b]$ *integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b x^k \, \mathrm{d}\, x = \mu_k \big(b^{k+1} - a^{k+1} \big) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

Beweis. Zunächst wenden wir (12.32) auf das Beispiel (12.24) an und erhalten: Für $\alpha > 0$ ist $x \mapsto \frac{x^k}{\alpha^k}$ auf $[0, \alpha]$ integrierbar und es ist

$$\int_0^\alpha \frac{x^k}{\alpha^k} \, \mathrm{d}\, x = \int_0^\alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right)^k \mathrm{d}\, x = \alpha \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}\, x = \alpha \mu_k$$

Anwendung der Linearität ergibt die Integrierbarkeit von $x \mapsto x^k$ auf $[0, \alpha]$ mit:

$$\int_0^\alpha x^k \, \mathrm{d}\, x = \mu_k \alpha^{k+1}$$

Nochmal zur Integration der Potenzen II

Beispiel 12.36.

$$\int_a^b x^k \,\mathrm{d}\, x = \mu_k \bigl(b^{k+1} - a^{k+1}\bigr) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

Beweis. Für $\alpha < 0$ erhält man Integrierbarkeit auf $[\alpha, 0]$ mit:

$$\int_\alpha^0 \frac{x^k}{\alpha^k} \,\mathrm{d}\, x = -\mu_k \alpha$$

Also mit der Konvention (12.35) wieder:

$$\int_0^\alpha x^k \,\mathrm{d}\, x = \mu_k \alpha^{k+1}$$

Der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch Verkleben und wir haben:

$$\int_a^b x^k \,\mathrm{d}\, x = \int_0^b x^k \,\mathrm{d}\, x - \int_0^a x^k \,\mathrm{d}\, x = \mu_k \bigl(b^{k+1} - a^{k+1}\bigr) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 12.42. Sei M eine Menge und $f_\star : M \to \mathbb{R}$ sei eine Folge reellwertiger Funktionen auf M. Das ist nichts anderes als *eine* Funktion $f : \mathbb{N} \times M \to \mathbb{R}$, aber wir betrachten die Funktionen $x \mapsto f(i, x)$ als einzelne Funktionen auf M, indiziert durch das erste Argument i.

Definition 12.43. Sei M eine Menge und $f_\star : M \to \mathbb{R}$ eine Folge reellwertiger Funktionen auf M. Für jedes Element $m \in M$ ist dann $f_\star(m)$ eine Zahlenfolge. Wir sagen, daß die Funktionenfolge $f_\star$ konvergiert punktweise gegen die Funktion $g : M \to \mathbb{R}$, wenn $f_\star(m)$ für *jedes* $m \in M$ gegen $g(m)$ konvergiert. Wir können das ausbuchstabieren: $f_\star$ konvergiert punktweise gegen g genau dann, wenn für jedes $m \in M$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex $h \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$ für alle $i \geq h$ gilt. Formal:

$$\forall m \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h : f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$$

Definition 12.44. Sei M eine Menge und $f_\star : M \to \mathbb{R}$ eine Folge reellwertiger Funktionen auf M. Die Folge $f_\star$ konvergiert gleichmäßig gegen $g : M \to \mathbb{R}$, wenn wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex $h \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$ für alle $i \geq h$ und alle $m \in M$ gilt. Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists h \in \mathbb{N} \;\; \forall i \geq h \;\; \forall m \in M : f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$$

Man sieht, die beiden Varianten unterscheiden sich in der Abfolge der Quantoren. Daraus ergibt sich unmittelbar:

Beobachtung 12.45. *Konvergiert $f_\star : M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $g : M \to \mathbb{R}$, so konvergiert $f_\star$ auch punktweise gegen g.* **q.e.d.**

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists h \in \mathbb{N} \;\; \forall i \geq h \;\; \forall m \in M : f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$$

$$\forall m \in M \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists h \in \mathbb{N} \;\; \forall i \geq h : f_i(m) \in \mathbb{B}_\varepsilon(g(m))$$

Beispiel 12.46. *Sei $f(x) = \Sigma a_\star x^\star$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und I sei ein abgeschlossenes beschränktes Intervall in $(-R, R)$. Dann konvergiert die Funktionenfolge der Partialsummen*

$$f_m(x) := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

auf I gleichmäßig gegen die Funktion f.

Beweis. Sei $I = [a, b]$ mit $|a| < R$ und $|b| < R$. Sei c der größere der beiden Werte $|a|$ und $|b|$. Dann ist $0 < c < R$ und $\Sigma a_\star c^\star$ konvergiert absolut.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\Sigma a_\star c^\star$ absolut konvergiert, gibt es ein $h \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{i=h}^{\infty} |a_i|\, c^i < \varepsilon$ ist. Dann ist für jedes $m \geq h$ und jedes $x \in I$:

$$|f(x) - f_m(x)| = \left| \sum_{i>m} a_i x^i \right| \leq \sum_{i>m} \left| a_i x^i \right| \leq \sum_{i=h}^{\infty} |a_i|\, c^i < \varepsilon$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $f_\star$ gleichmäßig gegen f. **q.e.d.**

Integration gleichmäßiger Limiten I

Satz 12.47. *Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist g integrierbar, und es gilt*

$$\int_I g = \lim_{i\to\infty} \int_I f_i$$

Beweis. Seien L die Links- und R die Rechtsmenge der Funktion g.

Wegen gleichmäßiger Konvergenz gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Schwellindex $h \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$f_i(x) - \frac{\varepsilon}{4\,|I|} < g(x) \in < f_i(x) + \frac{\varepsilon}{4\,|I|} \qquad \forall x \in I, \quad \forall i \geq h$$

Da jedes f_i integrierbar ist, gibt es außerdem Treppenfunktionen $f_i^-, f_i^+ : I \to \mathbb{R}$ mit $f_i^- < f_i < f_i^+$ und

$$\int_I f_i^- < \int_I f_i < \int_I f_i^+ < \frac{\varepsilon}{4} + \int_I f_i^-$$

Integration gleichmäßiger Limiten II

Satz 12.47. *Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist g integrierbar, und es gilt*

$$\int_I g = \lim_{i\to\infty} \int_I f_i$$

Beweis. Dann sind $f_i^{\pm} \pm \frac{\varepsilon}{4|I|}$ Treppenfunktionen mit:

$$f_i^- - \frac{\varepsilon}{4\,|I|} < g < f_i^+ + \frac{\varepsilon}{4\,|I|}$$

Darum ist:

$$L \ni \int_I \left(f_i^- - \frac{\varepsilon}{4\,|I|}\right) = \int_I f_i^- - \frac{\varepsilon}{4} > \int_I f_i - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(12.20)}{\in} L \qquad \forall i \geq h$$

Analog ist:

$$\int_I f_i + \frac{\varepsilon}{2} \in R \qquad \forall i \geq h$$

Satz 12.47. *Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die* gleichmäßig *gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist g integrierbar, und es gilt*

$$\int_I g = \lim_{i\to\infty} \int_I f_i$$

Beweis.

$$\int_I f_i - \frac{\varepsilon}{2} \in L \qquad \text{und} \qquad \int_I f_i + \frac{\varepsilon}{2} \in R \qquad\qquad \forall i \geq h$$

Daraus folgen zwei Dinge. Zunächst folgt,

$$0 \leq \inf R - \sup L < \varepsilon \qquad\qquad \forall \varepsilon > 0$$

und daraus mit (8.9) die Integrierbarkeit von g:

$$\inf R = \sup L = \int_I g =: \zeta$$

Satz 12.47. *Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die* gleichmäßig *gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist g integrierbar, und es gilt*

$$\int_I g = \lim_{i\to\infty} \int_I f_i$$

Beweis. Zum anderen folgt nun auch:

$$\left|\int_I f_i - \zeta\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \forall i \geq h$$

Wieder gilt dies für jedes $\varepsilon > 0$ mit einem jeweils von ε abhängigen h. Das heißt, in jeder ε-Umgebung von ζ liegen fast alle $\int_I g$. Nach Definition der Konvergenz (9.8) ist also:

$$\int_I g = \zeta = \lim_{i\to\infty} \int_I f_i \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 12.49. *Sei $f(x) = \Sigma a_\star x^\star$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $[a,b]$ sei ein abgeschlossenes beschränktes Intervall in $(-R,R)$. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b a_i x^i \,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i a_i (b^{i+1} - a^{i+1})$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1}(b^{i+1} - a^{i+1})$$

Beweis. Wende Satz (12.47) auf Beispiel (12.46) an. **q.e.d.**

Beispiel 12.50.

$$\int_0^y \exp(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^y \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1} - 0^{k+1}}{(k+1)k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \exp(y) - 1$$

Punktweise Konvergenz reicht nicht!

Aufgabe 12.48. Die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz kann in (12.47) nicht zu punktweiser Konvergenz abgeschwächt werden. Finde Beispiele für folgende Szenarien:

1. Die Folge $f_\star$ konvergiert punktweise gegen g und alle f_i sind integrierbar, aber g ist nicht integrierbar.

2. Die Folge $f_\star$ konvergiert punktweise gegen g und alle f_i sind integrierbar, und g ist auch integrierbar, aber die Folge $\int_I f_\star$ konvergiert nicht.

3. Die Folge $f_\star$ konvergiert punktweise gegen g und alle f_i sind integrierbar, und g ist auch integrierbar, und die Folge $\int_I f_\star$ konvergiert, aber nicht gegen $\int_I g$.

Definition 12.52. Sei I ein beliebiges Intervall (offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, etc.) und $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf I. Wir nennen f <u>integrierbar</u> auf I, wenn für jedes abgeschlossene beschränkte Teilintervall $J \subseteq I$ das bestimmte Integral $\int_J f$ existiert.

Definition 12.53. Sei I ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbare reellwertige Funktion auf I. Wir nennen eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ ein <u>unbestimmtes Integral</u> von f, wenn für beliebige Argumente $a, b \in I$ gilt:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Integrierbare Funktionen haben Integrale I

Proposition 12.54. *Jede integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein unbestimmtes Integral. Es ist eindeutig bestimmt durch f bis auf Addition einer Konstanten.*

Beweis (Eindeutigkeit). Sei $r \in I$ fest gewählt.

Seien $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Integrale von f. Für $x \in I$ ist:

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= (F_1(x) - F_1(r)) - (F_2(x) - F_2(r)) + (F_1(r) - F_2(r)) \\ &= \int_r^x f - \int_r^x f + (F_1(r) - F_2(r)) \\ &= F_1(r) - F_2(r) \end{aligned}$$

Also ist $F_1(x) - F_2(x)$ unabhängig von x, und somit unterscheiden sich F_1 und F_2 nur um eine additive Konstante.

Proposition 12.54. *Jede integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein unbestimmtes Integral. Es ist eindeutig bestimmt durch f bis auf Addition einer Konstanten.*

Beweis (Existenz). Wir halten $r \in I$ weiterhin fest.

Da f auf ganz I integrierbar ist, können wir eine Funktion definieren durch

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_r^x f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

Diese Funktion F ist ein unbestimmtes Integral von f nach (12.34) und (12.35):

$$\int_a^b f = \int_r^b f - \int_r^a f = F(b) - F(a)$$

Das zeigt die Existenz. **q.e.d.**

Beispiel 12.55. *Sei* $f(x) := \Sigma a_\star x^\star$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R*. Dann ist wegen (12.49) die Funktion* f *auf dem offenen Intervall* $(-R, R)$ *integrierbar und durch gliedweise Integration erhalten wir ein unbestimmtes Integral:*

$$\begin{aligned} F : (-R, R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(r)\,\mathrm{d}\,r = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, daß die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ *nach (11.27) ebenfalls den Konvergenzradius* R *hat.*

Beispiel 12.56. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ist im ganzen Definitionsbereich monoton fallend. Also ist sie integrierbar und

$$\begin{aligned} \ln : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^x f \end{aligned}$$

ist ein unbestimmtes Integral. Wir nennen $\ln$ *den natürlichen Logarithmus.*

$$\boxed{\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,r}$$

Proposition 12.57. *Der natürliche Logarithmus genügt folgender Funktionalgleichung:*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \forall x, y \in (0, \infty)$$

Beweis.

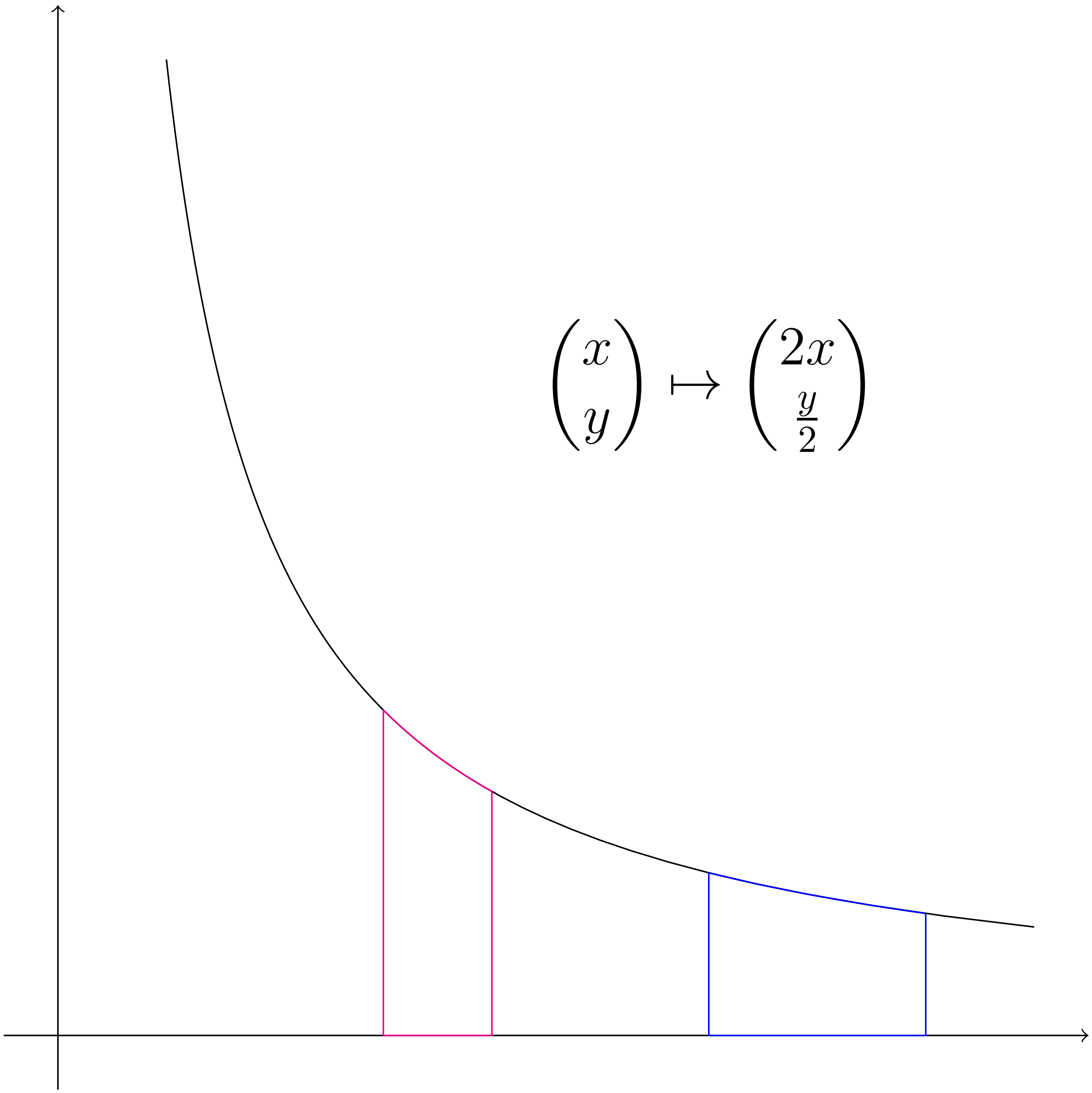
$$\begin{aligned}\ln(xy) &= \int_1^{xy} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,r = \int_1^{x} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,r + \int_x^{xy} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,r = \ln(x) + x\int_x^{xy} \frac{1}{xr}\,\mathrm{d}\,r \\ &= \ln(x) + \frac{x}{x}\int_1^{y} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,r = \ln(x) + \ln(y) \qquad \textbf{q.e.d.}\end{aligned}$$

Bemerkung 12.58. Es sei an die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erinnert:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \forall x, y$$

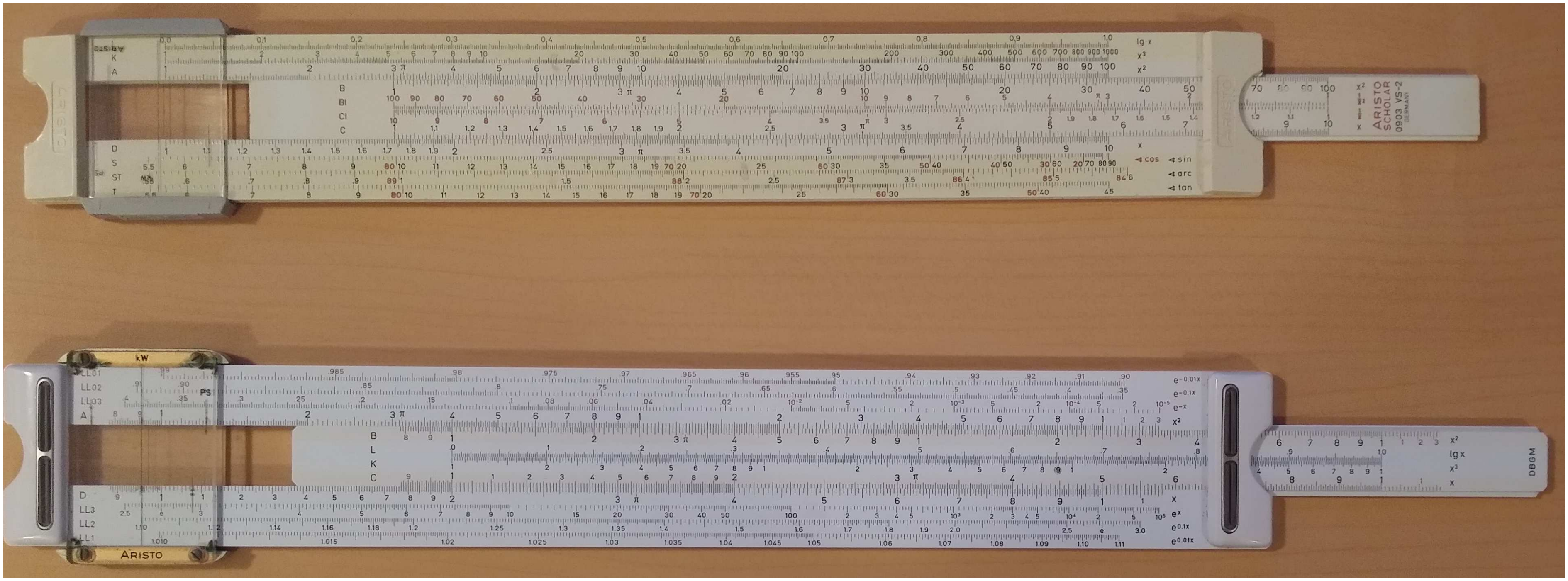
In der Funktionalgleichung des Logarithmus sind die Rollen von Addition und Multiplikation vertauscht. Es wird sich herausstellen, daß der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialabbildung ist.

Die Prokrustesstreckung ist flächentreu



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

Rechenschieber



Das Bild einer Menge unter einer Abbildung

Definition 13.1. Sei $f : M \to L$ eine Abbildung und $A \subseteq M$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs. Das Bild der Teilmenge A unter der Abbildung f bezeichnen wir mit:

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

Für eine beliebige Menge K setzen wir

$$f(K) := f(K \cap M) = \{f(x) \mid x \in K \cap M\}$$

Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

Definition 13.2. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig im Punkt</u> $x \in I$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$

Sie heißt <u>stetig</u>, wenn sie in *jedem Punkt* $x \in I$ stetig ist:

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$

Wir nennen die Abbildung f <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \; : \; f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$

Beachte, daß die Bedingungen sich nur in der Reihenfolge der Quantoren unterscheiden.

Bemerkung 13.3. Gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit.

Folgenstetigkeit

Definition 13.4. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt folgen-stetig im Punkt $x \in I$, wenn für jede Folge $a_\star$ von Zahlen in I, die gegen x konvergiert, die Folge $f(a_\star)$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\forall a_\star \text{ Folge in } I \;:\; x = \lim_{\star \to \infty} a_\star \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{\star \to \infty} f(a_\star)$$

Die Abbildung f heißt folgen-stetig, wenn sie in jedem Punkt folgen-stetig ist.

Proposition 13.5. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in I$, dann ist f in x stetig genau dann, wenn f in x folgen-stetig ist.*

Korollar 13.6. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn sie folgen-stetig ist.*

Beweis von Proposition 13.5. Zunächst nehmen wir an, f sei stetig in x. Sei ferner $a_\star$ eine Folge in I, die gegen x konvergiert. Zu zeigen ist, daß die Folge $f(a_\star)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f in x stetig ist, gibt es ein zugeöriges $\delta > 0$ mit $f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$. Ist nun $a_\star$ eine Folge, die gegen x konvergiert, so liegen fast alle Folgenglieder in $\mathbb{B}_\delta(x)$, weil $\delta > 0$ ist. Also gibt es einen Index $h \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$a_i \in \mathbb{B}_\delta(x) \qquad \forall i \geq h$$

Aus $f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$ folgt dann:

$$f(a_i) \in \mathbb{B}_\varepsilon(f(x)) \qquad \forall i \geq h$$

Das aber heißt, daß $f(a_\star)$ gegen $f(x)$ konvergiert. **q.e.d.**

Folgenstetigkeit impliziert Stetigkeit

Beweis von Proposition 13.5. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß f nicht stetig in x sei. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so daß für jedes noch so kleine $\delta > 0$ ein $x' \in \mathbb{B}_\delta(x) \cap I$ mit $f(x') \notin \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ existiert. Daraus basteln wir uns eine gegen x konvergierende Folge: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ wählen wir (Auswahlaxiom) ein $a_m \in I$ mit

1. $|x - a_m| < \frac{1}{1+m}$.
2. $|f(x) - f(a_m)| \geq \varepsilon$

Die erste Bedingung impliziert, daß $a_\star$ gegen x konvergiert. Die zweite impliziert, daß $f(a_\star)$ auf keinen Fall gegen $f(x)$ konvergiert. **q.e.d.**

Beispiel 13.10. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide stetig im Punkt $x \in I$. Dann ist auch jede Linearkombination*

$$\alpha f + \beta g : I \to \mathbb{R}$$

stetig in x. Ebenso ist das Produkt

$$fg : I \to \mathbb{R}$$

stetig an der Stelle x. Wenn g nirgends in I verschwindet, ist der Quotient $\frac{f}{g}$ definiert und stetig an der Stelle x.

Sei nämlich $a_\star$ eine beliebige Folge in I, die gegen x konvergiert. Dann ist

$$(\alpha f + \beta g)(a_\star) = \alpha f(a_\star) + \beta g(a_\star)$$

Mit $f(x) = \lim_{\star\to\infty} f(a_\star)$ und $g(x) = \lim_{\star\to\infty} g(a_\star)$ folgt

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \lim_{\star\to\infty} (\alpha f + \beta g)(a_\star)$$

aus (10.18). Die Stetigkeit von fg und $\frac{f}{g}$ ergibt sich ebenso.

Beispiele stetiger Funktionen I

Beispiel 13.8. *Jede konstante Funktion f ist gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man $\delta = 1$ wählen.*

Beispiel 13.9. *Die identische Funktion $x \mapsto x$ ist gleichmäßig stetig: Man wähle stets $\delta = \varepsilon$.*

Beispiel 13.11. *Jedes Polynom*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

beschreibt eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion: Ergibt sich aus (13.10) und den vorigen Beispielen.

Frage. *Was ist mit $\exp$ (beschrieben durch eine Potenzreihe)?*

Was ist mit $\ln$ (beschrieben als Integral)?

Die Stetigkeit des unbestimmten Integrals I

Proposition 13.15. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $F : I \to \mathbb{R}$ ein unbestimmtes Integral. Dann ist F stetig.*

Beweis. Auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq I$ ist f beschränkt nach oben und unten, denn es gibt majorisierende und majorisierte Treppenfunktionen. Sei K_+ eine obere Schranke und K_- eine untere Schranke.

Für $a \leq r \leq s \leq b$ ist:

$$(s - r)K_- \leq \int_r^s f|_{[r,s]} = F(s) - F(r) \leq (s - r)K_+$$

und wir erhalten für $x, x' \in [a, b]$ mit $r = \min(x, x')$ und $s = \max(x, x')$:

$$|F(x) - F(x')| \leq |x - x'| \, K \qquad \text{mit } K := \max\{|K_+|, |K_-|\}$$

Daraus ergibt sich die Stetigkeit an einer Stelle $x \in (a, b)$ im *Inneren*.

Die Stetigkeit des unbestimmten Integrals II

Proposition 13.15. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $F : I \to \mathbb{R}$ ein unbestimmtes Integral. Dann ist F stetig.*

Beweis. Für $x, x' \in [a, b] \subseteq I$ ist:

$$|F(x) - F(x')| \leq |x - x'| K \qquad \text{mit } K := \max\{|K_+|, |K_-|\}$$

Gibt es kein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq I$ mit $x \in (a, b)$, so liegt x am Rand von I. Dann betrachten wir ein nicht-entartetes Intervall $[x, b]$ oder $[a, x]$ und die entsprechende Hälfte des eben gegebenen Arguments tut's schon.
q.e.d.

Beispiel 13.16. *Insbesondere ist der natürliche Logarithmus im ganzen Definitionsbereich stetig.*

Eine nicht gleichmäßig stetige Funktion

Beispiel 13.20. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Stetigkeit folgt mit (13.10).

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{2} > \delta > 0$. Dann gilt für $x \in (0, \delta)$:

$$(0,1) \cap \mathbb{B}_\delta(x) = (0, x + \delta)$$

Insbesondere ist f auf $(0,1) \cap \mathbb{B}_\delta(x)$ unbeschränkt. Darum ist

$$f(\mathbb{B}_\delta(x)) \not\subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$ **q.e.d.**

Beobachtung 13.21. *Jedes nicht-entartete Intervall enthält rationale Zahlen, die in Grunddarstellung einen geraden Nenner haben, und rationale Zahlen, die in Grunddarstellung einen ungeraden Nenner haben.*

Beweis. Ein Bruch der Form $\frac{2m+1}{n}$ hat in Grunddarstellung einen geraden Nennen genau dann, wenn n gerade ist.

Halten wir den Nenner n fest, so ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen dieser Form gerade $\frac{2}{n}$. Ist also n so groß, daß $\frac{2}{n}$ kleiner ist als die Länge des Intervalls, so fällt eine rationale Zahl dieser Form mit dem gewählten Nenner in das Intervall. Offenbar können wir sowohl gerade als auch ungerade Nenner vorgeben, die groß genug sind. **q.e.d.**

Beispiel 13.22. *Eine Funktion f die auf rationalen Zahl dann 0 ist, wenn der Nenner in Grunddarstellung gerade ist, und 2, wenn der Nenner in Grunddarstellung ungerade ist, ist nirgends stetig: Für x beliebig und $0 < \varepsilon < 1$ läßt sich einfach kein $\delta > 0$ finden.*

Gleichmäßige Limiten von Folgen stetiger Funktionen I

Proposition 13.17. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sind alle $f_\star$ stetig (an der Stelle x), so ist auch f stetig (an der Stelle x).*

Beweis (mit Folgenstetigkeit). Sei $a_\star$ eine Folge in I, die gegen x konvergiert. Jede Funktion f_i ist stetig an der Stelle x. Also konvergiert $f_i(a_\star)$ gegen $f_i(x)$. Wir wollen zeigen, daß $f(a_\star)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Dies geschieht mittels der Dreiecksunlgeichung. Es ist nämlich:

$$|f(x) - f(a_j)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a_j)| + |f_i(a_j) - f(a_j)| \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Weil $f_\star$ *gleichmäßig* gegen f konvergiert, ist:

$$|f_i(r) - f(r)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall r \in I \text{ für fast alle } i$$

Die gilt insbesondere für $r = x$ und $r = a_j$. Also gibt es ein i mit

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f_i(a_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall j$$

Gleichmäßige Limiten von Folgen stetiger Funktionen II

Proposition 13.17. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sind alle $f_\star$ stetig (an der Stelle x), so ist auch f stetig (an der Stelle x).*

Beweis (mit Folgenstetigkeit). Es gibt ein i mit:

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f_i(a_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall j$$

Schließlich ist f_i stetig an der Stelle x. Also:

$$|f_i(x) - f_i(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für fast alle } j$$

Das aber impliziert, daß für fast alle j gilt:

$$|f(x) - f(a_j)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a_j)| + |f_i(a_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

Damit konvergiert $f(a_\star)$ gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Gleichmäßige Limiten von Folgen stetiger Funktionen III

Proposition 13.17. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sind alle $f_\star$ stetig (an der Stelle x), so ist auch f stetig (an der Stelle x).*

Beweis (mit ε-δ-Stetigkeit). Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x' \in I$ gilt:

$$|x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Wir benutzen wieder die Dreiecksungleichung:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|$$

Weil die Folge $f_\star$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es einen Index i, so daß gilt:

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f(x') - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x' \in I$$

Proposition 13.17. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sind alle $f_\star$ stetig (an der Stelle x), so ist auch f stetig (an der Stelle x).*

Beweis (mit ε-δ-Stetigkeit). Es gibt ein i, so daß gilt:

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f(x') - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x' \in I$$

Ferner ist f_i stetig an der Stelle x, also gibt es $\delta > 0$ mit

$$|x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Für dieses δ und jedes $x' \in \mathrm{B}_\delta(x)$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')| < \varepsilon$$

Dieses $\delta > 0$ bezeugt dann auch, daß f an der Stelle x stetig ist. **q.e.d.**

Korollar 13.18. *Jede Potenzreihe beschreibt im Gebiet absoluter Konvergenz eine stetige Funktion. Insbesondere ist* $\exp$ *stetig.* **q.e.d.**

Satz 13.26. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a, b]$ beschränkt.*

Beweis. Wir zeigen, daß f nach oben beschränkt ist. Andernfalls gibt es eine monoton wachsende und unbeschränkte Folge $y_\star$ im Bild von f. Für jedes y_i wählen wir ein Urbild a_i und erhalten (mit dem Auswahlaxiom) eine Folge $a_\star$ im Intervall $[a, b]$, so daß $f(a_\star)$ monoton wächst und nach oben unbeschränkt ist. Man beachte, daß sich diese Eigenschaften auf jede Teilfolge vererben.

Da $a_\star$ beschränkt ist, können wir zu einer konvergenten Teilfolge übergehen und somit o.B.d.A. annehmen, daß $a_\star$ konvergiert. Sei $x := \lim_{\star\to\infty} a_\star \in [a, b]$. Wegen Stetigkeit konvergiert $f(a_\star)$ gegen $f(x)$.

Aber die konvergente Folge $f(a_\star)$ kann nicht Teilfolge einer monoton wachsenden und nach oben unbeschränkten Folge sein.

Daß f nach unten beschränkt ist, sieht man analog ein. **q.e.d.**

Maxima und Minima auf kompakten Intervallen

Satz 13.27. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f in ihrem Definitionsbereich ihr Minimum und ihr Maximum an. Das heißt es gibt $r, s \in [a,b]$ mit*

$$f(r) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$
$$f(s) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Beweis. Da f auf $[a,b]$ beschränkt (13.26) ist, existiert das Supremum $\sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und (Auswahlaxiom!) eine Folge $y_\star = f(a_\star)$ im Bild von f, die gegen das Supremum konvergiert:

$$\sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \lim_{\star\to\infty} f(a_\star)$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $a_\star$ gegen eine Stelle $s \in [a,b]$ konvergiert. Da f an der Stelle s stetig ist, folgt:

$$\sup\{f(s) \mid x \in [a,b]\} = \lim_{\star\to\infty} f(a_\star) = f(s)$$

Daß die Funktion f ihr Minimum annimt, sieht man auf gleichem Wege.

q.e.d.

Satz 13.28. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und y liege zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es eine Stelle $x \in [a,b]$, mit $f(x) = y$.*

Beweis. Für $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ ist nichts zu zeigen. Wir behandeln den Fall $f(a) < y < f(b)$. Der umgekehrte Fall hat einen entsprechenden Beweis.

Setze

$$L := \{r \in [a,b] \mid \forall s \in [a,r] \;:\; f(s) < y\}$$
$$R := \{r \in [a,b] \mid \exists s \in [a,r] \;:\; f(s) \geq y\}$$

Dann ist $L < R$ und $[a,b] = L \cup R$. Außerdem ist $a \in L$ und $b \in R$. Es folgt:

$$\sup L = \inf R =: x$$

Wir behaupten, daß $f(x) = y$ ist. Zunächst läßt sich x als Grenzwert einer Folge aus L beschreiben. Mit Stetigkeit folgt dann $f(x) \leq y$.

Aus $x = \inf R$ ergibt sich jedoch, daß wir x als Grenzwert einer Folge $a_\star$ darstellen können, mit $f(a_i) \geq y$ für jeden Index i. Dann folgt mit Stetigkeit $f(x) \geq y$. **q.e.d.**

Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen I

Proposition 13.29. *Sei $I = [a, b]$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist eine auf I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sogar gleichmäßig stetig auf I.*

Beweis. Setze für $x \in I$ und $\varepsilon > 0$:

$$\Delta_\varepsilon(x) := \{\delta > 0 \mid f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))\}$$
$$\overline{\delta}_\varepsilon(x) := \sup \Delta_\varepsilon(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Zu zeigen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\overline{\delta}_\varepsilon(x) > \delta$ für jedes $x \in I$.

Widerspruchsannahme: $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists a_\star \ : \ \lim_{\star\to\infty} \overline{\delta}_\varepsilon(a_\star) = 0$.

O.B.d.A. (Übergang zu konvergenter Teilfolge): $\lim_{\star\to\infty} a_\star = r \in I$. Hier benutzen wir, daß I abgeschlossen und beschränkt ist.

Zunächst beobachten wir, daß für $\varepsilon' < \varepsilon$ die Inklusion $\Delta_{\varepsilon'}(x) \subseteq \Delta_\varepsilon(x)$ gilt. Daraus folgt $0 < \overline{\delta}_{\varepsilon'}(x) \leq \overline{\delta}_\varepsilon(x)$. Mithin ist auch $\overline{\delta}_{\varepsilon'}(a_\star)$ eine Nullfolge.

Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen II

Proposition 13.29. *Sei $I = [a, b]$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist eine auf I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sogar gleichmäßig stetig auf I.*

Beweis. O.B.d.A. $\lim_{\star\to\infty} a_\star = r \in I$. Die Folge $\overline{\delta}_\varepsilon(a_\star)$ konvergiert gegen 0. Setze: $\delta := \overline{\delta}_{\frac{\varepsilon}{2}}(r) > 0$.

Dann gibt es einen Index $h \in \mathbb{N}$, daß $a_i \in \mathbb{B}_{\frac{\delta}{2}}(r)$ für jeden Index $i \geq h$ gilt.

Ist nun $s \in I$ mit $|s - a_i| < \frac{\delta}{2}$ ist dann:

$$|s - r| \leq |s - a_i| + |a_i - r| < \delta$$

und:

$$|f(s) - f(a_i)| \leq |f(s) - f(r)| + |f(r) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also folgt:

$$\overline{\delta}_\varepsilon(a_i) > \frac{\delta}{2} \qquad \forall i \geq h$$

Das steht im Widerspruch dazu, daß $\overline{\delta}_\varepsilon(a_\star)$ eine Nullfolge ist. **q.e.d.**

Satz 13.30. *Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ definiert auf einem Intervall I ist integrierbar auf I. Zur Erinnerung: Das heißt, für jedes Paar $a < b$ in I existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f$.*

Beweis. Nach (13.29) ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Wir wenden nun das Kriterium (12.22) an. Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen gleichmäßiger Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x' \in [a, b]$ gilt:

$$|x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

Wähle eine Unterteilung $\mathcal{J} = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$, so daß jedes Unterteilungsstück eine Länge $a_{i+1} - a_i < \delta$ hat:

$$\max(\{f([a_i, a_{i+1}])\}) - \min(\{f([a_i, a_{i+1}])\}) < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \qquad \forall i$$

Darum können wir Treppenfunktionen $f_- \leq f \leq f_+$ finden mit:

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- < \varepsilon$$

q.e.d.

Der Mittelwertsatz I

Mittelwertsatz 13.35. *Sei $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\rho \geq 0$. Ferner sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stelle $t \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f\rho = f(t) \int_a^b \rho$$

Beweis. Wir betrachten die stetige (13.10) Funktion

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \int_a^b \rho - \int_a^b f\rho = \int_a^b (f(x) - f(s))\rho(s) \,\mathrm{d}\, s$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Maximumprinzip (13.27) Stellen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ mit:

$$f(x_{\min}) = \inf f \qquad \text{und} \qquad f(x_{\max}) = \sup f$$

Der Mittelwertsatz II

Mittelwertsatz 13.35. *Sei $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\rho \geq 0$. Ferner sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stelle $t \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f\rho = f(t) \int_a^b \rho$$

Beweis. Dann ist

$$g(x_{\min}) = f(x_{\min}) \int_a^b \rho - \int_a^b f\rho = \int_a^b \underbrace{(\inf f - f(s))}_{\leq 0} \underbrace{\rho(s)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\, s \leq 0$$

$$g(x_{\max}) = f(x_{\max}) \int_a^b \rho - \int_a^b f\rho = \int_a^b \underbrace{(\sup f - f(s))}_{\geq 0} \underbrace{\rho(s)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\, s \geq 0$$

Nun ist auch g stetig (13.10) und somit gibt es nach dem Zwischenwertsatz (13.28) eine Stelle t mit $g(t) = 0$. Das aber heißt:

$$f(t) \int_a^b \rho = \int_a^b f\rho$$

q.e.d.

Der Mittelwertsatz III

Für die Dichtefunktion $\rho(x) := 1$ folgt unmittelbar:

Korollar 13.36. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (und damit integrierbar). Dann gibt es eine Stelle $t \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f = (b-a)f(t)$$

q.e.d.

Bemerkung 13.37. Die Vortstellung ist, daß $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ der „mittlere Wert“ von f auf dem Intervall $[a,b]$ ist. Die Aussage ist, daß dieser Wert irgendwo angenommen wird.

Aufgabe 13.40. Seien $f, \rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dabei sei $\rho \geq 0$. Ferner seien zwei Schranken $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \leq f \leq \beta$ gegeben.

Zeige: Es gibt eine Stelle $t \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f\rho = \alpha \int_a^t \rho + \beta \int_t^b \rho$$

Strenge Monotonie des Integral für stetige Funktionen

Nun erhalten wir auch die positive Antwort für stetig Funktionen auf die Frage (12.28):

Korollar 13.38. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $0 < f$. *Dann ist* $0 < \int_a^b f$.

Beweis. Wir wissen aus (12.27), daß $0 \leq \int_a^b f$ ist. Würde das Integral verschwinden, müßte f nach dem Mittelwertsatz (13.36) den Wert 0 irgendwo annehmen:

$$\exists t \ : \ 0 = \int_a^b f = (b - a) f(t)$$

Es gilt sogar mehr:

Aufgabe 13.39. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner sei $0 \leq f$ und für ein $r \in [a, b]$ sei $0 < f(r)$. Zeige, daß $0 < \int_a^b f$.

Produkte integrierbarer Funktionen I

Proposition 12.37. *Zu einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ definieren wir die erweiterten Links- und Rechtsmengen wiefolgt:*

$$\tilde{L} = \tilde{L}(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, g < f \text{ und } g \text{ integrierbar} \right\}$$
$$\tilde{R} = \tilde{R}(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, f < g \text{ und } g \text{ integrierbar} \right\}$$

Dann ist wegen (12.27) $\tilde{L} \leq \tilde{R}$. Insbesondere ist $\tilde{R}$ nach unten beschränkt, wenn $\tilde{L}$ nicht-leer ist. Umgekehrt ist $\tilde{L}$ nach oben beschränkt, wenn $\tilde{R}$ nicht-leer ist.

Die Abbildung f ist integrierbar genau dann, wenn $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ beide nicht-leer sind und $\sup \tilde{L} = \inf \tilde{R}$ gilt.

Beweis. Da jede Treppenfunktion integrierbar ist, gelten die Inklusionen:

$$L \subseteq \tilde{L} \qquad \text{und} \qquad R \subseteq \tilde{R}$$

Produkte integrierbarer Funktionen II

$$L \subseteq \tilde{L} = \tilde{L}(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, g < f \text{ und } g \text{ integrierbar} \right\}$$
$$R \subseteq \tilde{R} = \tilde{R}(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, f < g \text{ und } g \text{ integrierbar} \right\}$$

Beweis (Fortsetzung). Insbesondere sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ nicht-leer, wenn L und R nicht-leer sind. Außerdem folgt aus den Inklusionen die Ungleichung:

$$\sup L \leq \sup \tilde{L} \leq \inf \tilde{R} \leq \inf R$$

Sei nun $\tilde{R}$ nicht-leer. Dann gibt es eine integrierbare Funktion $g > f$. Weil g integrierbar ist, gibt es eine Treppenfunktion $g_+ > g > f$. Also ist auch R nicht-leer:

$$R \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{R} \neq \emptyset$$

Analog argumentiert man:

$$L \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{L} \neq \emptyset$$

Produkte integrierbarer Funktionen III

$$R \subseteq \tilde{R} = \tilde{R}(f) := \left\{ \int_I g \,\middle|\, f < g \text{ und } g \text{ integrierbar} \right\}$$

Beweis (Fortsetzung). Sei $\tilde{R} \neq \emptyset$ überdies nach unten beschränkt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine integrierbare Funktion $g > f$ mit $\frac{\varepsilon}{2} + \inf \tilde{R} > \int_I g$. Wir können ferner eine Treppenfunktion $g_+ > g > f$ finden, so daß auch $\frac{\varepsilon}{2} + \int_I g > \int_I g_+$ gilt. Dann aber ist $\varepsilon + \inf \tilde{R} > \int_I g_+ \geq \inf R$. Da diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\inf R \leq \inf \tilde{R}$.

Entsprechend gilt $\sup \tilde{L} \leq \sup L$, falls $\tilde{L}$ nicht-leer und nach oben beschränkt ist.

Also sind L und R beide nicht-leer genau dann, wenn $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ beide nicht-leer sind. In diesem Fall ist überdies

$$\sup L = \sup \tilde{L} \qquad \text{und} \qquad \inf R = \inf \tilde{R}$$

Also ist f genau dann integrierbar, wenn $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ beide nicht-leer sind und $\sup \tilde{L} = \inf \tilde{R}$ gilt. **q.e.d.**

Produkte integrierbarer Funktionen IV

Beobachtung 12.39. *Das Produkt einer Treppenfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ und einer integrierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Zunächst (12.30) ist das Produkt einer integrierbaren Funktion mit einer Konstanten wieder integrierbar. Nun zerfällt der Definitionsbereich der Treppenfunktion g in endlich viele Intervalle, auf denen die Funktion konstant ist. Auf jedem dieser Unterteilungsstücke ist das Produkt fg also integrierbar. Aus (12.34) folgt dann die Integrierbarkeit des Produktes fg auf I.

Produkte integrierbarer Funktionen V

Proposition 12.40. *Das Produkt zweier integrierbarer Funktionen* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis. Zunächst ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$fg = (f + \alpha)g - \alpha g$$

Also ist fg integrierbar, wenn $(f + \alpha)g$ integrierbar ist. Durch geeignete Wahl von α können wir also o.B.d.A. annehmen, daß $f > 0$ ist: Integrierbare Funktionen sind beschränkt. Deshalb gibt es auch ein $\beta > 0$ mit $f < \beta$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da g integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen $g_- < g < g_+$ mit:

$$\int_I g_- < \int_I g_+ < \frac{\varepsilon}{\beta} + \int_I g_-$$

Nach (12.39) sind $fg_- < fg$ und $fg_+ > fg$ integrierbar. Also ist:

$$\int_I fg_- \in \tilde{L}(fg) \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad \int_I fg_+ \in \tilde{R}(fg) \neq \emptyset$$

Proposition 12.40. *Das Produkt zweier integrierbarer Funktionen* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Treppenfunktionen $g_- < g < g_+$ mit:

$$fg_- < fg < fg_+ \qquad\qquad f < \beta$$

$$\int_I g_- < \int_I g_+ < \tfrac{\varepsilon}{\beta} + \int_I g_-$$

$$\int_I fg_- \in \tilde{L}(fg) \neq \emptyset \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \int_I fg_+ \in \tilde{R}(fg) \neq \emptyset$$

Beweis (Fortsetzung). Ferner ist

$$\int_I fg_+ - \int_I fg_- = \int_I f(g_+ - g_-) \leq \int_I \beta(g_+ - g_-) \leq \beta\frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und es folgt $\sup \tilde{L}(fg) = \inf \tilde{R}(fg)$, woraus mit (12.37) die Integrierbarkeit von fg folgt. **q.e.d.**

Der Kehrwert einer integrierbaren Funktion I

Proposition 12.41. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbar mit $0 < \alpha < f$ für eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\frac{1}{f}$ integrierbar.*

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\alpha \leq f_- < f < f_+$ mit

$$\int_I f_- < \int_I f_+ < \alpha^2\varepsilon + \int_I f_-$$

Der Kehrwert einer nirgends verschwindenden Treppenfunktion ist wieder eine Treppenfunktion (man kann dieselbe bezeugende Unterteilung verwenden). Wir behaupten, daß die Fläche zwischen $\frac{1}{f_-}$ und $\frac{1}{f_+}$ höchstens ε ist. Das reicht nach (12.22).

Sei $\mathcal{J} = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ eine Unterteilung die bezeugt, daß f_- und f_+ Treppenfunktionen sind. Seien $x_i \in (a_i, a_{i+1})$ Stützstellen. Dann ist nach Wahl von f_- und f_+:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(f_+(x_i) - f_-(x_i)) < \alpha^2\varepsilon$$

Der Kehrwert einer integrierbaren Funktion II

Proposition 12.41. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbar mit $0 < \alpha < f$ für eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\frac{1}{f}$ integrierbar.*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(f_+(x_i) - f_-(x_i)) < \alpha^2 \varepsilon$$

Beweis (Fortsetzung). Wir rechnen für den Kehrwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\left(\frac{1}{f_-(x_i)} - \frac{1}{f_+(x_i)}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\left(\frac{f_+(x_i) - f_-(x_i)}{f_-(x_i)\, f_+(x_i)}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\left(\frac{f_+(x_i) - f_-(x_i)}{\alpha^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(f_+(x_i) - f_-(x_i)) \\
&< \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

q.e.d.

Definition 14.1. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen, daß f an der Stelle $t \in I$ mindestens von k-ter Ordnung verschwindet, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

und f verschwindet an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung verschwindet, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

Bemerkung 14.2. Ein Blick auf die Quantoren genügt, und wir sehen, daß eine Funktion, die von höherer als k-ter Ordnung verschwindet, auch von mindestens k-ter Ordnung verschwindet.

Vom Verschwinden II

Definition 14.1. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen, daß f an der Stelle $t \in I$ <u>mindestens von k-ter Ordnung verschwindet</u>, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \; : \; |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

und f verschwindet an der Stelle t von <u>höherer als k-ter Ordnung verschwindet</u>, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \; : \; |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

Bemerkung 14.4. Die Funktion f verschwindet an der Stelle t von mindestens 0-ter Ordnung genau dann, wenn f in einer offenen Umgebung von t beschränkt ist. Warnung: f muß also bei t gar nicht verschwinden!

Die Funktion f verschwindet an der Stelle t von höherer als 0-ter Ordnung genau dann, wenn $f(t) = 0$ ist und f an der Stelle t stetig ist.

Beweis. Umformulierungen der Definition: der Faktor $|x - t|^0 = 1$ fällt weg.

q.e.d.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

Bemerkung 14.4. Die Funktion f verschwindet an der Stelle t von mindestens erster Ordnung genau dann, wenn es auf einer offenen Umgebung von t eine beschränkte Funktion g gibt, so daß auf dieser Umgebung gilt:

$$f(x) = (x - t)g(x) \tag{1}$$

Beweis. Für $x \neq t$ ist: $\quad |f(x)| \leq \varepsilon \, |x - t| \iff |g(x)| \leq \varepsilon$

Ist nun ein f gegeben, das an der Stelle t von mindestens erster Ordnung verschwindet, so setzen wir $g(t) = 0$ und erhalten aus (1) eine Funktion, die von mindestens nullter Ordnung verschwindet.

Ist umgekehrt eine Funktion g gegeben, die von mindestens nullter Ordnung verschwindet, so definiert sie durch die Gleichung (1) die Funktion f vollständig und es ist $f(t) = 0$. Es folgt, daß f an der Stelle t von mindestens erster Ordnung verschwindet. **q.e.d.**

Vom Verschwinden IV

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \;:\; |f(x)| \le \varepsilon \, |x - t|^k$$

Bemerkung 14.4. Die Funktion f verschwindet an der Stelle t von höherer als Ordnung genau dann, wenn es auf einer offenen Umgebung von t eine stetige, in t verschwindende Funktion g gibt, so daß auf dieser Umgebung gilt:

$$f(x) = (x - t) g(x) \tag{1}$$

Beweis. Für $x \neq t$ ist: $\quad |f(x)| \le \varepsilon \, |x - t| \iff |g(x)| \le \varepsilon$

Ist nun ein f gegeben, das an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet, so setzen wir $g(t) = 0$ und erhalten aus (1) eine Funktion, die von höherer als nullter Ordnung verschwindet.

Ist umgekehrt eine Funktion g gegeben, die von höherer als nullter Ordnung verschwindet, so definiert sie durch die Gleichung (1) die Funktion f vollständig und es ist $f(t) = 0$. Es folgt, daß f an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet. **q.e.d.**

Beispiel 14.5. *Eine Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \Sigma a_\star x^\star$ mit echt positivem Konvergenzradius $R > 0$ verschwindet an der Stelle 0 genau dann von höherer als k-ter Ordnung, wenn die Koeffizienten a_i für $i \leq k$ verschwinden:*

$$0 = a_0 = a_1 = \cdots = a_k$$

Beweis (Induktionsverankerung). Die Abbildung f ist auf dem offenen Intervall $(-R, R)$ definiert. Sie verschwindet von höherer als k-ter Ordnung an der Stelle 0 genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \geq \delta > 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon \, |x|^k \tag{1}$$

Wir führen eine Induktion nach der Ordnungsgrenze k durch. Zunächst betrachten wir also den Fall $k = 0$. In diesem Fall ist die Bedingung (1) äquivalent dazu, daß $f(0) = 0$ ist und f an der Stelle 0 stetig ist. Für die Potenzreihe ist die Stetigkeit automatisch erfüllt, und die Bedingung ist also äquivalent dazu, daß $f(0) = a_0 = 0$ ist.

Bei 0 verschwindende Potenzreihen II

Beispiel 14.5. *Eine Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \Sigma a_\star x^\star$ mit echt positivem Konvergenzradius $R > 0$ verschwindet an der Stelle 0 genau dann von höherer als k-ter Ordnung, wenn die Koeffizienten a_i für $i \leq k$ verschwinden:*

$$0 = a_0 = a_1 = \cdots = a_k$$

Beweis (Induktionsschritt). Die Abbildung f verschwinde an der Stelle 0 von höherer als $(k+1)$-ter Ordnung. Also verschwindet f dort auch von höherer als k-ter Ordnung. Mit Induktion ist also

$$0 = a_0 = a_1 = \cdots = a_k \quad \text{d.h.} \quad f(x) = x^{k+1}\left(a_{k+1} + a_{k+2}x + a_{k+3}x^2 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon\, |x|^{k+1} \\ \iff \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \ : \ \left|a_{k+1} + a_{k+2}x + a_{k+3}x^2 + \cdots\right| \leq \varepsilon \\ \iff \quad & a_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Dasgleiche Argument zeigt die Rückrichtung, wenn wir $0 = a_0 = a_1 = \cdots = a_{k+1}$ annehmen. **q.e.d.**

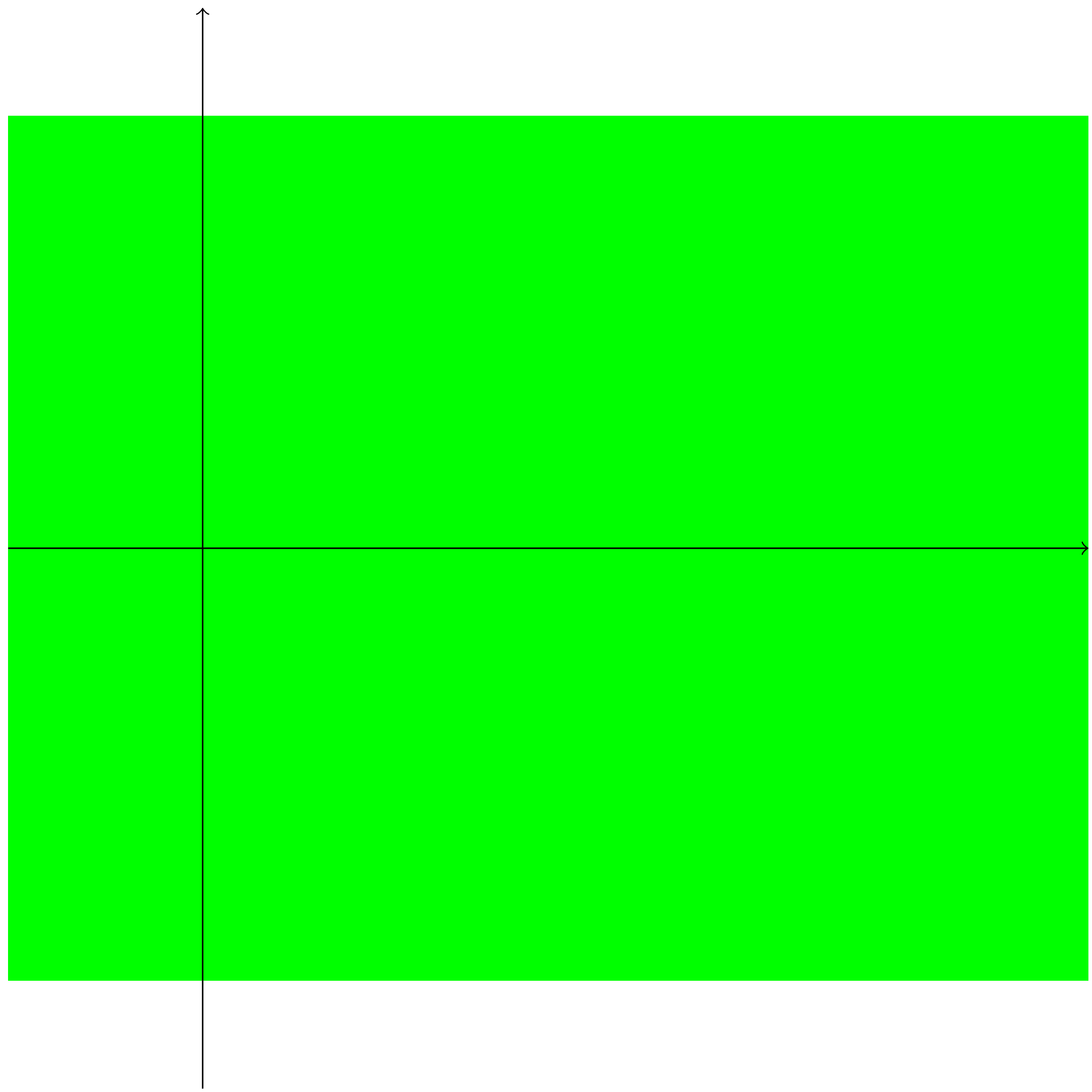
Korollar 14.6. *Eine Potenzreihe $f(x)$ von echt positivem Konvergenzradius $R > 0$ verschwindet auf einem offenen Intervall um 0 genau dann, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden.* **q.e.d.**

Aufgabe 14.7. Sei $f(x) := \Sigma a_\star x^\star$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Sei $\xi_\star$ eine Nullfolge, die ganz im Gebiet $\mathbb{B}_R(0)$ absoluter Konvergenz liegt und für keinen Index den Wert 0 annimmt. Wenn $f(\xi_i) = 0$ für alle i ist, dann verschwinden alle Koeffizienten $a_\star = 0$.

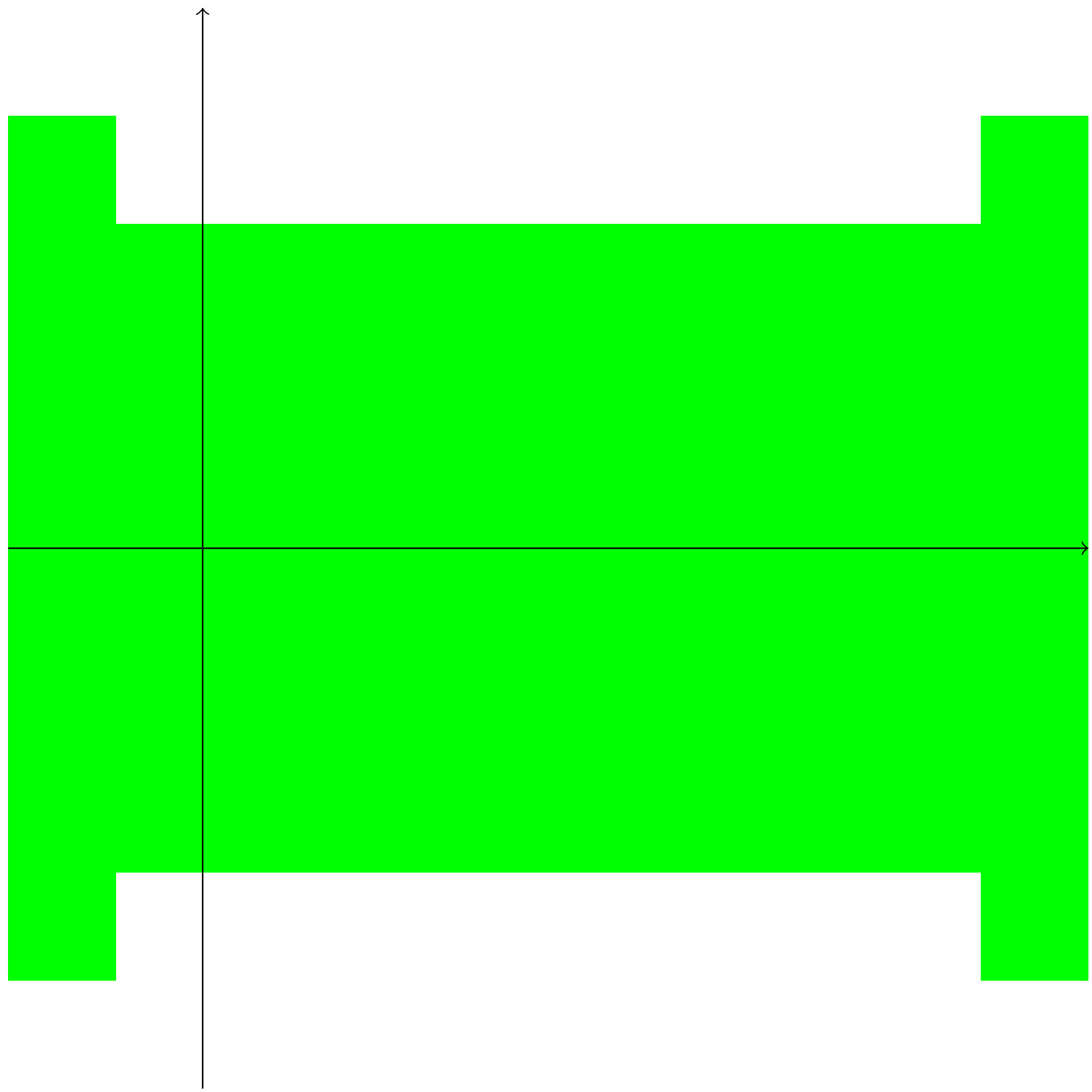
Wir wenden (14.6) (oder 14.7) auf die Reihe $\Sigma(a_\star - b_\star)x^\star$ an und erhalten:

Korollar 14.8. *Seien $\Sigma a_\star x^\star$ und $\Sigma b_\star x^\star$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, die diegleich Funktion beschreiben (bzw. auf einer Nullfolge, die aber den Wert 0 niemals annimmt, gleiche Werte annehmen). Dann ist $a_\star = b_\star$.*

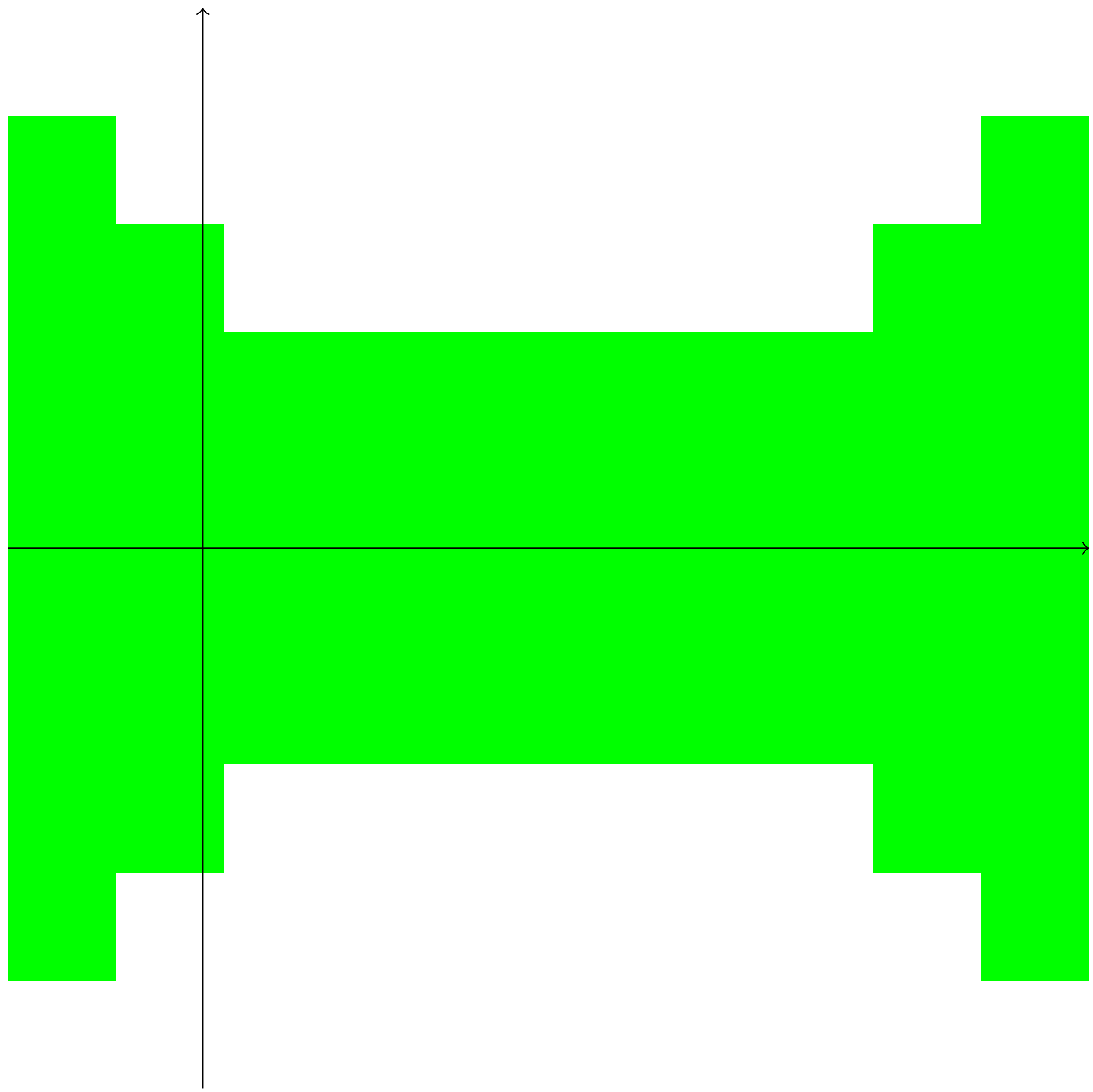
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



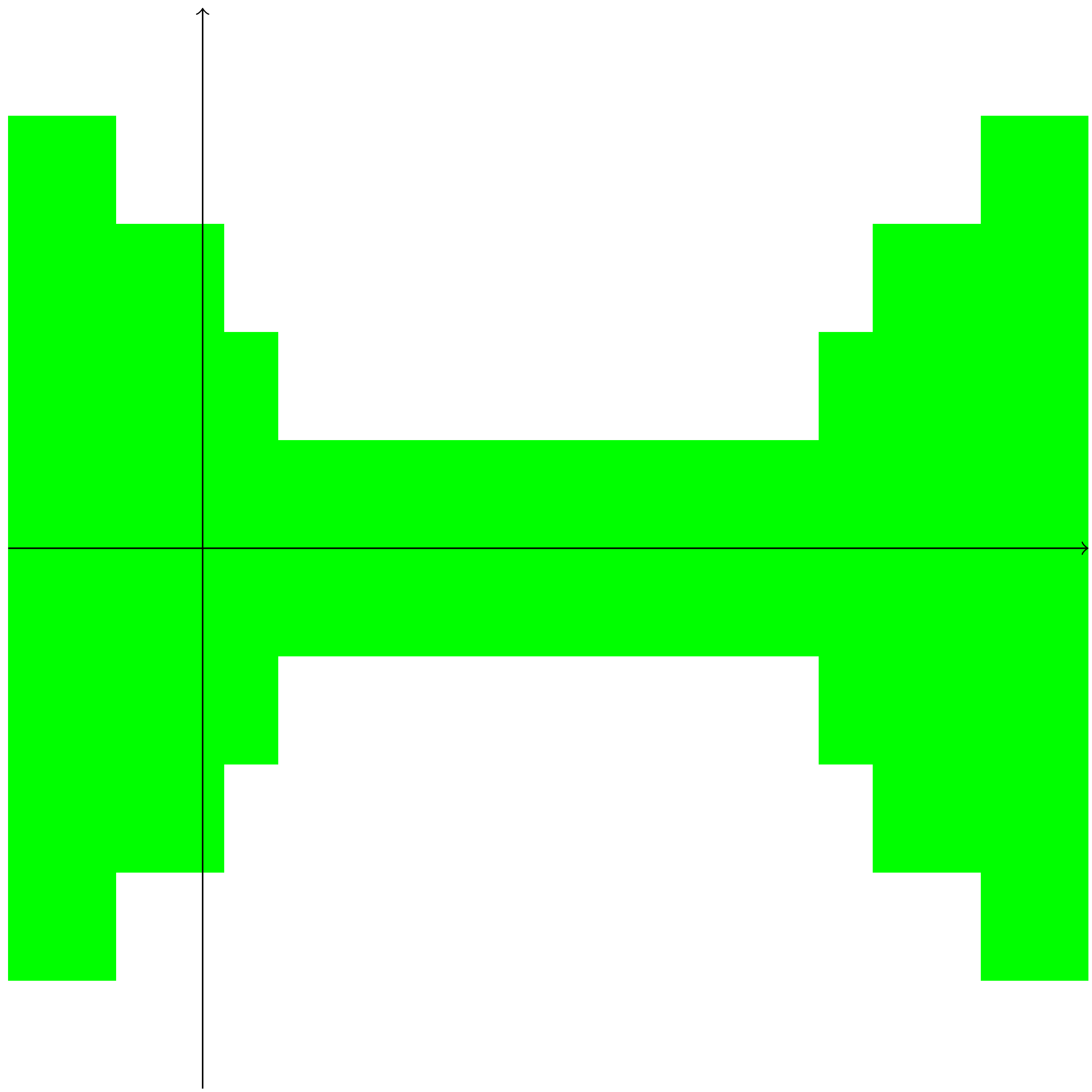
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



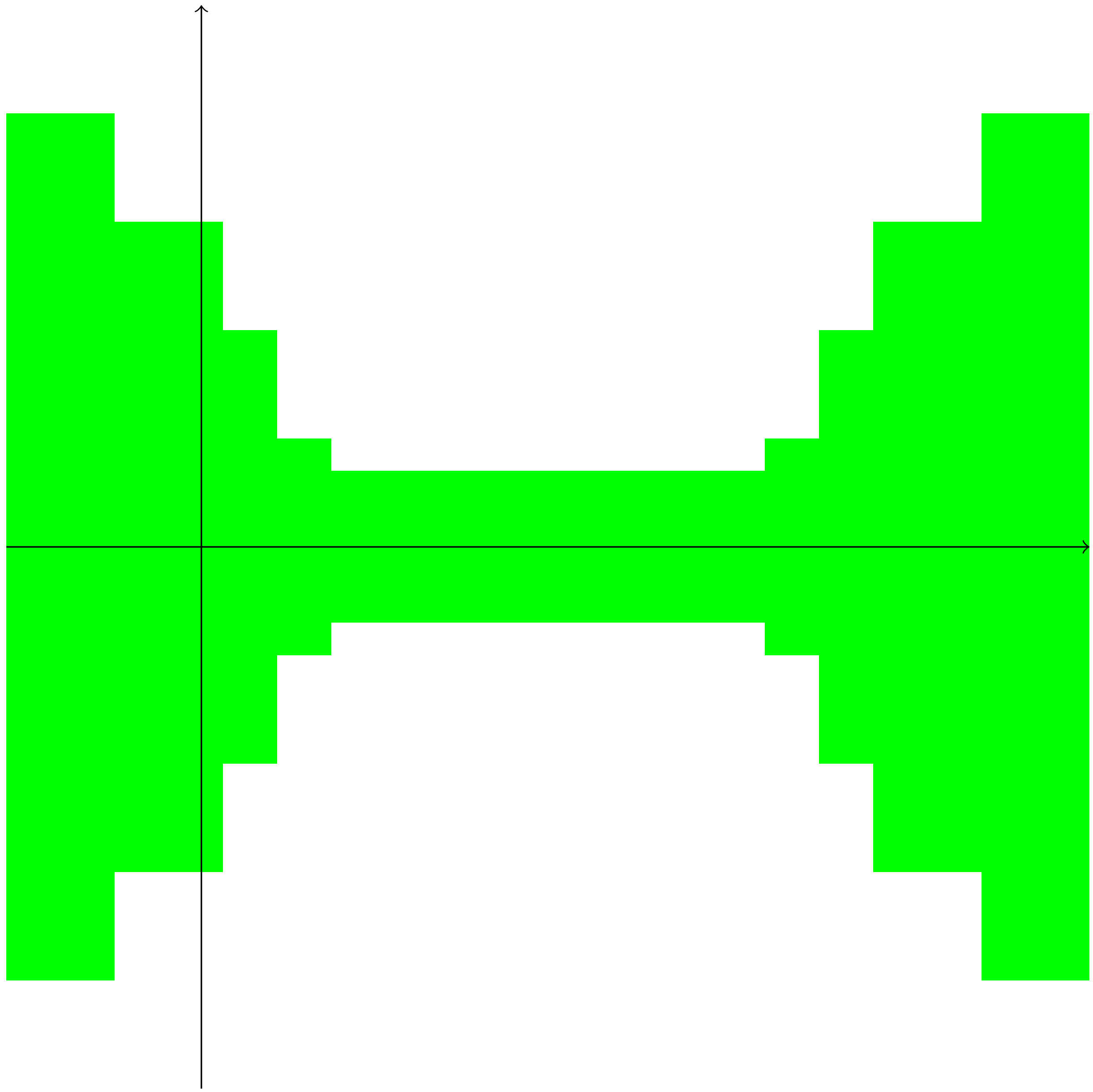
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



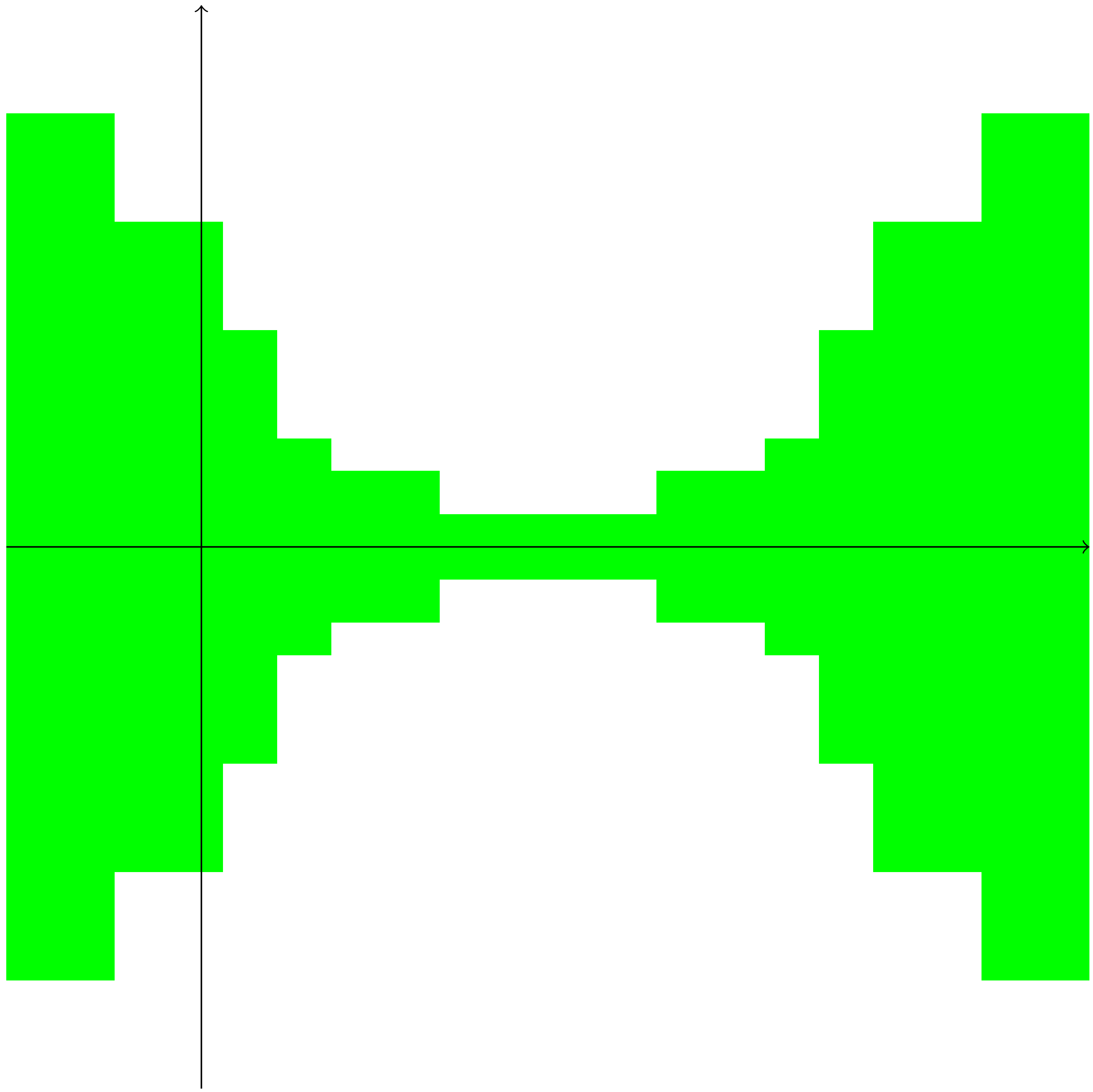
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



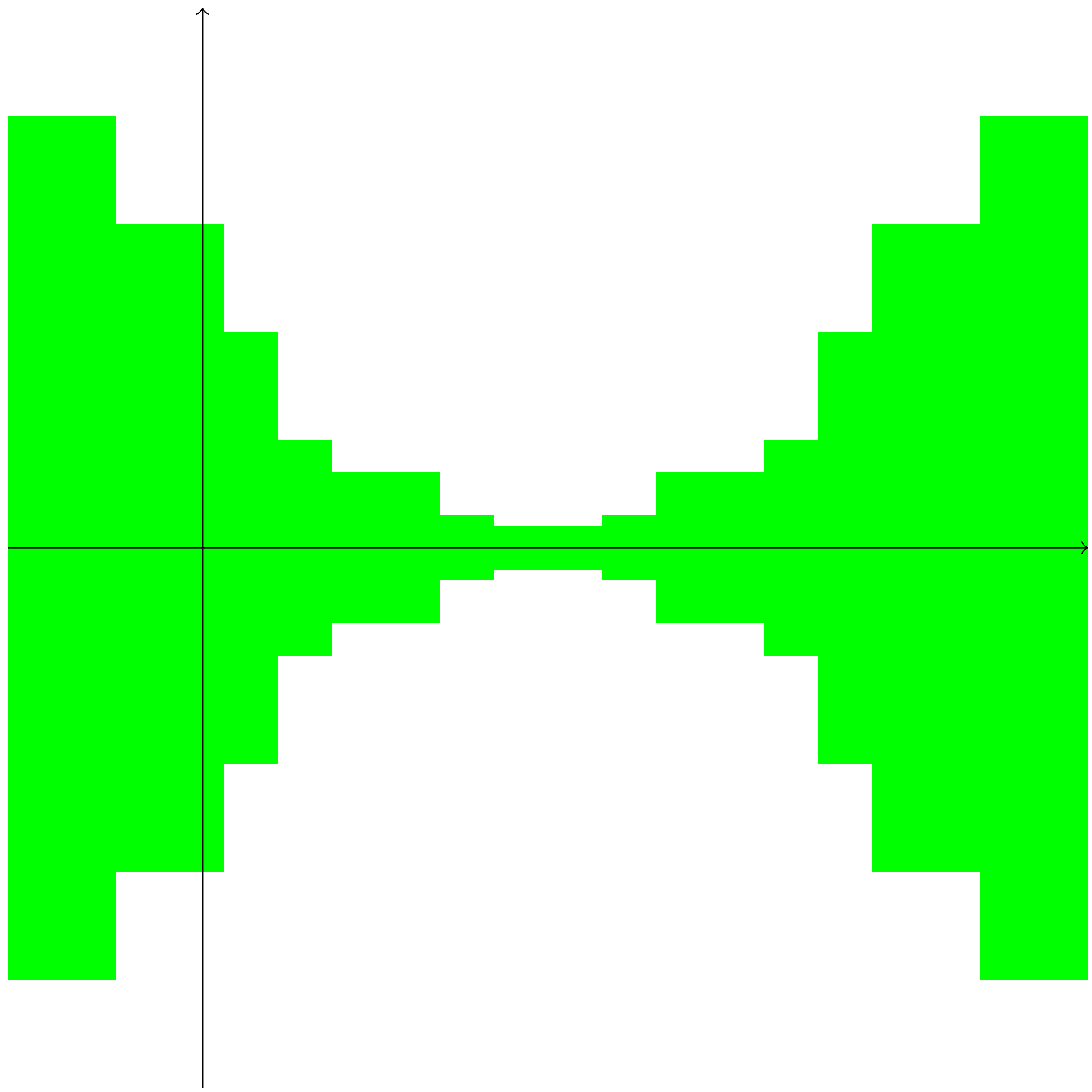
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



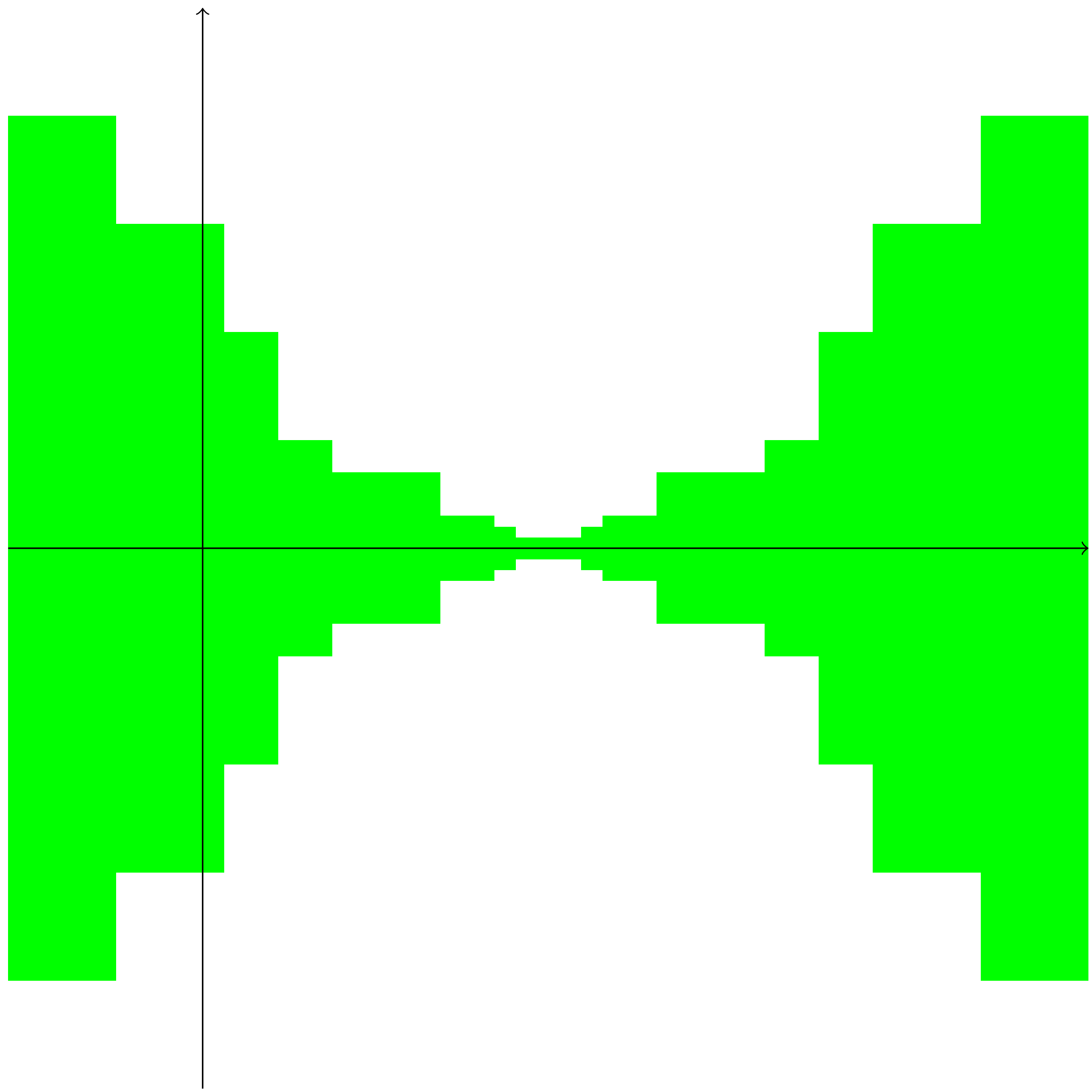
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



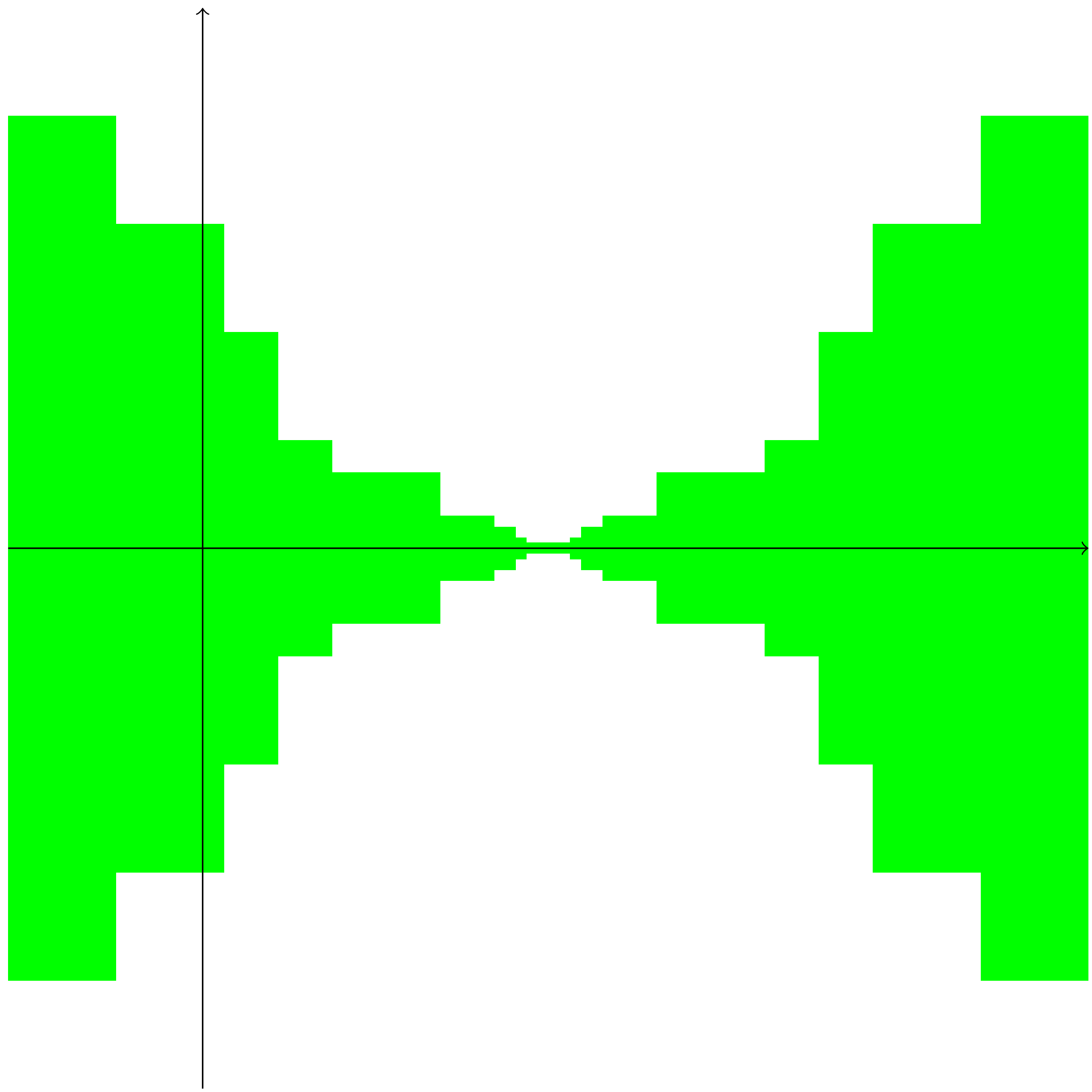
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



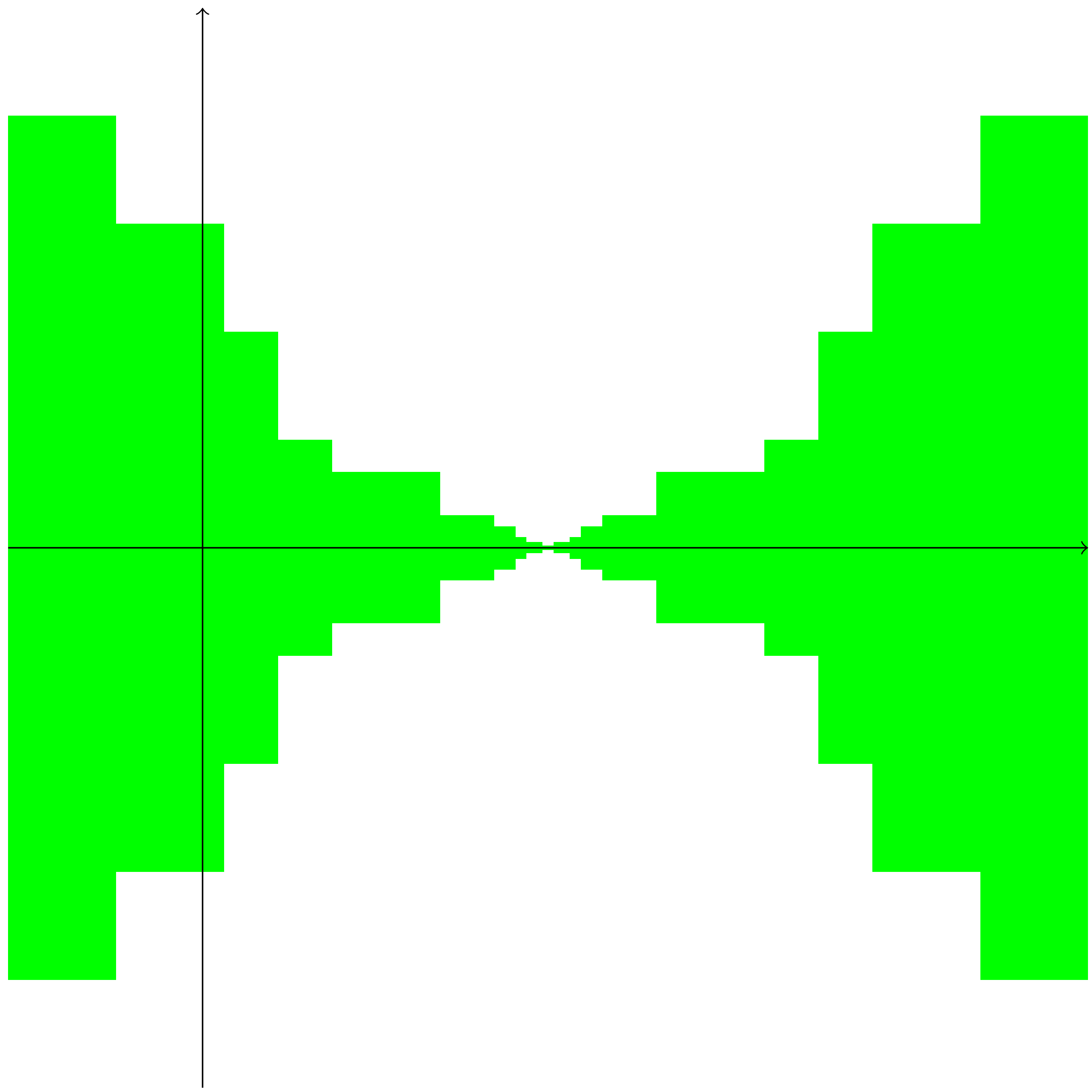
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



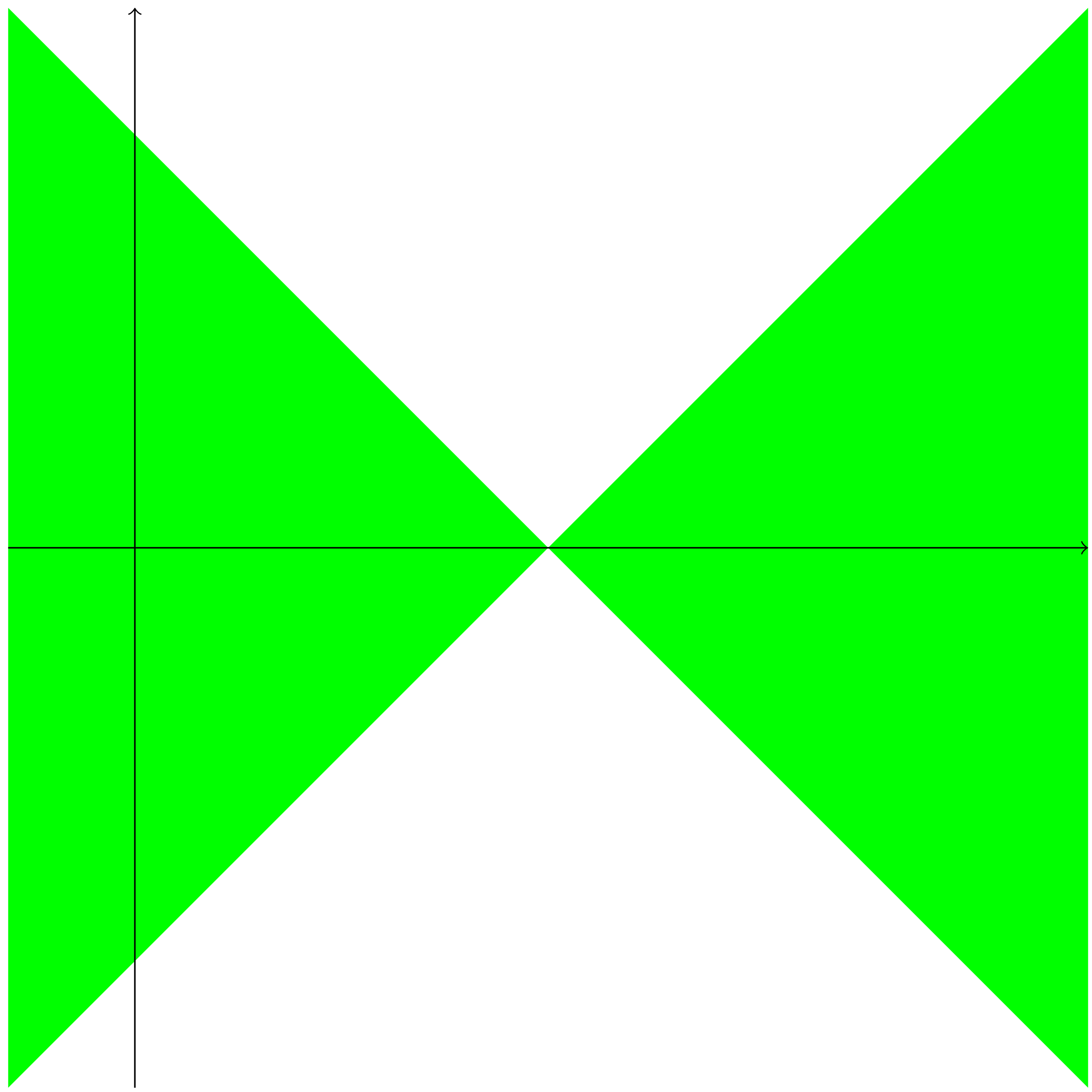
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



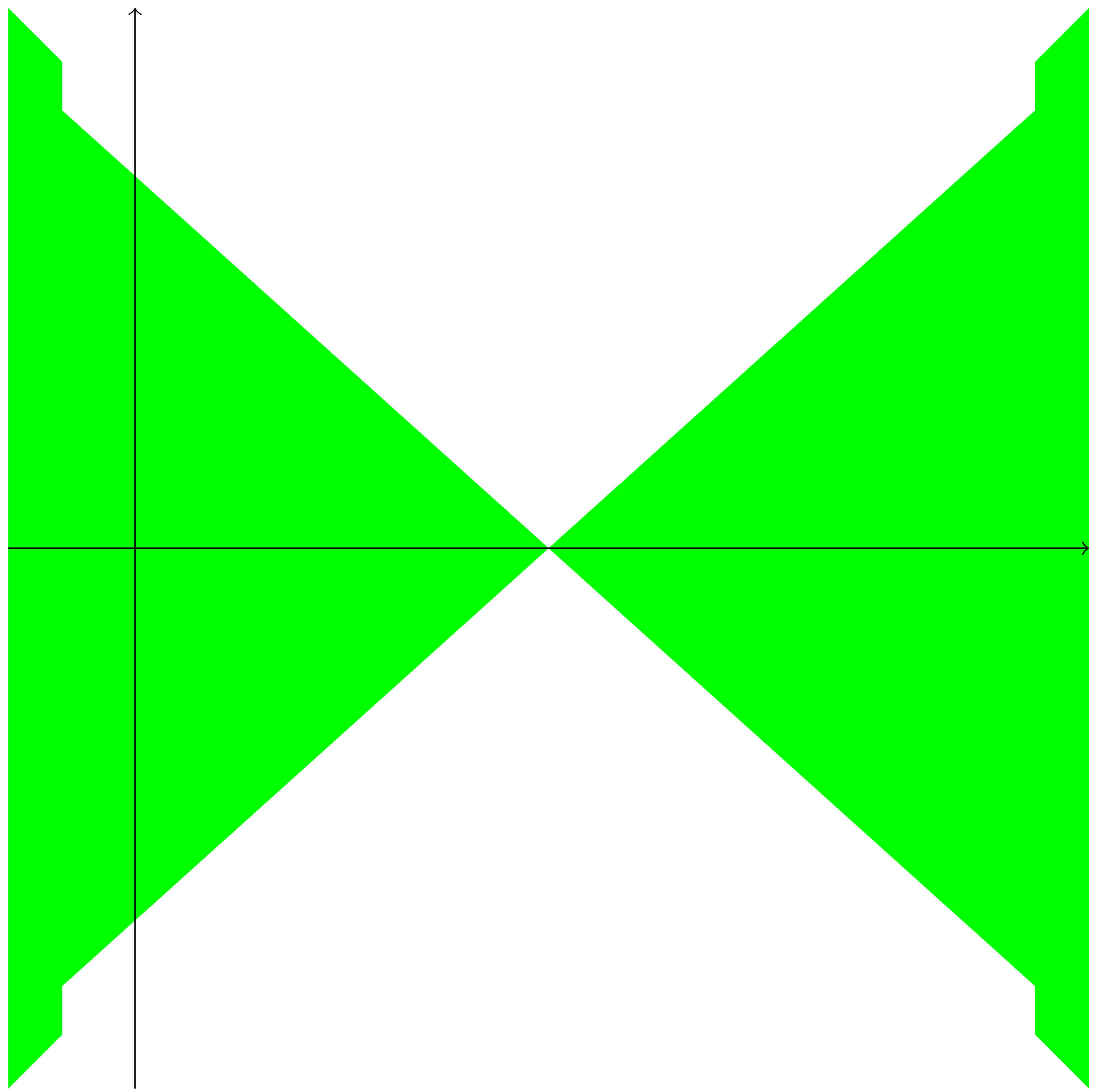
Verschwinden von höherer als nullter Ordnung



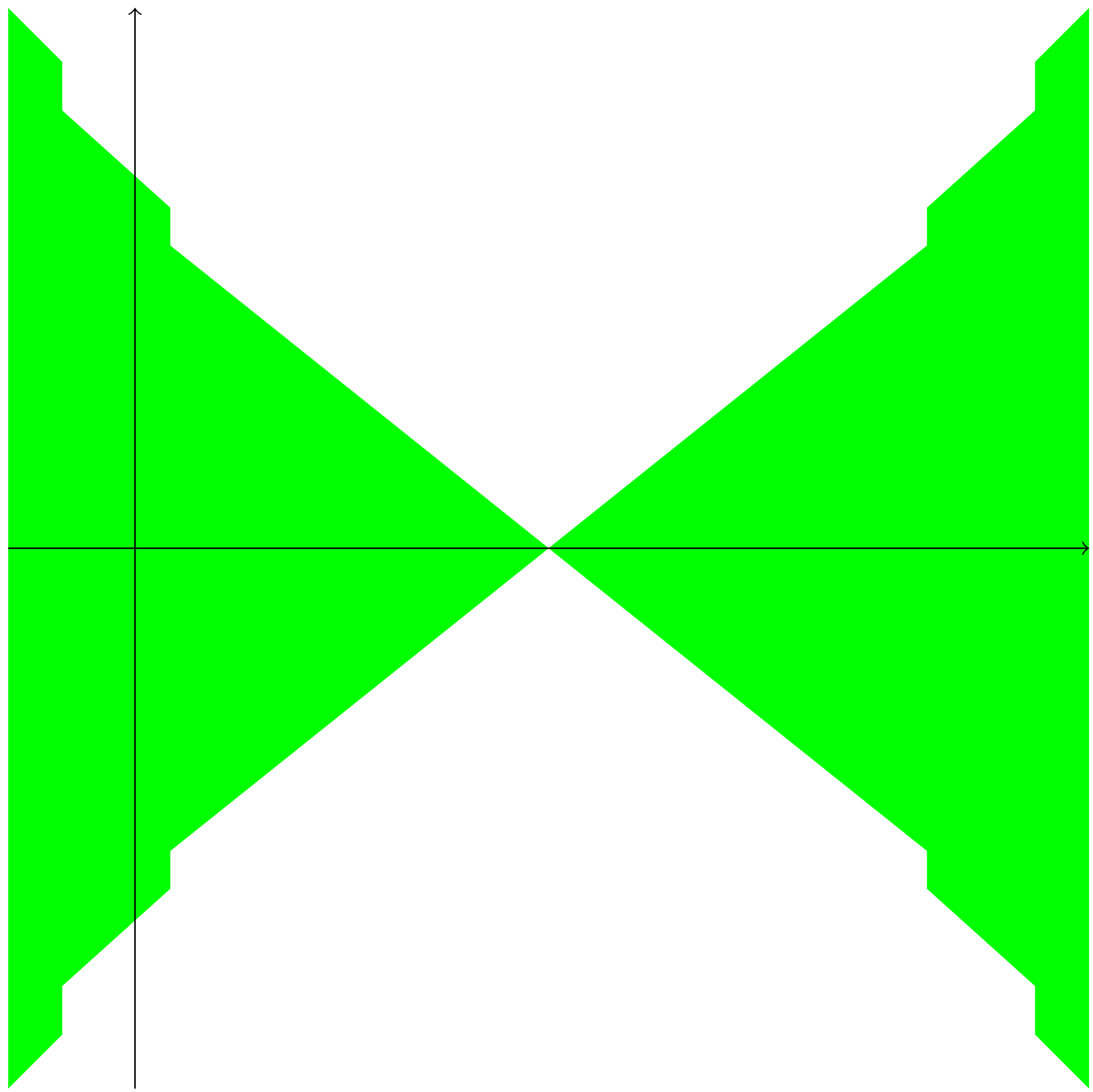
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



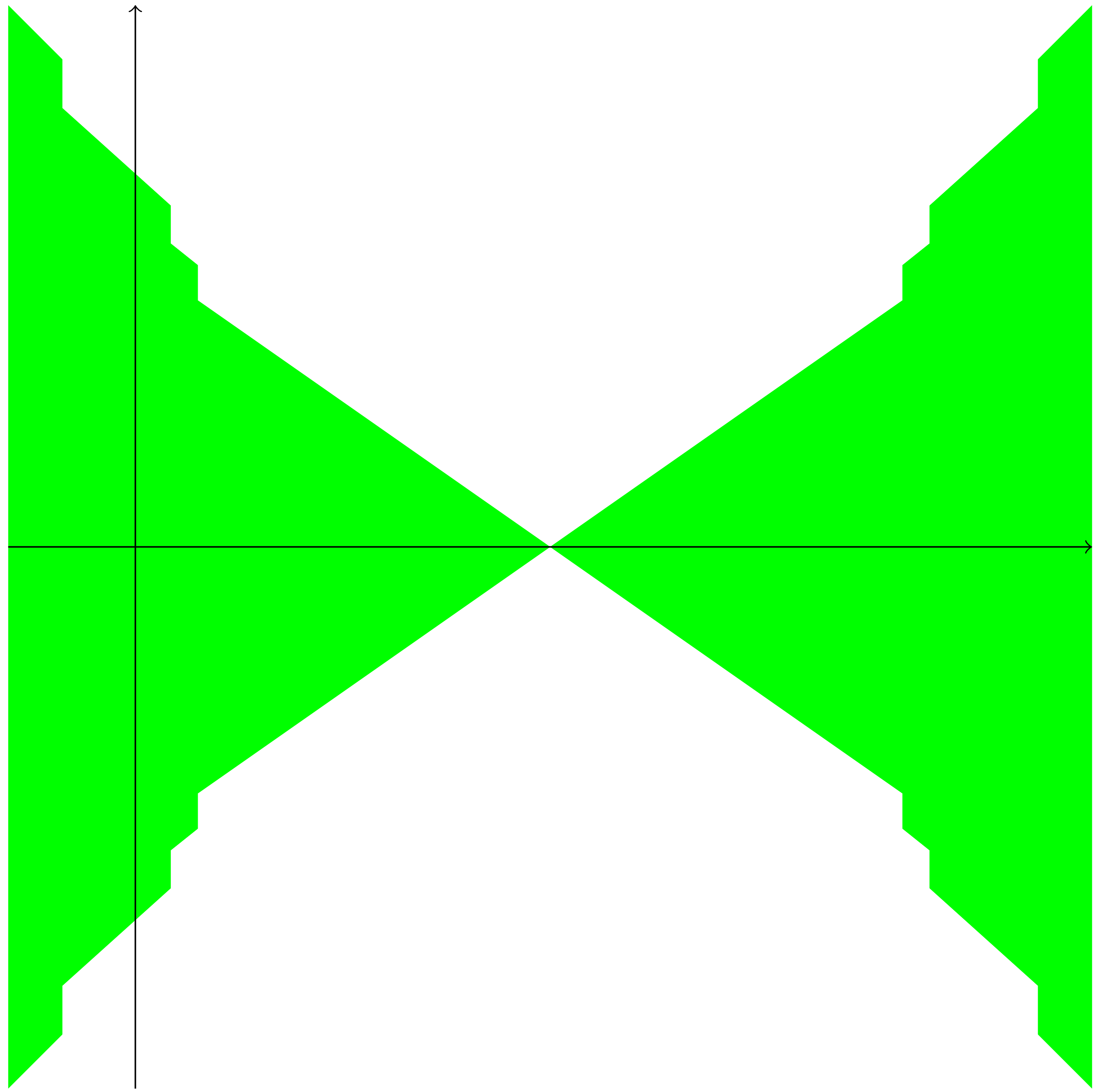
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



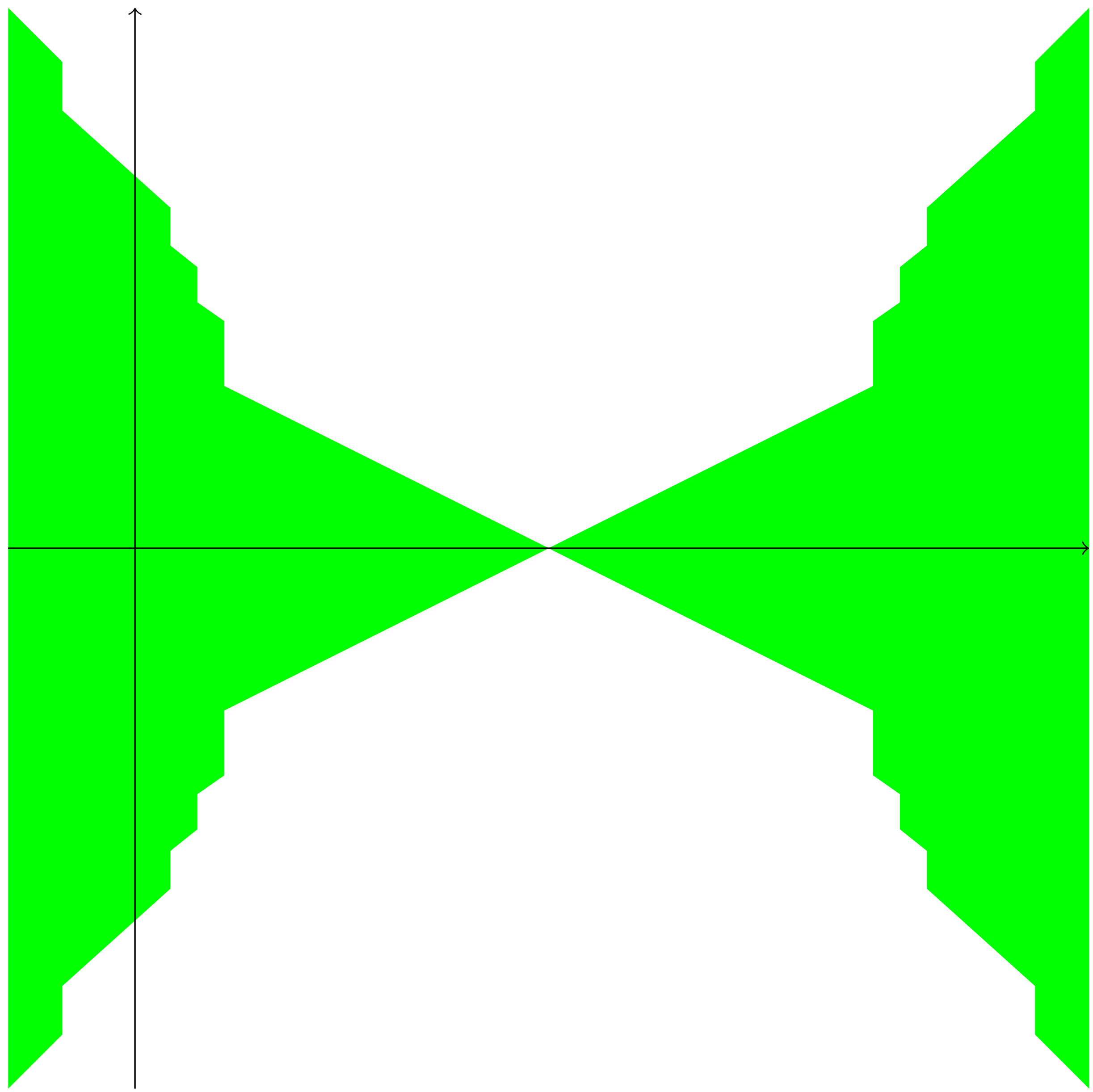
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



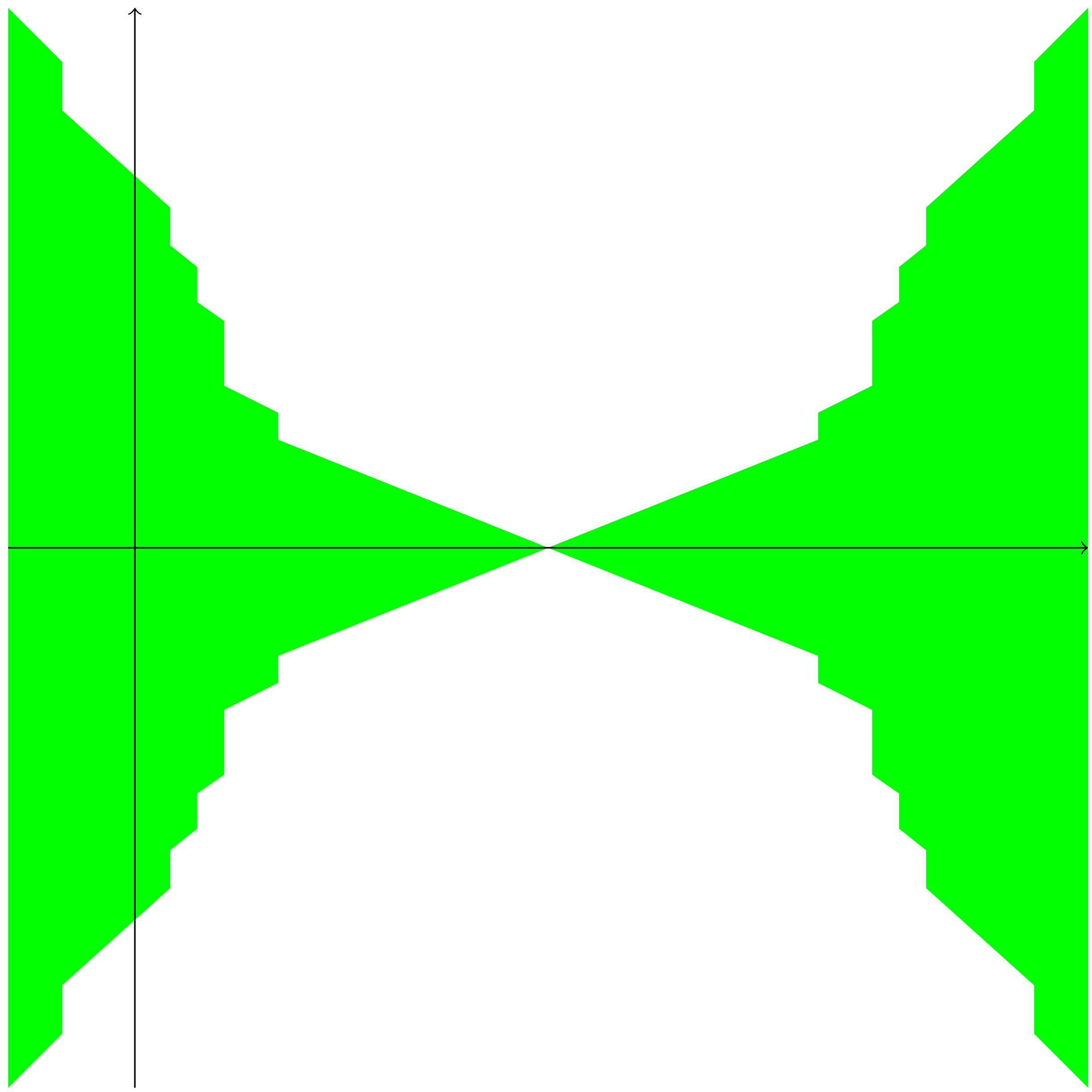
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



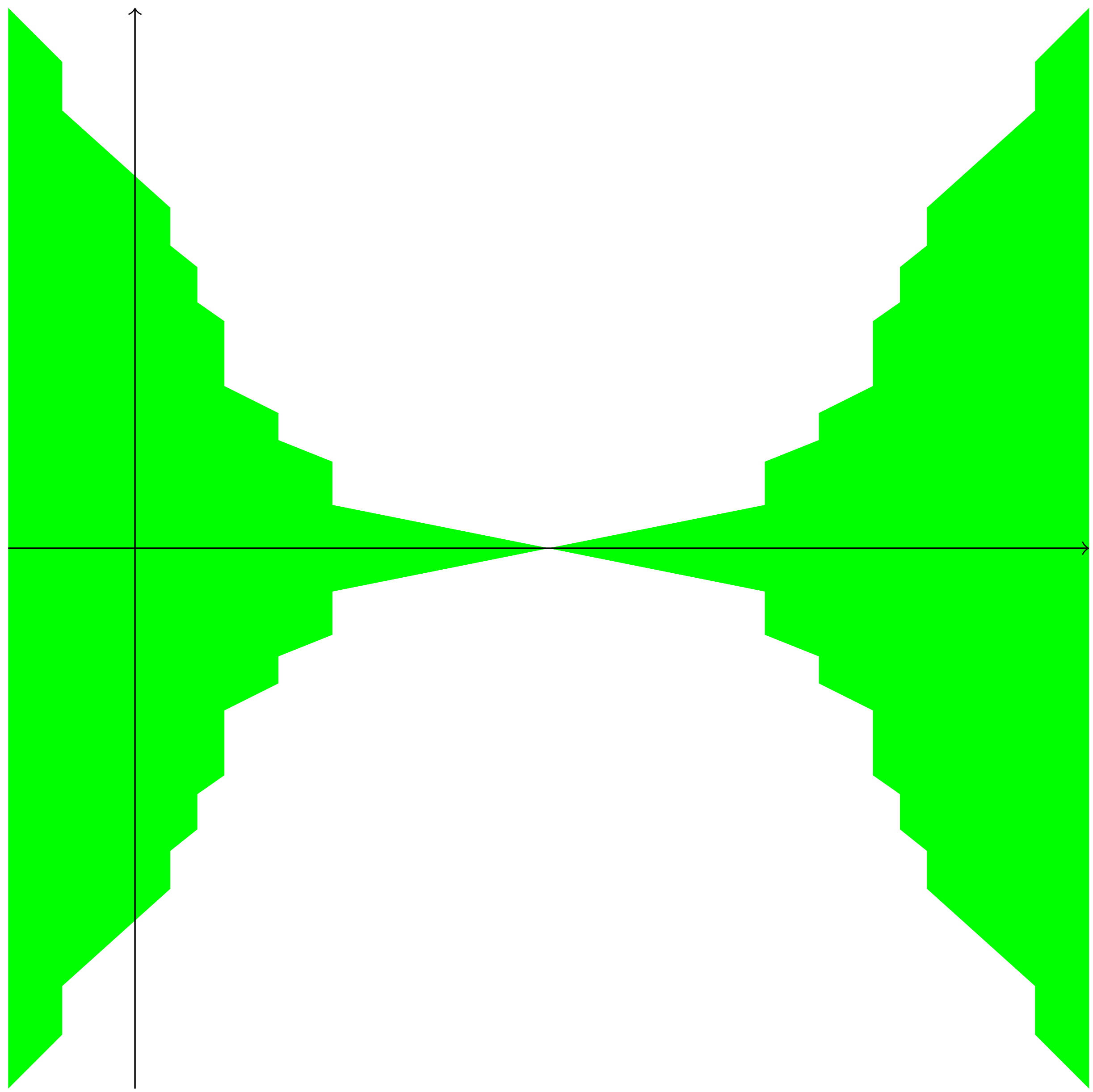
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



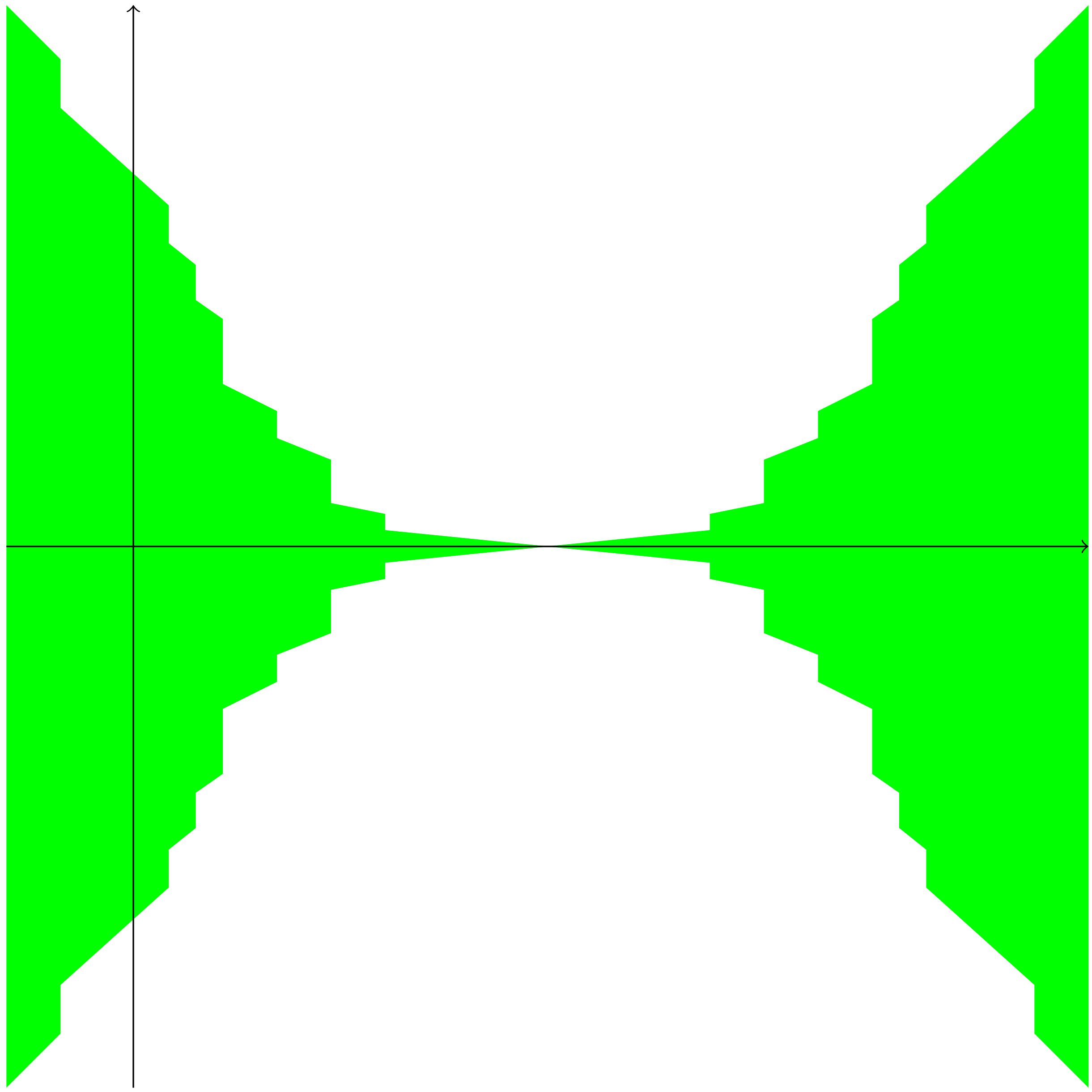
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



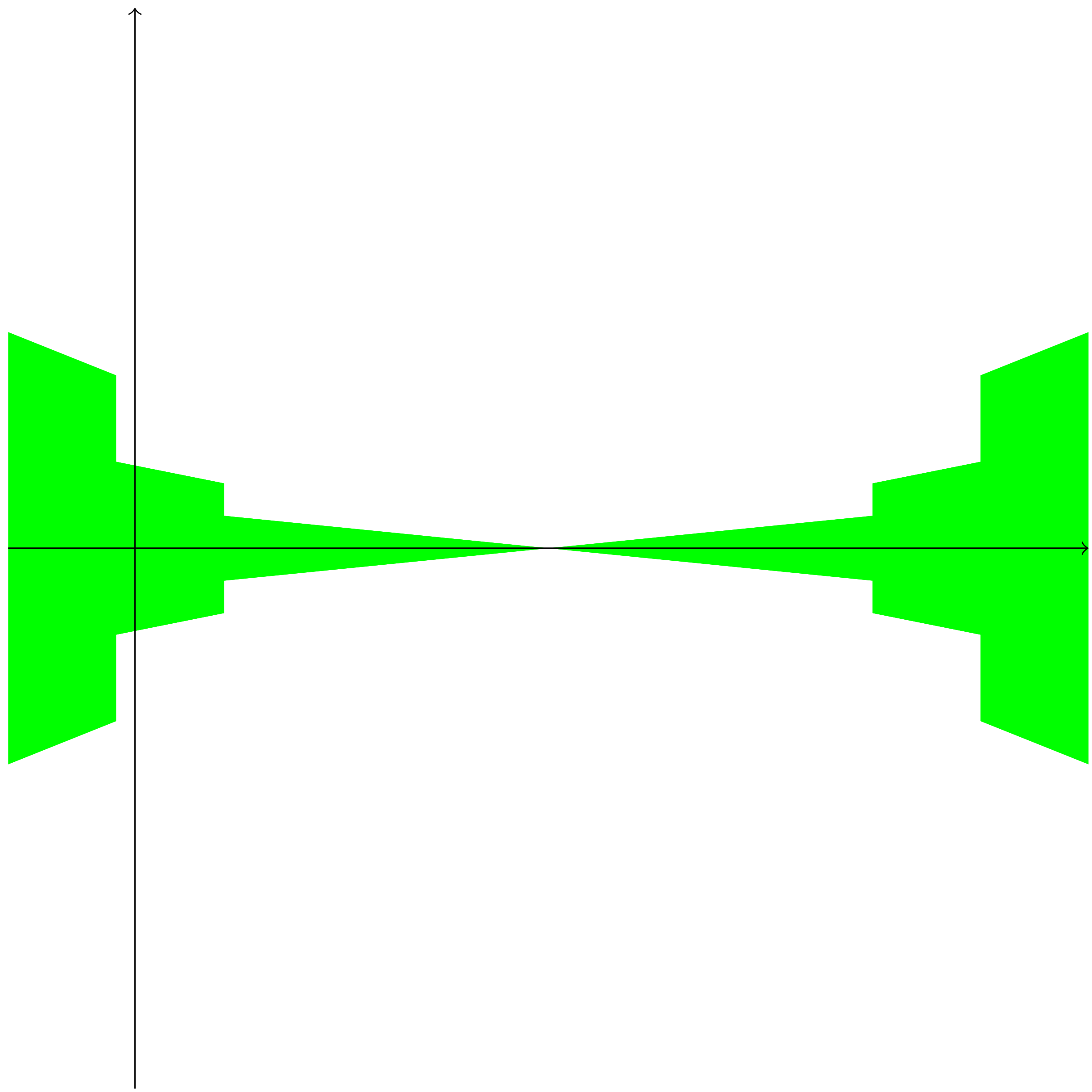
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



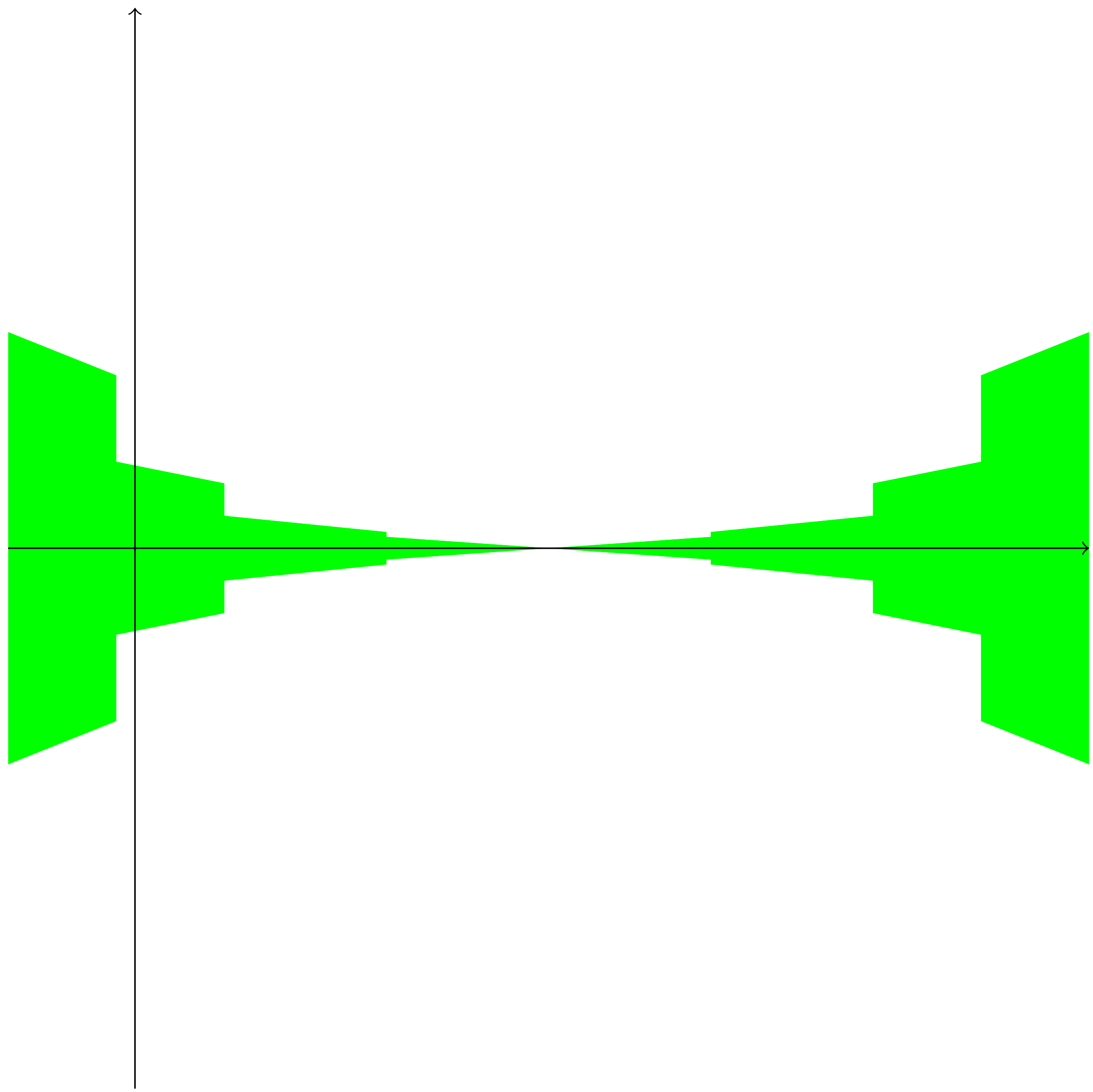
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



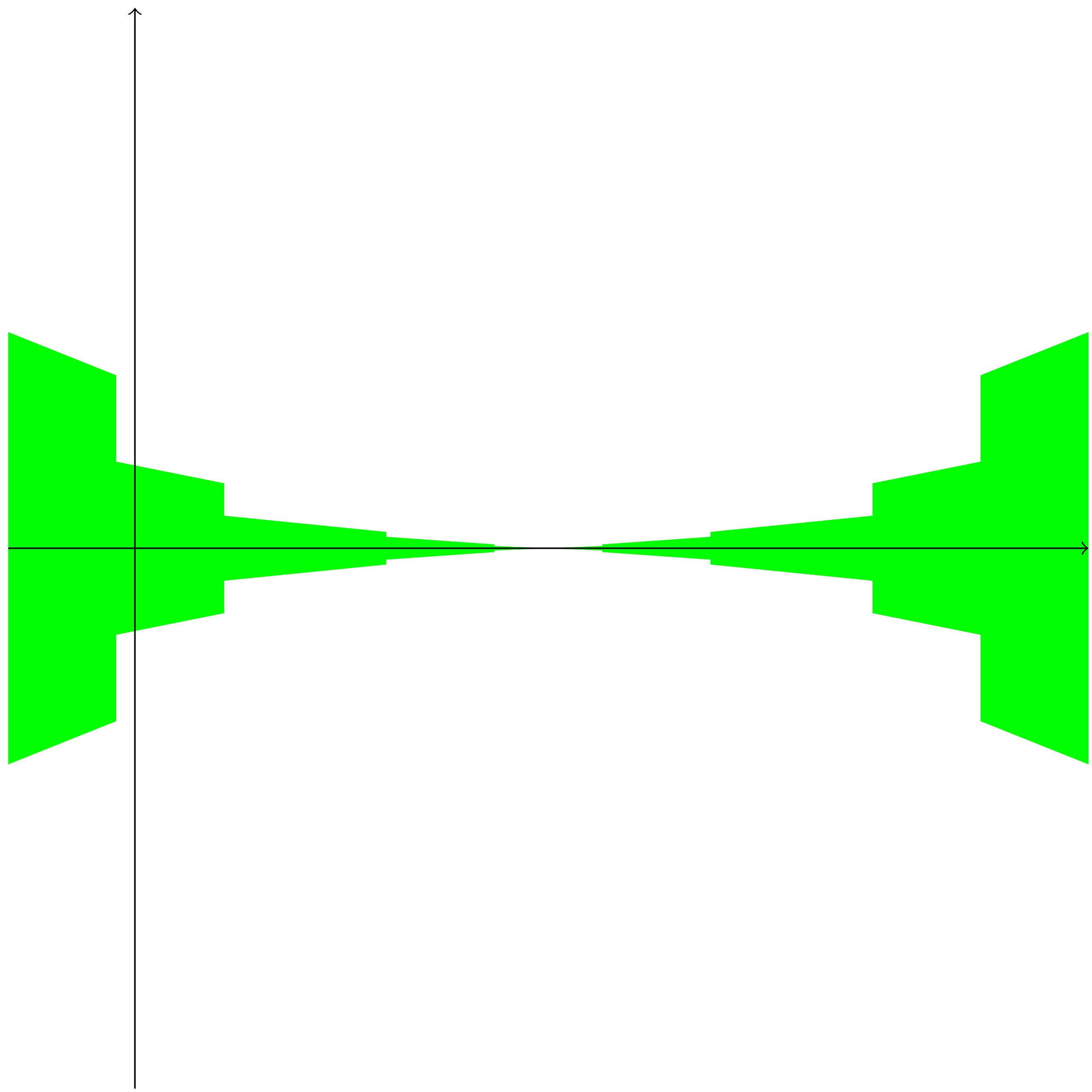
Verschwinden von höherer als erster Ordnung



Verschwinden von höherer als erster Ordnung



Verschwinden von höherer als erster Ordnung



Beobachtung 14.9. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die beide an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung verschwinden. Dann verschwindet eine Linearkombination $\alpha f + \beta g$ an der Stelle t ebenfalls von höherer als k-Ordnung.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß für alle $x \in \mathbb{B}_\delta(t)$ gilt:

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} |x - t|^k \qquad \text{und} \qquad |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|} |x - t|^k$$

Dann ist

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq \underbrace{|\alpha| \, |f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}|x-t|^k} + \underbrace{|\beta| \, |g(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}|x-t|^k} \leq \varepsilon |x - t|^k \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Aufgabe 14.10. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ verschwinde an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung, und $g : I \to \mathbb{R}$ verschwinde an der Stelle t von mindestens l-ter Ordnung. Zeige: Das Produkt fg verschwindet an der Stelle t von höherer als $(k + l)$-ter Ordnung.

Definition 14.11. Wir sagen, daß eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ die Funktion f an der Stelle $t \in I$ von höherer als k-ter Ordnung approximiert, wenn die Differenz $f - g$ an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung verschwindet. D.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap \mathbb{B}_\delta(t) \ : \ |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \, |x - t|^k$$

Behauptung und Definition 14.12. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt linear approximierbar an der Stelle $t \in I$, wenn es ein Polynom erster Ordnung (Gerade) $g(x) = a + \mu x$ gibt, das f an der Stelle t von höherer als erster Ordnung approximiert. In diesem Fall ist die Gerade g eindeutig bestimmt und hat die Form $g(x) = f(t) + \mu(x - t)$. Also ist f linear approximierbar genau dann, wenn eine Steigung $\mu \in \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$x \mapsto f(x) - f(t) - \mu(x - t)$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet.

Beweis. Seien g_1 und g_2 zwei lineare Approximationen zu f an der Stelle t. Dann verschwindet die Differenz $g_1 - g_2 = (f - g_2) - (f - g_1)$ an der Stelle t von höherer als erster Ordnung. Mit (14.5), angewendet auf das Polynom erster Ordnung $h \mapsto g_1(t + h) - g_2(t + h)$, folgt $g_1 - g_2 = 0$.

Die angegebene Form der Geraden g ergibt sich daraus, daß insbesondere $g(t) = f(t)$ gilt. **q.e.d.**

Definition 14.14. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar$_\mathrm{h}$ an der Stelle $t \in I$, wenn es eine Zahl $f'(t)$ und eine in t stetige Funktion $o : I \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $f(x) = f(t) + f'(t)\,(x - t) + o(x)\,(x - t)$
2. $o(t) = 0$.

In diesem Fall heißt $f'(t)$ die Ableitung von f an der Stelle t.

Bemerkung 14.15. Diese Definition wird oft unter Verwendung der Größe $h := x - t$ formuliert. Dann ist o stetig an der Stelle 0 und verschwindet dort. Die erste Bedingung lautet in dieser Fassung:

$$f(t + h) = f(t) + f'(t)\,h + o(h)\,h$$

Definition 14.14. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar$_{\mathsf{h}}$ an der Stelle $t \in I$, wenn es eine Zahl $f'(t)$ und eine in t stetige Funktion $o : I \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $f(x) = f(t) + f'(t)\,(x - t) + o(x)\,(x - t)$
2. $o(t) = 0$.

In diesem Fall heißt $f'(t)$ die Ableitung von f an der Stelle t.

Bemerkung 14.16. Diese Bedingung ist mit (14.4) äquivalent dazu, daß es eine Zahl $f'(t) \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Funktion

$$x \mapsto f(x) - f(t) - f'(t)\,(x - t) = o(x)\,(x - t)$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet. Das wiederum ist gerade die Bedingung, daß f an der Stelle t linear approximierbar mit Steigung $f'(t)$ ist (14.12). **q.e.d.**

Definition 14.17. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar$_{\text{st}}$ an der Stelle $t \in I$, wenn es eine an der Stelle t stetige Funktion $g_t : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - f(t) = (x - t)g_t(x)$$

gibt. Dann nennen wir

$$f'(t) := g_t(t)$$

die Ableitung von f an der Stelle t.

Bemerkung 14.18. Für $x \neq t$ ist $g_t(x)$ durch

$$g_t(x) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

bestimmt. Die eigentliche Bedingung ist die Stetigkeit an der Stelle t.

Definition 14.19. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar$_{\text{lim}}$ an der Stelle $t \in I$, wenn für je zwei gegen t konvergierende, den Werte t aber nirgends annehmende Folgen $x_\star$ und $y_\star$ in $I \setminus \{t\}$ gilt:

Die induzierten Folgen von Steigungen

$$\frac{f(x_\star) - f(t)}{x_\star - t} \qquad \text{und} \qquad \frac{f(y_\star) - f(t)}{y_\star - t}$$

sind kokonvergent.

In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f an der Stelle t als den gemeinsamen Limes $f'(t) := \lim_{\star\to\infty} \frac{f(x_\star)-f(t)}{x_\star-t}$ all dieser Steigungsfolgen.

Bemerkung 14.20. Die Definitionen (14.17) und (14.19) sind augenscheinlich äquivalent: In (14.19) wird lediglich die stetige Fortsetzbarkeit von

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

auf die Stelle $x = t$ mit Hilfe der Folgenstetigkeitsdefinition ausbuchstabiert.

Satz und Definition 14.21. *Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, definiert auf einen offenen Intervall I, und eine Stelle $t \in I$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Funktion f ist linear approximierbar an der Stelle t.*
2. *Die Funktion f ist differenzierbar$_h$ an der Stelle t.*
3. *Die Funktion f ist differenzierbar$_{st}$ an der Stelle t.*
4. *Die Funktion f ist differenzierbar$_{lim}$ an der Stelle t.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so stimmen alle definierten Ableitungen untereinander und mit der Steigung von f an der Stelle t überein.

Wir nennen eine Funktion f, die an der Stelle t eine und damit alle oben genannten Bedingungen erfüllt, differenzierbar an der Stelle t. die Funktion f ist differenzierbar auf I, wenn sie an jeder Stelle $t \in I$ differenzierbar ist.

Satz und Definition 14.21. *Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, definiert auf einen offenen Intervall I, und eine Stelle $t \in I$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Funktion f ist linear approximierbar an der Stelle t.*
2. *Die Funktion f ist differenzierbar$_h$ an der Stelle t.*
3. *Die Funktion f ist differenzierbar$_{st}$ an der Stelle t.*
4. *Die Funktion f ist differenzierbar$_{lim}$ an der Stelle t.*

Korollar 14.22. *Ein Polynom $f(x) = \alpha + \mu x$ ersten Grades ist differenzierbar und seine Ableitung ist konstant $f'(x) = \mu$.* **q.e.d.**

Beweis. Die Äquivalenzen (1)$\Leftrightarrow$(2) und (3)$\Leftrightarrow$(4) haben wir schon gesehen in (14.16) und (14.20).

Satz und Definition 14.21. *Äquivalent sind:*

(2) Die Funktion f ist differenzierbar$_h$ an der Stelle t, d.h.: es gibt eine Zahl $f'(t)$ und eine in t verschwindende stetige Funktion $o : I \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) - f(t) = f'(t)\,(x-t) + o(x)\,(x-t)$$

(3) Die Funktion f ist differenzierbar$_{st}$ an der Stelle t, d.h.: es gibt eine an der Stelle t stetige Funktion g_t mit:

$$f(x) - f(t) = (x-t) g_t(x)$$

Beweis (Fortsetzung). Der Zusammenhang von o und g_t ist gegeben durch:

$$o(x) = g_t(x) - g_t(t) \qquad \text{und} \qquad f'(t) = g_t(t)$$

Mit dieser Transformation überführen sich die Bedingungen unmittelbar ineinander:

$$f(x) - f(t) = f'(t)\,(x-t) + o(x)\,(x-t) = g_t(x)\,(x-t)$$

q.e.d.

Zur Notation der Ableitung

Notation 14.23. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so schreiben wir für die Ableitung an der Stelle t

$$f'(t) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}(t) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f\bigg|_{x=t}$$

Die Funktion $x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitung von f. Wir notieren sie mit

$$f' \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f$$

Die jeweils letzten Notationen bieten sich insbesondere dann an, wenn die Funktion durch einen komplexen Ausdruck gegeben ist. Ist z.B. $f(x) = x^3 - x^2$, so können wir die Ableitung (an einer Stelle) schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^3 - x^2) \qquad \text{und an an der Stelle } 2 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^3 - x^2)\bigg|_2$$

Linearität der Ableitung

Proposition 14.24. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $t \in I$. Die Linearkombination $h := \alpha f + \beta g$ für beliegige feste Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann differenzierbar an der Stelle t und die Ableitung ist:*

$$h'(t) = \alpha f'(t) + \beta g'(t)$$

Beweis. Die Abbildung f ist an der Stelle t linear approximierbar mit Steigung $f'(t)$, und g ist dort linear approximierbar mit Steigung $g'(t)$. Dann verschwinden die Funktionen

$$x \mapsto f(x) - f(t) - f'(t)\,(x - t)$$
$$x \mapsto g(x) - g(t) - g'(t)\,(x - t)$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung. Das gilt mit (14.9) auch für ihre Linearkombination

$$x \mapsto h(x) - h(t) - (\alpha f'(t) + \beta g'(t))(x - t)$$

Also ist h an der Stelle t linear approximierbar mit Steigung $h'(t) = \alpha f'(t) + \beta g'(t)$.

q.e.d.

Satz 14.26. *Die differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ nehme an der Stelle t ein (lokales) Minimum an. Dann hat f an der Stelle t verschwindende Steigung $f'(t) = 0$. Gleiches gilt, wenn f ein (lokale) Maximum annimmt.*

Beweis. Für alle Punkte x in einer offenen Umgebung von t gilt $f(x) \geq f(t)$. Da f an der Stelle t differenzierbar$_{\text{st}}$ ist, gibt es eine an der Stelle t stetige Funktion g mit:

$$0 \leq f(x) - f(t) = (x - t)g(x)$$

Also:

$$\left.\begin{array}{ll} g(x) \geq 0 & \text{für } x > t \\ g(x) \leq 0 & \text{für } x < t \\ \multicolumn{2}{l}{g \text{ stetig an der Stelle } t} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g(t) = 0$$

Darum ist $f'(t) = g(t) = 0$.

Die Aussage über Maximalstellen beweist sich analog oder läßt sich durch Betrachtung von $-f$ auf den behandelten Fall zurückführen. **q.e.d.**

Mittelwertsatz 14.27. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Innern (a, b) differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle $t \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(t)\,(b - a)$$

Beweis. Setze $\mu := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Zu finden ist eine Stelle mit $f'(t) = \mu$.

Wir betrachten die Funktion

$$g(x) := f(x) - \mu(x - a)$$

Dann ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(a) = g(b) = f(a)$. Also nimmt g auf $[a, b]$ Minimum und Maximum irgendwo an (13.27). Wenn keine Minimalstelle im Innern liegt, also das Minimum an den Rändern angenommen wird, liegt eine Maximalstelle im Innern. In jedem Fall finden wir eine Stelle $t \in (a, b)$ mit verschwindender Ableitung (14.26). An dieser Stelle wird also g durch eine horizontale Gerade linear approximiert und $f(x) = g(x)+\mu(x - a)$ wird durch eine Gerade mit Steigung μ linear approximiert, d.h., $f'(t) = \mu$. **q.e.d.**

Korollar 14.28. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit überall verschwindender Ableitung. Dann ist f konstant.*

Beweis. Für $a, b \in I$ ist nach dem Mittelwertsatz

$$f(b) - f(a) = f'(t)\,(b - a) = 0$$

für ein $t \in (a, b)$. **q.e.d.**

Integration erhöht die Verschwindungsordnung

Lemma 14.30. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei integrierbar, stetig an der Stelle $t \in I$ und verschwinde an dieser Stelle. Dann verschwindet das Integral*

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_t^x f(s)\,\mathrm{d}\,s \end{aligned}$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen $\delta > 0$ finden, so daß $|F(x)| \le \varepsilon\,|x - t|$ für alle $x \in \mathbb{B}_\delta(t)$ gilt.

Dazu wählen wir δ so, daß $|f(x)| = |f(x) - f(t)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in \mathbb{B}_\delta(t)$. Das können wir tun, weil f an der Stelle t stetig ist und dort verschwindet.

Nun können wir für $x \in \mathbb{B}_\delta(t)$ abschätzen:

$$|F(x)| = \left|\int_t^x f(s)\,\mathrm{d}\,s\right| \le \left|\int_t^x \varepsilon\,\mathrm{d}\,s\right| = \varepsilon\,|x - t| \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Satz 14.32. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I und stetig an der Stelle $t \in I$. Dann ist jedes unbestimmte Integral F von f differenzierbar an der Stelle t mit Ableitung $f(t)$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Funktion

$$\begin{aligned} x \mapsto F(x) - F(t) - f(t)\,(x-t) &= \int_t^x f(s)\,\mathrm{d}\,s - \int_t^x f(t)\,\mathrm{d}\,s \\ &= \int_t^x (f(s) - f(t))\,\mathrm{d}\,s \end{aligned}$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet. Das aber folgt unmittelbar aus (14.30), weil $x \mapsto f(x) - f(t)$ an der Stelle t stetig verschwindet (also von höherer als nullter Ordnung verschwindet). **q.e.d.**

Hauptsatz 14.33. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig (und damit integrierbar). Für eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:*

1. *F ist ein unbestimmtes Integral von f.*
2. *F ist differenzierbar auf I mit Ableitung f. Hierfür sagt man auch, daß F eine Stammfunktion von f ist.*

Beweis. Die Richtung (1)⇒(2) folgt unmittelbar aus (14.32) durch Anwendung an jeder Stelle.

Für die Richtung (2)⇒(1) nehmen wir an, F sei eine Stammfunktion. Da f stetig ist, hat f ein unbestimmtes Integral G. Mit der schon gezeigten Richtung schließen wir, daß G eine Stammfunktion von f ist. Also ist $F' = f = G'$. Ableiten ist linear (14.24), und somit verschwindet die Ableitung der Differenz $F - G$ überall. Mit (14.28) folgt, daß die Differenz $F - G$ konstant ist. Darum ist F ebenfalls ein unbestimmtes Integral. **q.e.d.**

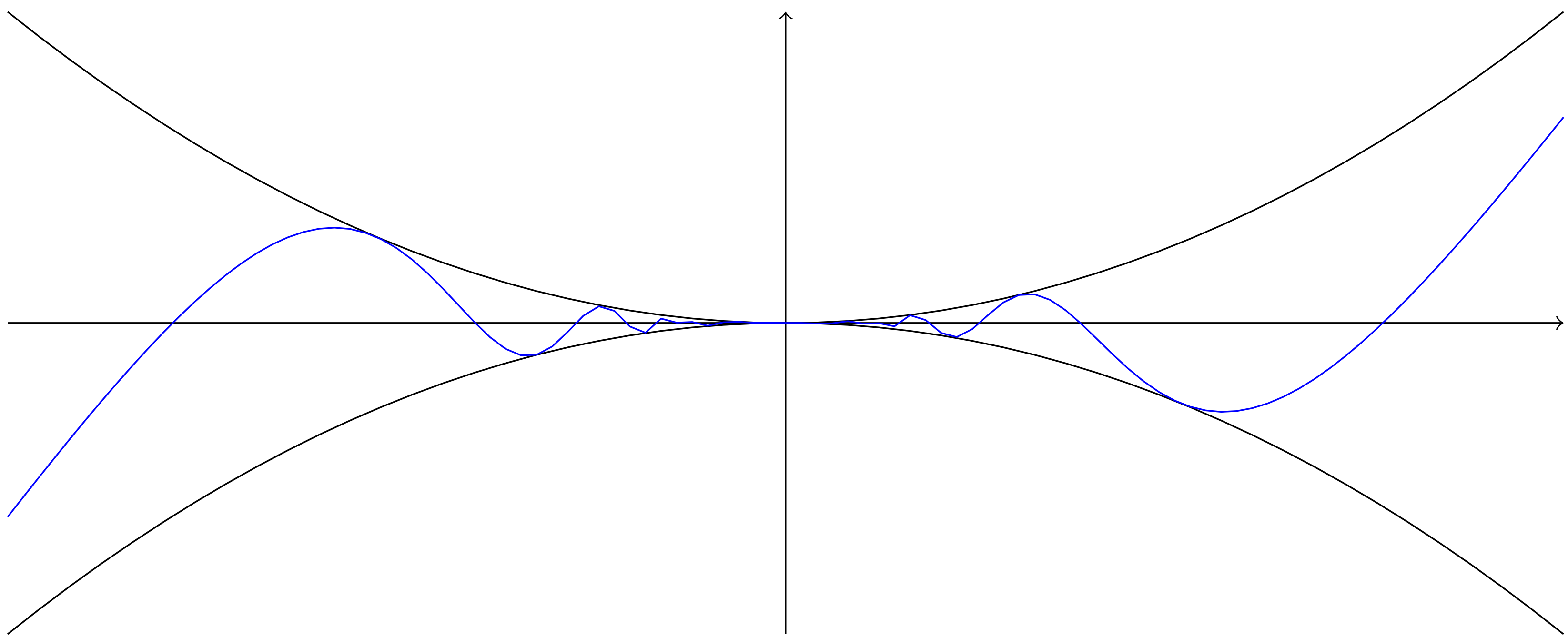
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x)$$

Korollar 14.34. *Der natürliche Logarithmus* $\ln$ *ist differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad \forall x \in (0, \infty)$$

Warnung vor unstetigen Ableitungen

Warnung 14.35. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist nicht unbedingt auf dem Definitionsbereich integrierbar. Darum können wir im Hauptsatz nicht von einer differenzierbaren Funktion ausgehen und dann behaupten, sie sei das Integral ihrer Ableitung.



Die Funktion ist für $x \neq 0$ differenzierbar, aber die Ableitung $f'(x)$ schwankt in jedem offenen Intervall um 0 von -1 nach $+1$. Darum ist f' in keinem dieser Intervalle integrierbar (oder stetig).

Ableiten und gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen I

Definition 14.36. Eine differenzierbare Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' eine auf I stetige Funktion ist.

Satz 14.37. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Die Folge $f'_\star$ der (stetigen) Ableitungen konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und eine Stammfunktion von g.*

Beweis. Zunächst ist g als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen eine stetige Funktion (13.17) und damit integrierbar, genauer gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\int_a^b g = \lim_{\star\to\infty} \int_a^b f'_\star = \lim_{\star\to\infty} (f_\star(b) - f_\star(a)) = f(b) - f(a)$$

Also ist f ein unbestimmtes Integral von g. Aus dem Hauptsatz (14.33) folgt darum, daß f differenzierbar mit Ableitung g ist. **q.e.d.**

Ableiten und gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen II

Satz 14.37. *Sei $f_\star : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die* punktweise *gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Die Folge $f'_\star$ der (stetigen) Ableitungen konvergiere* gleichmäßig *gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und eine Stammfunktion von g.*

Warnung 14.38. Die Formulierung von Satz (14.37) erscheint ungewohnt. Wir hätten vielleicht auf ein Ergebnis der folgenden Art gehofft:

> Der gleichmäßige Limes einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen ist (stetig) differenzierbar und seine Ableitung ist der punktweise (gleichmäßige) Limes der Ableitungsfolge.

Aussagen dieser Art sind jedoch *falsch*.

Die Produktregel I

Produktregel 14.40. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $t \in I$. Dann ist das Produkt $h := fg$ differenzierbar an der Stelle t und die Ableitung ist:*

$$h'(t) = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)$$

Beweis. An der Stelle t verschwinden die Funktionen

$$x \mapsto f(x) - f(t) - f'(t)\,(x - t)$$
$$x \mapsto g(x) - g(t) - g'(t)\,(x - t)$$

höherer als erster Ordnung. Die Funktionen $x \mapsto g(t)$ und $x \mapsto f(x)$ sind in einer Umgebung von t beschränkt. Darum verschwinden dort auch von höherer als erster Ordnung die Produkte:

$$x \mapsto f(x)\,g(t) - f(t)\,g(t) - f'(t)\,g(t)\,(x - t)$$
$$x \mapsto f(x)\,g(x) - f(x)\,g(t) - f(x)\,g'(t)\,(x - t)$$

Die Produktregel II

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x)\,g(t) - f(t)\,g(t) - f'(t)\,g(t)\,(x-t) \\ x &\mapsto f(x)\,g(x) - f(x)\,g(t) - f(x)\,g'(t)\,(x-t) \end{aligned}$$

verschwinden an der Stelle t von höherer als erster Ordnung.

Beweis (Fortsetzung). Außerdem verschwindet

$$x \mapsto (f(x) - f(t))g'(t)\,(x-t) = f(x)\,g'(t)\,(x-t) - f(t)\,g'(t)\,(x-t)$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung: Der Faktor $x-t$ verschwindet von mindestens erster Ordnung und der Faktor $f(x)-f(t)$ verschwindet von höherer als nullter Ordnung.

Darum verschwindet auch die Summe

$$\underbrace{f(x)\,g(x)}_{h(x)} - \underbrace{f(t)\,g(t)}_{h(t)} - \underbrace{(f'(t)\,g(t) - f(t)\,g'(t))}_{h'(t)}\,(x-t)$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung. Das aber heißt gerade, daß $h = fg$ an der Stelle t linear approximierbar ist mit Steigung $h'(t) = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)$. **q.e.d.**

Partielle Integration 14.41. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist für $a, b \in I$:*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x) \quad \mathrm{d}\, x \;=\; f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) =: [f g]_a^b$$

Die umgestellte Form zeigt die intendierte Anwendung:

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}\, x = [f g]_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}\, x$$

Beweis. Die Ableitungen f' und g' sind nach Voraussetung stetig auf I. Darum ist die Funktion

$$f' g + f g'$$

stetig. Wir wenden den Hauptsatz (14.33) darauf an und erkennen $f g$ als unbestimmtes Integral seiner Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} f(x)\, g(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

q.e.d.

Aufgabe 14.56. Beweise die Quotientenregel: Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $t \in I$ differenzierbar. Ferner sei $g(t) \neq 0$. Dann ist der Quotient $h := \frac{f}{g}$ differenzierbar an der Stelle t mit Ableitung $h'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$.

Proposition 14.45. *Für $k \in \mathbb{N}_1$ ist*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x^k = kx^{k-1} \quad \textit{und mit dem Hauptsatz:} \quad \int_0^x s^k \,\mathrm{d}\,s = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$$

Die Funktion $x \mapsto x^0$ ist konstant und darum verschwindet ihre Ableitung.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach k durch, die wir bei $k = 0$ und der verschwindenden Ableitung anfangen. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x^{k+1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(xx^k) \\
&= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x)x^k + x(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x^k) \\
&= x^k + xkx^{k-1} \\
&= (k+1)x^k
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt von k auf $k+1$ ist somit auch gerechtfertigt. **q.e.d.**

Die Kettenregel I

Kettenregel 14.43. *Sei $f : I \to J$ differenzierbar an der Stelle $t \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $f(t) \in J$. Dann ist die Verkettung $h := g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle t und die Ableitung ist:*

$$h'(t) = g'(f(t))\, f'(t)$$

Der Faktor $f'(t)$ wird auch innere Ableitung genannt.

Beweis. Die Funktion f ist differenzierbar$_{\text{st}}$ an der Stelle t. Also gibt es eine an der Stelle t stetige Funktion $f'_t : I \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) - f(t) = f'_t(x)\,(x - t)$$

Dabei ist $f'(t) = f'_t(t)$. Entsprechend gibt es eine an der Stelle $f(t)$ stetige Funktion $g'_{f(t)} : J \to \mathbb{R}$ mit:

$$g(y) - g(f(t)) = g'_{f(t)}(y)\,(y - f(t))$$

Hier gilt $g'(f(t)) = g'_{f(t)}(f(t))$.

Die Kettenregel II

$$f(x) - f(t) = f_t'(x)\,(x - t)$$
$$g(y) - g(f(t)) = g_{f(t)}'(y)\,(y - f(t))$$
$$h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

Beweis (Fortsetzung). Wir rechnen:

$$\begin{aligned} h(x) - h(t) &= g(f(x)) - g(f(t)) \\ &= g_{f(t)}'(f(x))\,(f(x) - f(t)) \\ &= \underbrace{g_{f(t)}'(f(x))\,f_f'(x)}_{=: h_t'(x)}\,(x - t) \end{aligned}$$

Die so definierte Funktion $h_t' : I \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle t. Also ist h dort differenzierbar$_{\text{st}}$. Die Ableitung hat den Wert

$$h'(t) = h_t'(t) = g_{f(t)}'(f(t))\,f_f'(t) = g'(f(t))\,f'(t)$$ **q.e.d.**

Substitutionsregel 14.44. *Sei $f : I \to J$ stetig differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig mit unbestimmtem Integral $G : J \to \mathbb{R}$. Dann gilt für $a, b \in I$:*

$$\int_a^b g(f(x))\, f'(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \,\mathrm{d}\, y = [G]_{f(a)}^{f(b)}$$

Beweis. Das unbestimmte Integral G ist nach dem Hauptsatz differenzierbar und eine Stammfunktion von g. Nun wende die Kettenregel auf die Verkettung $G \circ f$ an. **q.e.d.**

Satz 14.47. *Sei $f(x) = \Sigma a_\star x^\star$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f auf $(-R, R)$ stetig differenzierbar und die Ableitung wird im ganzen Definitionsbereich $(-R, R)$ durch die Potenzreihe beschrieben, die sich aus $f(x)$ durch gliedweises Ableiten ergibt:*

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i+1)x^i$$

Beweis. Die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i+1)x^i$ haben wir als formale Ableitung von $f(x)$ in Aufgabe (11.26) schon betrachtet und dort gesehen, daß sie ebenfalls den Konvergenzradius R hat.

Die Partialsummen $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ sind Polynome und ihre Ableitung ist mit (14.24) und (14.45) gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}(i+1)x^i$$

Partialsumme der formalen Ableitung

Die Ableitung einer Potenzreihe II

Beweis (Fortsetzung). Nach (12.46) ist die Konvergenz der Partialsummen gegen die Reihe auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b] \subseteq (-R, R)$ gleichmäßig. Insbesondere haben wir für $0 < r < R$ auf dem Intervall $(-r, r)$ die gleichmäßige Konvergenz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}(i+1)x^i \quad \xrightarrow[m\to\infty]{\text{gl.}} \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i+1)x^i$$

Wir deduzieren mit (14.37), daß $\Sigma a_\star x^\star$ auf $(-r, r)$ eine Stammfunktion der formalen Ableitung $\Sigma a_{\star+1}(\bigstar + 1)x^\star$ ist. Auf der anderen Seite ist jedes $t \in (-R, R)$ enthalten in einem Intervall $(-r, r)$ mit $0 < r < R$. Darum gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i+1)x^i$$

an *jeder* Stelle in $(-R, R)$. **q.e.d.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\exp(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(x)$$

Beispiel 14.48. *Für die Exponentialfunktion gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\exp(x) = \exp(x)$$

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\exp(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{x_i}{(i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{i!} = \exp(x)$$

q.e.d.

Aufgabe 14.49. Zeige:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin(x) = \cos(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(x) = -\sin(x)$$

Definition 14.59. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt 0-fach stetig differenzierbar, wenn sie stetig ist. Für $k \geq 1$ nennen wir f k-fach stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist, und die Ableitung f' $(k-1)$-fach stetig differenzierbar ist. Wir nennen die Funktion f glatt, wenn sie k-fach stetig differenzierbar ist für jede Ordnung k.

Augenscheinlich sind die stetig differenzierbaren Funktionen gerade die einfach stetig differenzierbaren Funktionen.

Definition 14.60. Wir nennen $f : I \to \mathbb{R}$ approximierbar von k-ter Ordnung an der Stelle $t \in I$, wenn es ein Polynom $g_t(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ gibt, das f an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung approximiert.

Ist f an *jeder* Stelle in I approximierbar von k-ter Ordnung, so nennen wir f approximierbar von k-ter Ordnung.

Bemerkung 14.61. In diesem Fall ist das Polynom $g_t(x)$ eindeutig bestimmt. Seien nämlich $g_t^1(x)$ und $g_t^2(x)$ zwei approximierende Polynome. Dann verschwindet ihre Differenz $g_t^1(x) - g_t^2(x)$ an der Stelle t von höherer als k-ter Ordnung und hat darum verschwindende Koeffizieten (14.5). **q.e.d.**

Satz 14.62. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(k+1)$-fach stetig differenzierbar. Dann ist für $x, t \in I$:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i)}(t) \;+\; R_{k+1}$$

$$= f(t) + (x-t) f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \;+\; R_{k+1}$$

mit dem Restglied

$$R_{k+1} = \int_t^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

Ferner gibt es ein s zwischen t und x mit:

$$R_{k+1} = \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(s) \qquad \textit{(Lagrangsche Form des Restgliedes)}$$

Beweis des Taylorschen Satzes: Induktionsverankerung $k = 0$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i)}(t) \; + \; R_{k+1}$$

$$= f(t) + (x-t) f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \; + \; R_{k+1}$$

mit dem Restglied

$$R_{k+1} = \int_t^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k+1)}(\xi) \, \mathrm{d}\, \xi$$

Beweis. Für den Anfang $k = 0$ ist der Taylorsche Satz eine unmittelbare Konsequenz des Hauptsatzes (14.33), denn es ist:

$$f(x) = f(t) + \int_t^x f'(\xi) \, \mathrm{d}\, \xi = f(t) + \int_t^x \frac{(x-\xi)^0}{0!} f'(\xi) \, \mathrm{d}\, \xi = f(t) + R_1$$

Beweis des Taylorschen Satzes: Schritt von k auf $k-1$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i)}(t) \;+\; \int_t^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

Beweis. Für den Induktionsschritt wenden wir partielle Integration auf das Restglied an. Sei also f nicht bloß $(k+1)$-fach sondern $(k+2)$-fach stetig differenzierbar. Dann ist:

$$\begin{aligned}
R_{k+1} &= \int_t^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\
&= \left[\frac{-(x-\xi)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)\right]_{\xi=t}^{\xi=x} - \int_t^x \frac{-(x-\xi)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\
&= \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) \;+\; \int_t^x \frac{(x-\xi)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\
f(x) &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i)}(t) \;+\; \int_t^x \frac{(x-\xi)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi
\end{aligned}$$

Die Lagrangesche Form des Restgliedes

Es gibt ein s zwischen t und x mit:

$$R_{k+1} = \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(s) \qquad \text{(Lagrangsche Form des Restgliedes)}$$

Beweis. Dazu wenden wir den Mittelwertsatz mit Dichtefunktion (13.35) an. Wir betrachten die Dichte $\rho : \xi \mapsto \frac{(x-\xi)^k}{k!}$ und beobachten, daß ρ nur an der Stelle $\xi = x$ einen Nulldurchgang hat. Also ändert ρ das Vorzeichen nicht auf dem Intervall $[t, x]$. Dann gibt es also eine Stelle $s \in [t, x]$ mit

$$\int_t^x \rho(\xi)\, f^{(k+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = f^{(k+1)}(s) \int_t^x \rho(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \left[-\frac{(x-\xi)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_t^x f^{(k+1)}(s)$$

$$= \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(s)$$

Dabei haben wir (13.35) mit einer negativen Dichte angewendet für den Fall, daß k ungerade und $x < t$ ist. **q.e.d.**

Approximation mehrfach stetig differenzierbarer Funktionen I

Korollar 14.64. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mindestestens k-fach stetig differenzierbar. Dann ist f an jeder Stelle $t \in I$ von k-ter Ordnung approximierbar. Das approximierende Polynom ist gerade durch die Taylorentwicklung gegeben. Wir haben nämlich die Darstellung*

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t) + (x-t)^k o(x)$$

worin $o : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle t von höherer als nullter Ordnung verschwindet (stetiger Nulldurchgang). Somit (14.10) verschwindet der Term $(x-t)^k o(x)$ von höherer als k-ter Ordnung.

Beweis. Wir wenden den Satz von Taylor an. Aufpassen müssen wir aber bei der Differenzierbarkeitsordnung. Wir erhalten darum bloß:

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(t) + R_k$$

Approximation mehrfach stetig differenzierbarer Funktionen II

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \tfrac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t) + \cdots + \tfrac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t) \ + \ (x-t)^k o(x)$$

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \tfrac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t) + \cdots + \tfrac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(t) \ + \ R_k$$

Beweis (Fortsetzung). Das Restglied stellen wir in der Lagrangschen Form dar:

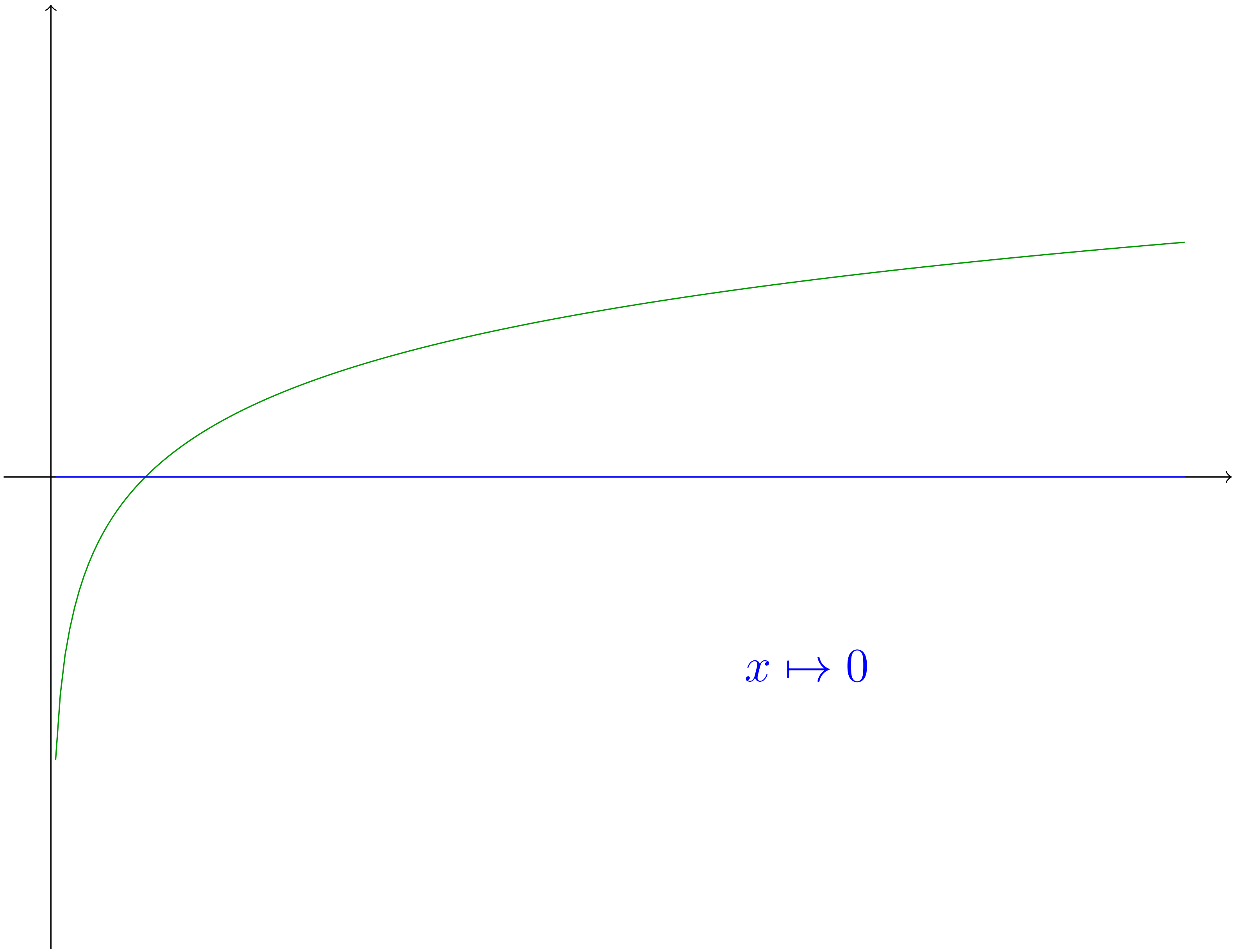
$$\begin{aligned} R_k &= \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(s_x) \qquad\qquad \text{für ein } s_x \in [t,x] \\ &= \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + (x-t)^k \underbrace{\frac{f^{(k)}(s_x) - f^{(k)}(t)}{k!}}_{=:o(x)} \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $o : I \to \mathbb{R}$ bestimmt. Sie hat an der Stelle $x = t$ einen stetigen Nulldurchgang, weil $f^{(k)}$ stetig ist und stets gilt:

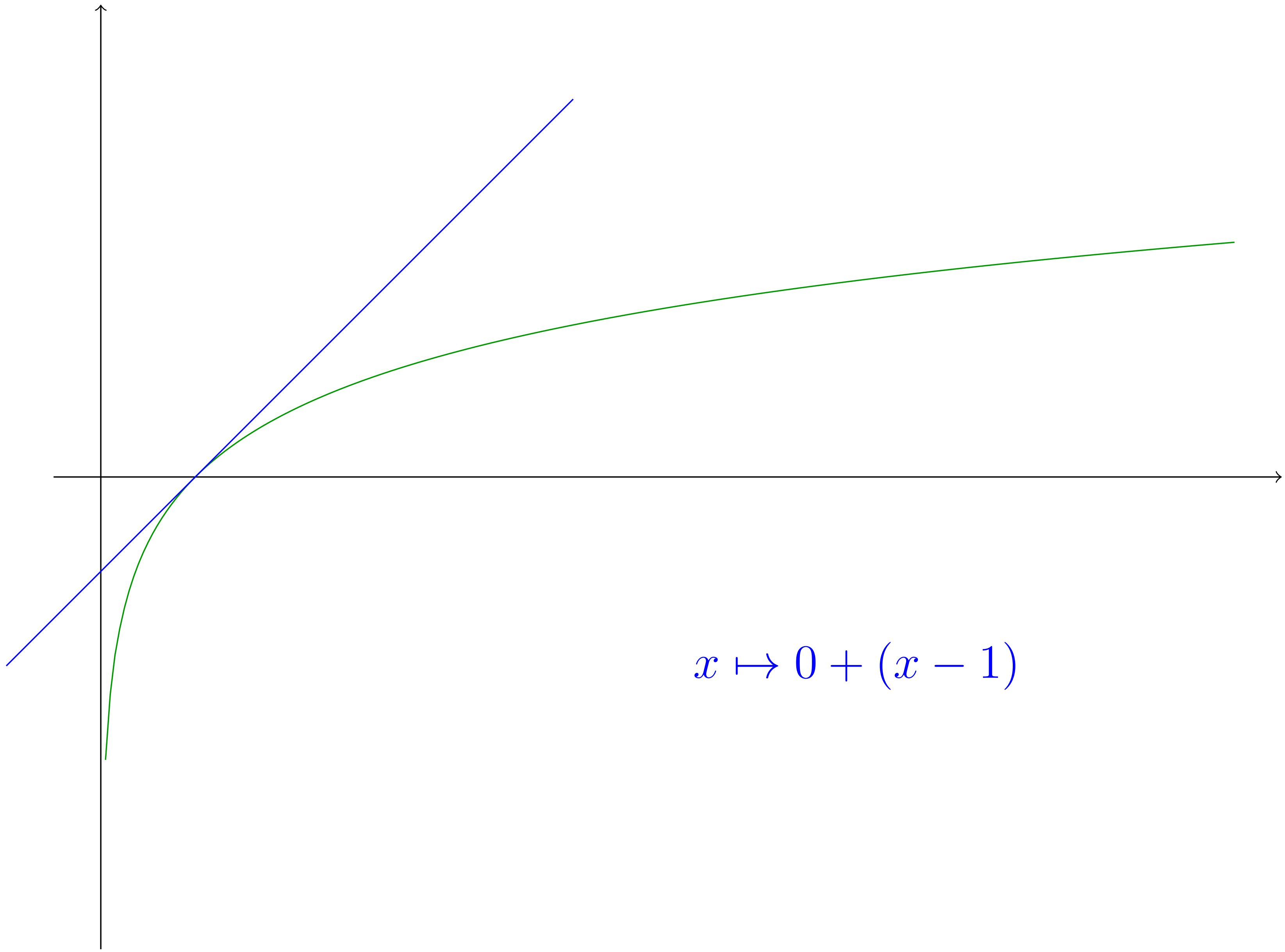
$$|s_x - t| \leq |x - t|$$

q.e.d.

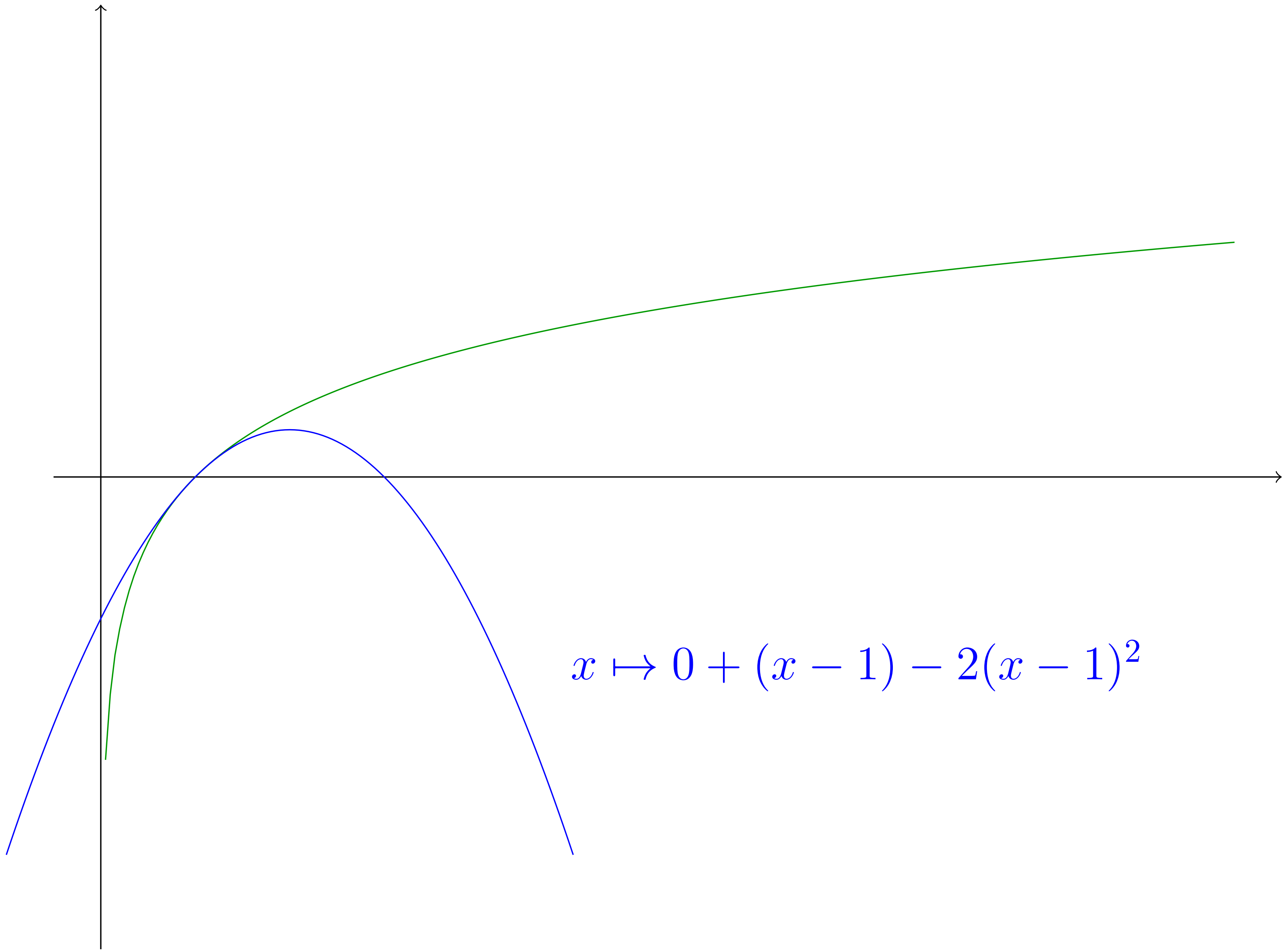
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 0)



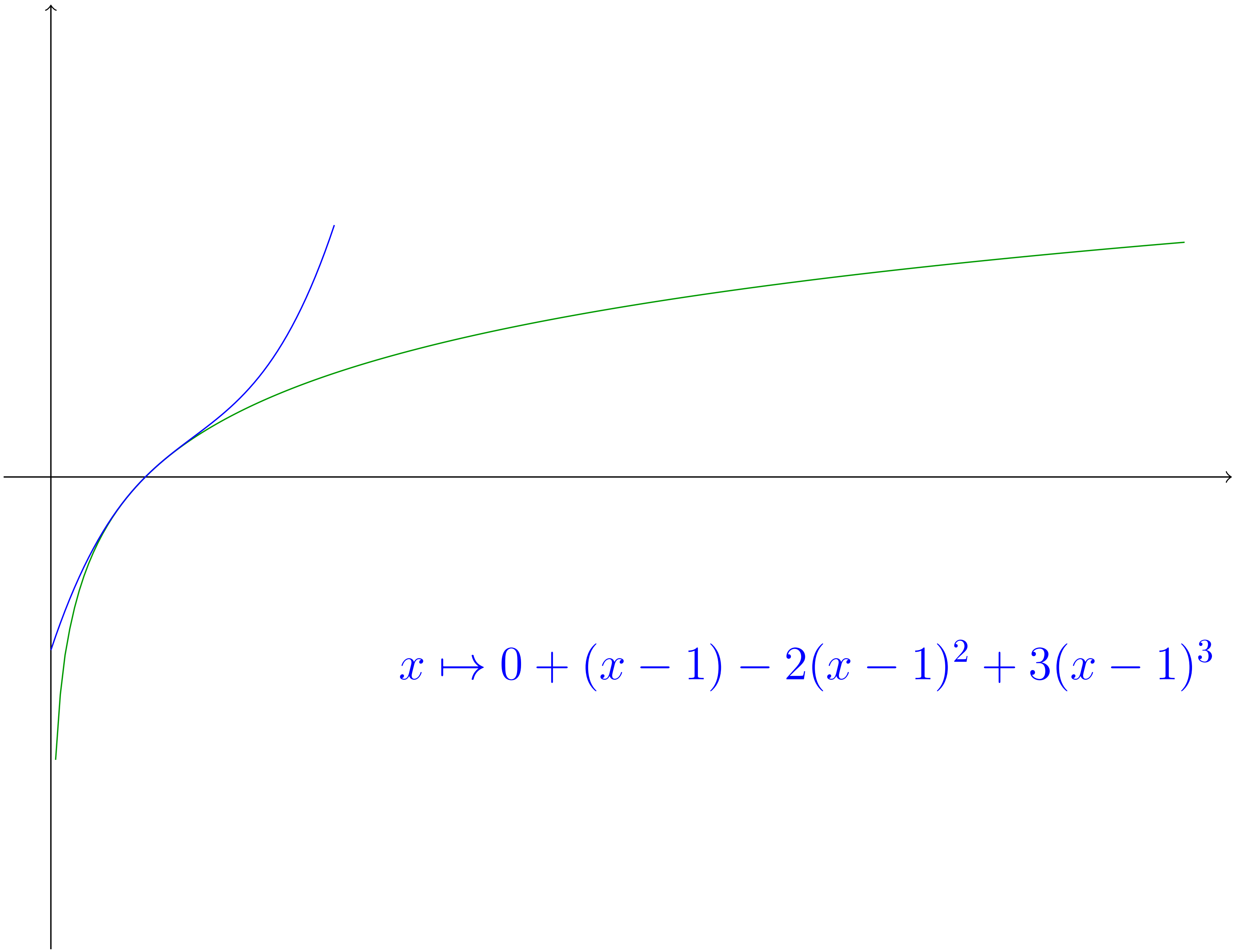
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 1)



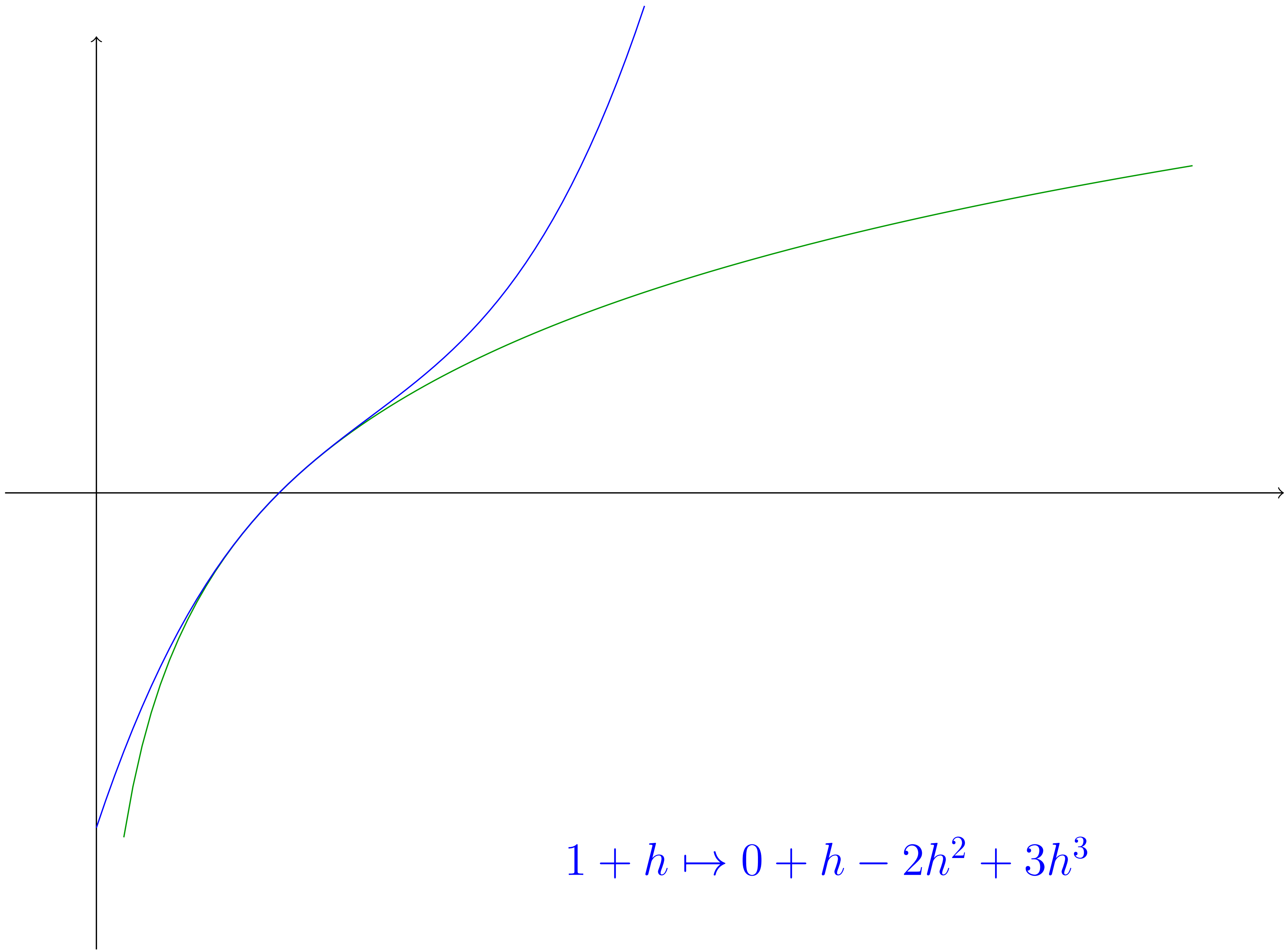
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 2)



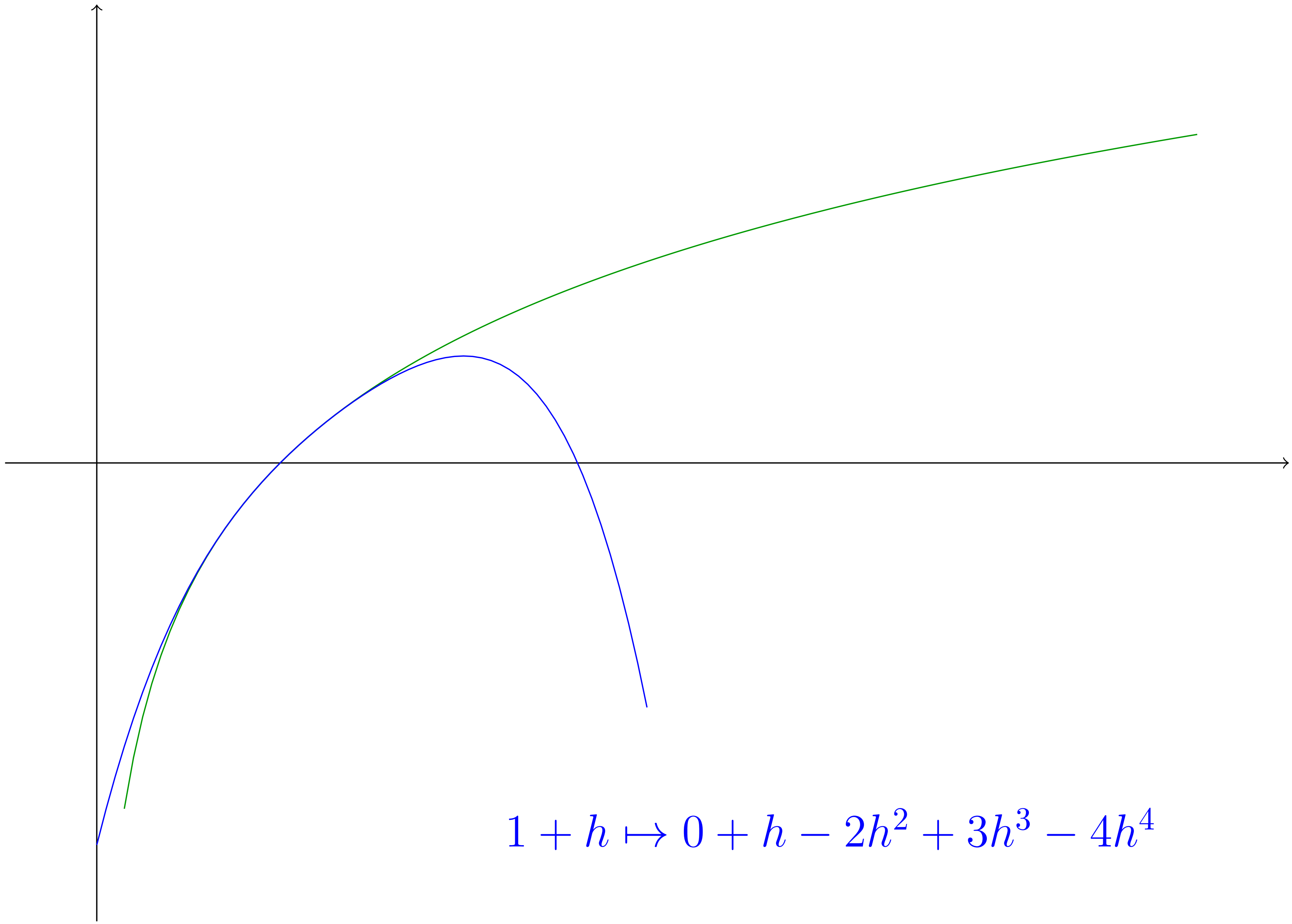
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 3)



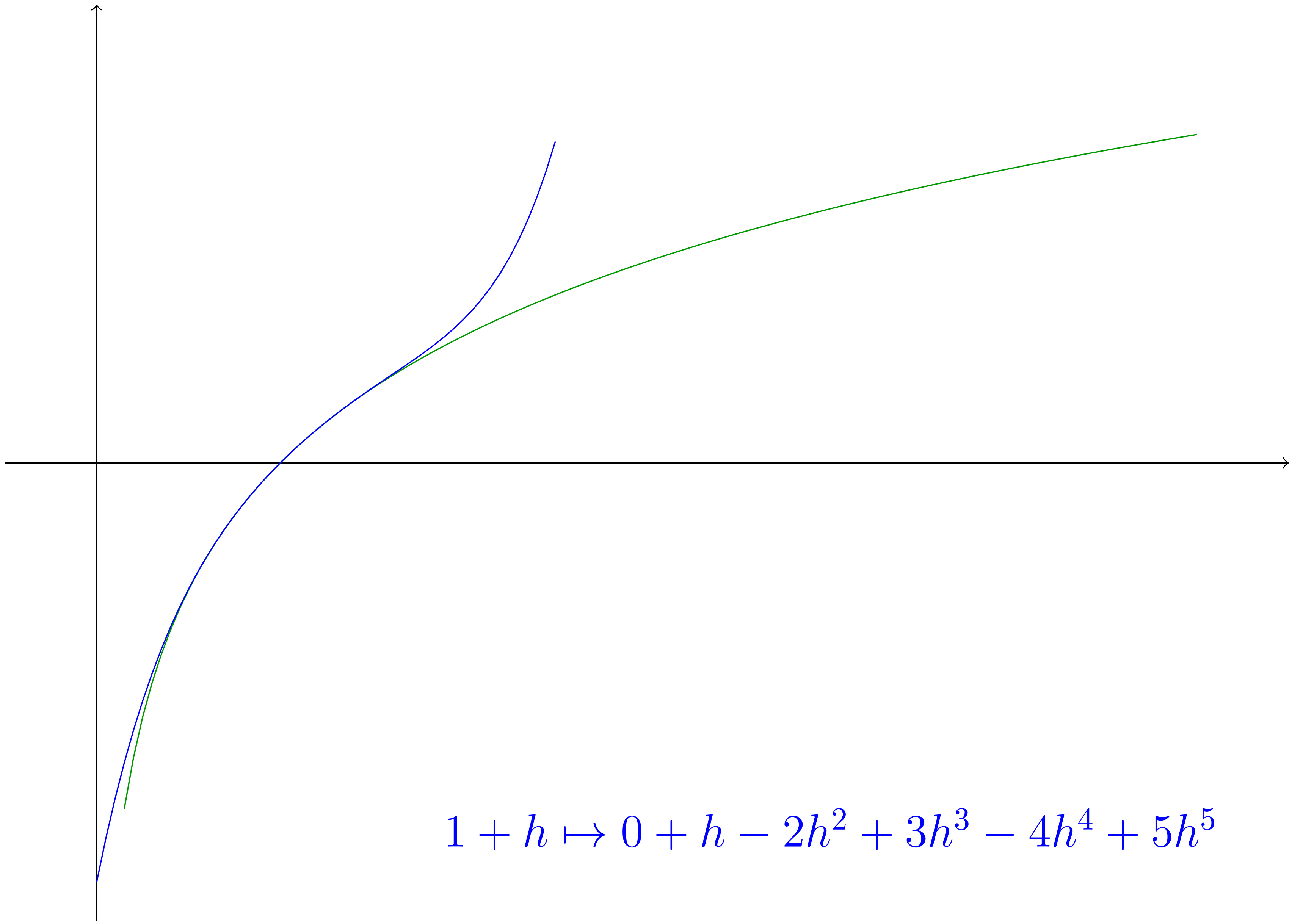
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 3)



Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 4)

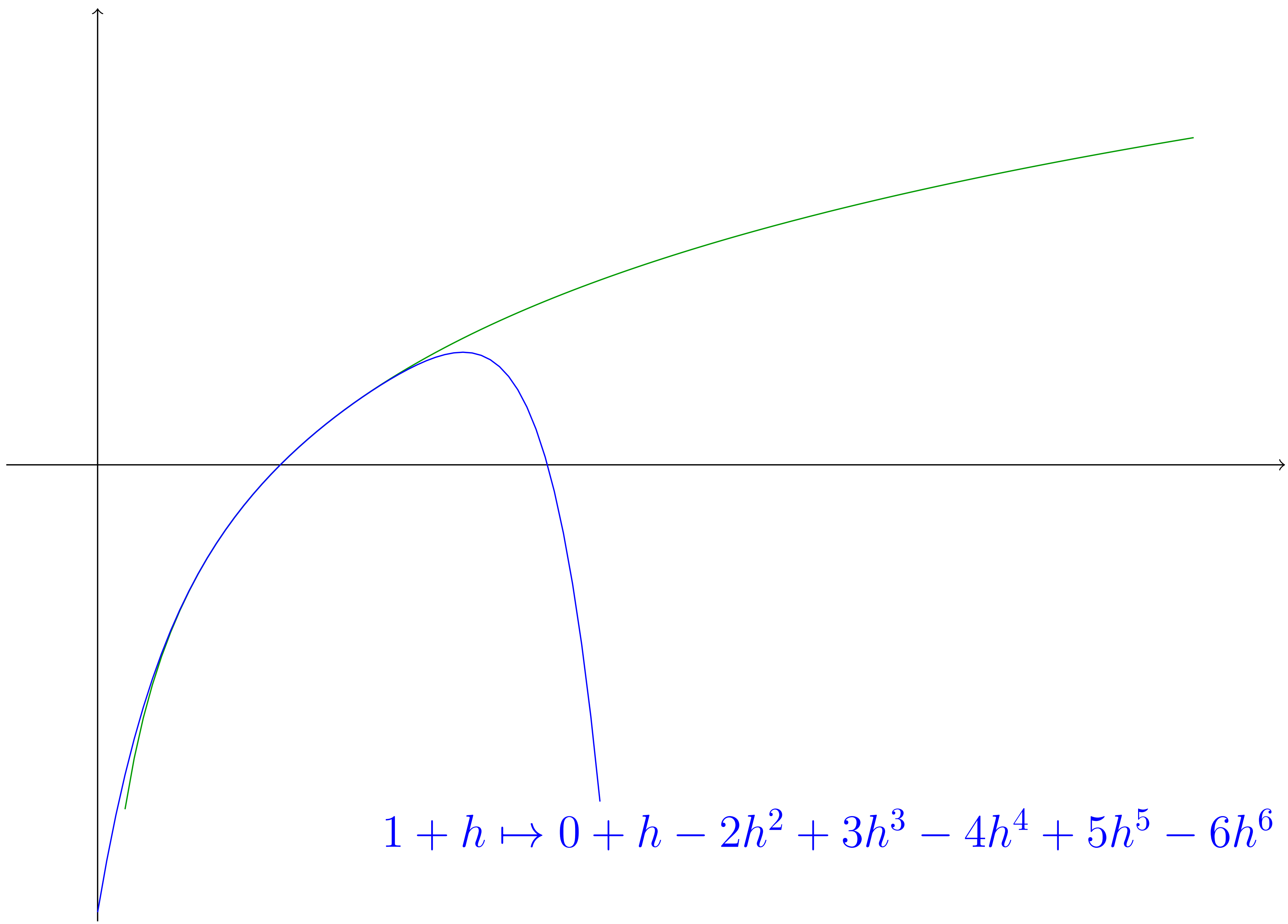


Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 5)

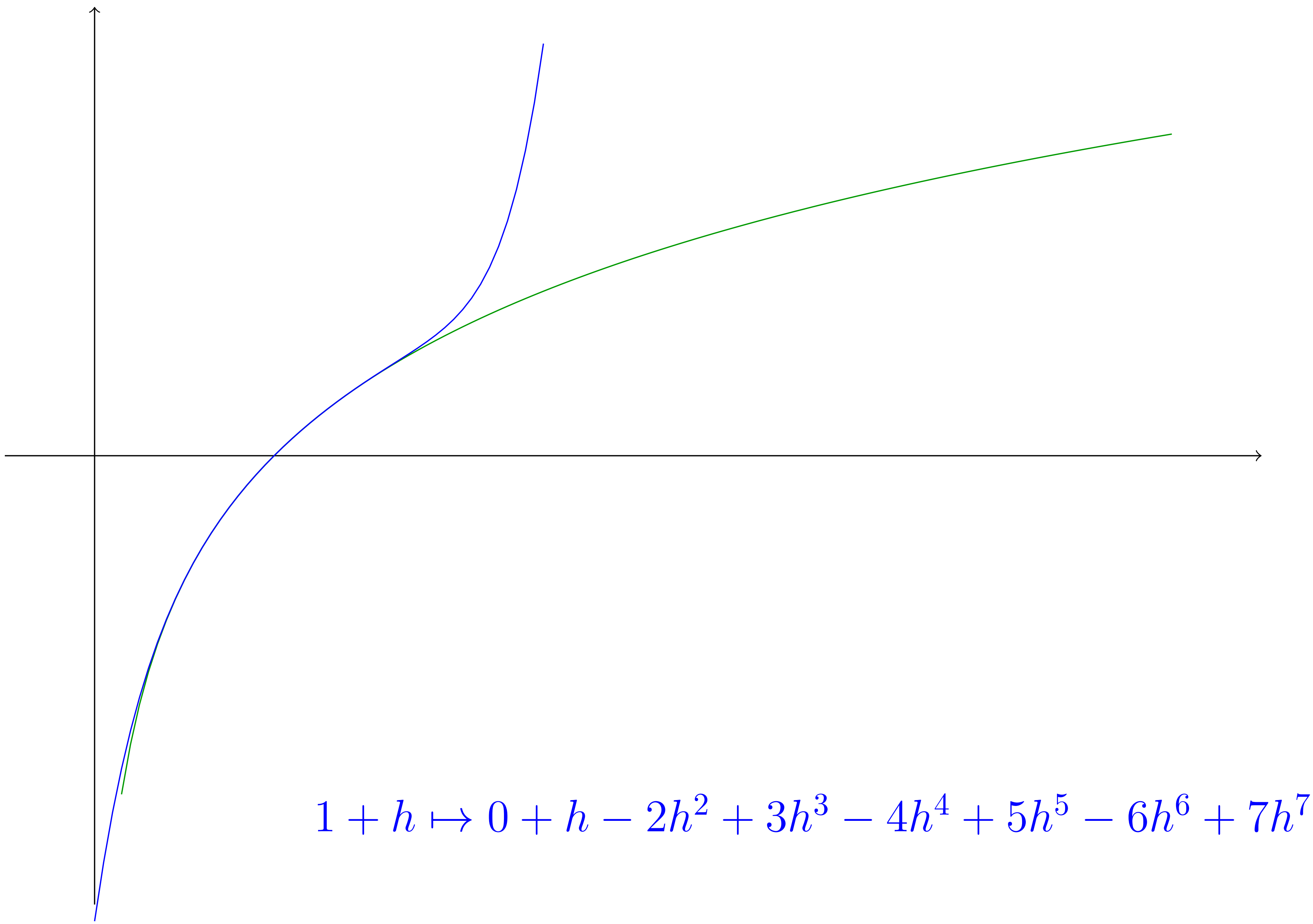


$$1 + h \mapsto 0 + h - 2h^2 + 3h^3 - 4h^4 + 5h^5$$

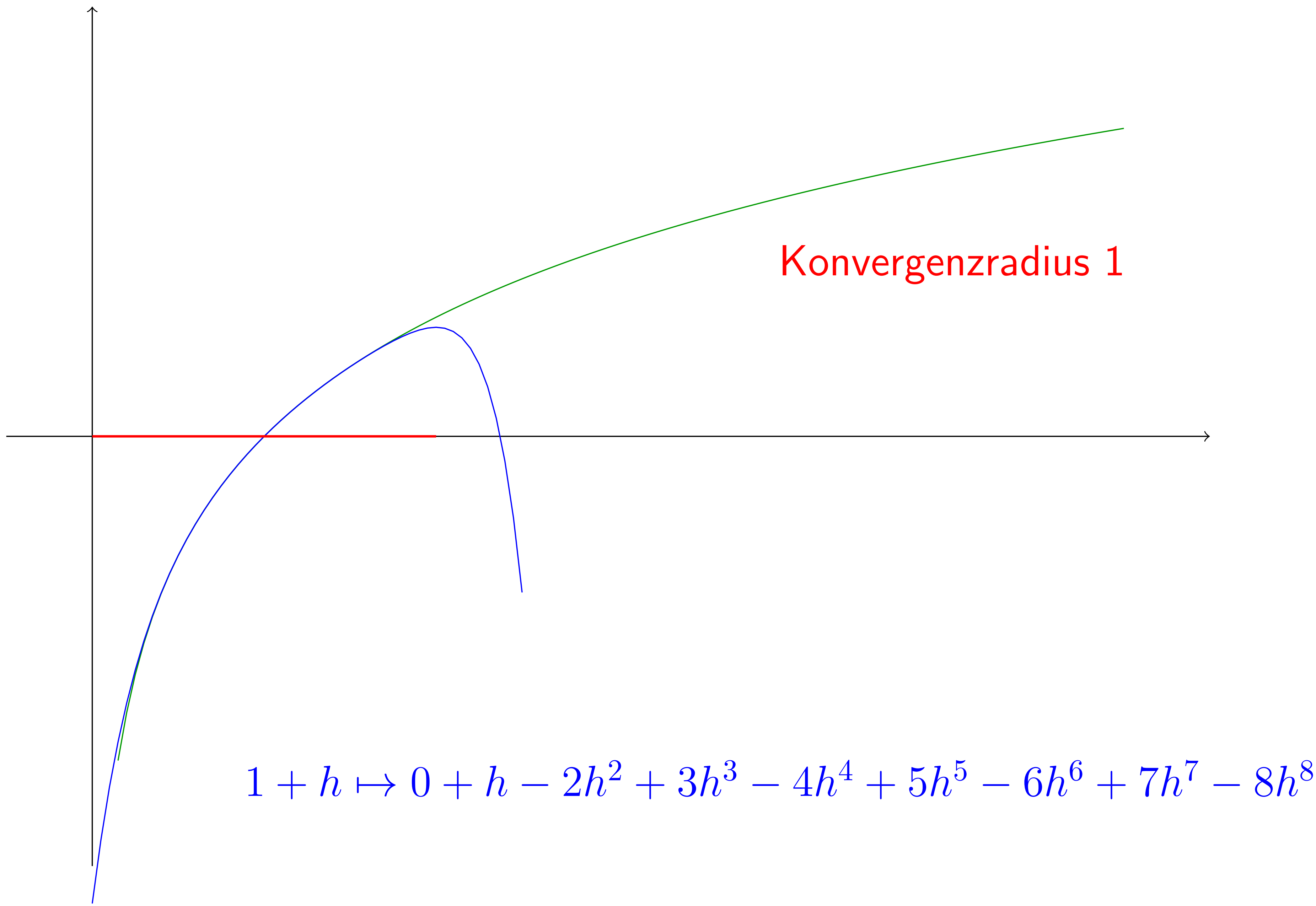
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 6)



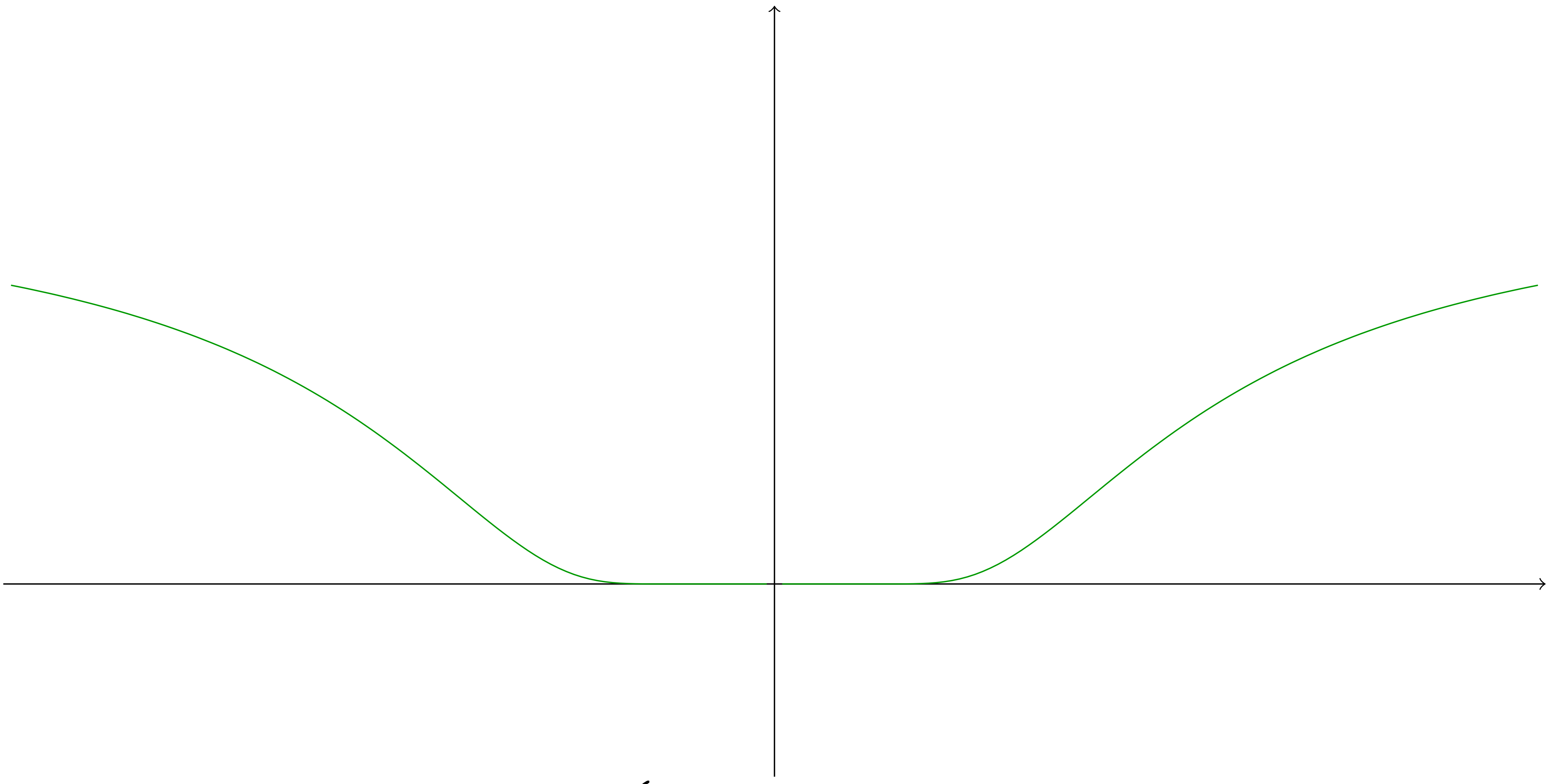
Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 7)



Taylorapproximation des Logarithmus (Ordnung 8)



Verschwindende Taylorentwicklung



$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

Eine hinreichende Bedingung für Minima (und Maxima)

Korollar 14.65. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mindestens zweifach stetig differenzierbar. An der Stelle $t \in I$ verschwinde die Ableitung $f'(t) = 0$. Die zweite Ableitung sei echt positiv $f''(t) > 0$. Dann nimmt f an der Stelle t ein lokales Minimum an. Das heißt, es gibt ein $\delta > 0$, so daß $f(x) > f(t)$ ist für alle $x \neq t$ in $\mathbb{B}_\delta(t) \cap I$.*

Beweis. Mit (14.64) stellen wir dar:

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2} f''(t) + (x-t)^2 o(x)$$

Da $f'(t) = 0$ ist erhalten wir:

$$f(x) = f(t) + \frac{(x-t)^2}{2}(f''(t) - 2o(x))$$

Die Funktion o verschwindet stetig an der Stelle t und f'' ist dort echt positiv. Also gibt es $\delta > 0$, so daß $f''(t) - 2o(x) > 0$ in der δ-Umgebung von t gilt. Damit ist das gesuchte δ gefunden, denn es gilt $\boxed{(x-t)^2 \geq 0}$ mit Gleichheit nur für $x = t$. **q.e.d.**

Kriterium für Extremalpunkte

Aufgabe 14.66. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ glatt. Es sei $k \geq 1$ die erste Ordnung, für die Ableitung $f^{(k)}$ an der Stelle t verschwindet:

$$f^{(j)}(t) \begin{cases} = 0 & \text{für } 1 \leq j < k \\ \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases}$$

Zeige: Ist k gerade und $f^{(k)}(t) > 0$, so hat f an der Stelle t ein lokales Minimum. Ist k gerade und $f^{(k)}(t) < 0$, so hat f an der Stelle t ein lokales Maxiumum. Ist k ungerade, so hat f an der Stelle t weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Korollar 14.50. *Der natürliche Logarithmus und die Exponentialfunktion sind zueinander inverse Funktionen:*

$$\ln(\exp(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\exp(\ln(y)) = y \qquad \forall y > 0$$

Beweis. Beide Funktionen sind differenzierbar: Nach (14.34) ist der Kehrwert die Ableitung des Logarithmus, während nach (14.48) die Exponentialfunktion beim Differenzieren unverändert bleibt. Darum ist die Verkettung differenzierbar, und wir erhalten für die Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)} \exp(x) = 1$$

Mit dem Hauptsatz (14.33) schließen wir

$$\ln(\exp(x)) = \ln(\exp(x)) - 0 = \ln(\exp(x)) - \ln(\exp(0)) = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}\,s = x$$

Korollar 14.50. *Der natürliche Logarithmus und die Exponentialfunktion sind zueinander inverse Funktionen:*

$$\ln(\exp(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\exp(\ln(y)) = y \qquad \forall y > 0$$

Beweis (Fortsetzung). Nun wollen wir bestätigen, daß für jedes $y > 0$

$$\exp(\ln(y)) = y$$

ist. Aus (11.44), (11.42) und (11.41) folgt, daß das Bild der Exponentialfunktion das offene Intervall $(0, \infty)$ ist, also der ganze Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus. Also gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \exp(x)$ und wir erhalten:

$$\exp(\ln(y)) = \exp\left(\overbrace{\ln(\exp(x))}\right) = \exp(x) = y \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Erinnerung 9.39. $\mathrm{e} = \lim_{\star\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\star}\right)^{\star}$

Proposition 14.51. *Es ist* $\mathrm{e} = \exp(1)$*. Das läßt sich äquivalent ausdrücken durch* $\ln(\mathrm{e}) = 1$*.*

Beweis. Der Logarithmus ist stetig. Darum gilt:

$$\begin{aligned}
\ln(\mathrm{e}) &= \ln\left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln(1)}{1/k} \\
&= \frac{\mathrm{d}\ln}{\mathrm{d}\,x}(1) = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

q.e.d.

Verallgemeinerte Potenzen I

Verallgemeinerte Potenzen 14.52. Für $x > 0$ und $k \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$x^k := \exp(k \ln(x))$$

Wir nennen x^k eine (verallgemeinerte) Potenz von x zum Exponenten k. Es gelten die Potzengesetze:

$$x^{k+l} = x^k x^l \qquad \text{und} \qquad (xy)^k = x^k y^k$$

Außerdem lassen sich die Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^k = k x^{k-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k} x^k = \ln(x)\, x^k$$

Beweis. Natürlich benutzen wir die Funktionalgleichungen von Exponentialfunktion (11.40) und Logarithmus (12.57). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x^{k+l} &= \exp((k+l)\ln(x)) \\ &= \exp(k\ln(x) + l\ln(x)) \\ &= \exp(k\ln(x))\exp(l\ln(x)) \\ &= x^k x^l \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} (xy)^k &= \exp(k\ln(xy)) \\ &= \exp(k(\ln(x)+\ln(y))) \\ &= \exp(k\ln(x) + k\ln(y)) \\ &= \exp(k\ln(x))\exp(k\ln(y)) \\ &= x^k y^k \end{aligned}$$

Verallgemeinerte Potenzen 14.52.

$$x^k := \exp(k \ln(x))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^k = k x^{k-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k} x^k = \ln(x)\, x^k$$

Beweis (Fortsetzung). Die Ableitungen berechnen sich wiefolgt:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^k &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \exp(k \ln(x)) \\ &= \exp(k \ln(x)) \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} k \ln(x)\right) \\ &= \exp(k \ln(x)) \left(\tfrac{k}{x}\right) \\ &= k x^k x^{-1} \\ &= k x^{k-1} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k} x^k &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k} \exp(k \ln(x)) \\ &= \exp(k \ln(x)) \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k} k \ln(x)\right) \\ &= x^k \ln(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

$$\sqrt{x} := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x^{\frac{1}{2}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Invertierbare Funktionen und ihre Ableitung I

Umkehrregel 14.70. *Seien I und J zwei offene Intervalle und $f : I \to J$ sei eine stetige Bijektion mit ebenfalls stetiger Umkehrung $g := f^{-1} : J \to I$. Ferner sei f differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$. Dann ist die Umkehrung g an der Stelle $y_0 := f(x_0)$ genau dann differenzierbar, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. Wir bilden die Steigungsfunktionen

$$f'_0 : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$$

$$g'_0 : y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{y - y_0}$$

Nach Voraussetzung hat f'_0 eine stetige Fortsetzung auf die Stelle x_0 mit Wert $f'(x_0)$. Zu zeigen ist, daß sich g'_0 stetig auf y_0 fortsetzen läßt genau dann, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist.

Invertierbare Funktionen und ihre Ableitung II

$$f_0' : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$$
$$g_0' : y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{y - y_0}$$

Beweis (Fortsetzung). Das ergibt sich aus der Rechnung:

$$g_0'(y)\, f_0'(g(y)) = \frac{g(y) - x_0}{y - y_0} \frac{f(g(y)) - y_0}{g(y) - x_0} = \frac{g(y) - x_0}{y - y_0} \frac{y - y_0}{g(y) - x_0} = 1$$

die für $y \neq y_0$ die Identität

$$g_0'(y) = \frac{1}{f_0'(g(y))}$$

bestätigt. Da g und f_0' stetig sind, ist hiermit genau dann eine an der Stelle y_0 stetige Funktion definiert, wenn der Nenner dort nicht verschwindet. Wie vorhergesagt, ist in diesem Fall der Wert von $g_0'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. **q.e.d.**

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen I

Lemma 14.71. *Sei I ein offenes Intervall um 0 und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so daß für jede rechte Seite $y \in [-\delta, \delta]$ die Gleichung $f(x) = y$ in der Unbestimmten x eindeutig lösbar ist im Intervall $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Die eindeutige Lösung hängt stetig von y ab. Kurz: Die Funktion f ist in einer Umgebung von 0 stetig umkehrbar.*

Beweis (erste Version). Die Ableitung ist stetig. Aus $f'(0) = 1 > 0$ folgt darum, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Mit (14.29) schließen wir, daß f auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ streng monoton wächst. Insbesondere ist f auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ injektiv.

Nun wählen wir $\delta > 0$ so, daß $[-\delta, \delta] \subseteq [f(-\varepsilon), f(\varepsilon)]$ ist. Da f stetig ist, läßt sich mit dem Zwischenwertsatz (13.28) jedes $y \in [-\delta, \delta]$ in der Form $y = f(x)$ darstellen mit einem (wie gesehen eindeutig bestimmten) $x \in [f(-\varepsilon), f(\varepsilon)]$.

Damit ist die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen $f(x) = y$ für Werte y hinreichend nahe bei 0 gezeigt.

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen II

Lemma 14.71. *$I \ni 0$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Es gibt $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so daß für jede Gleichung $f(x) = y$ mit $y \in [-\delta, \delta]$ eindeutig lösbar ist mit $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Die eindeutige Lösung hängt stetig von y ab.*

Beweis (Fortsetzung). Es bleibt die stetige Abhängigkeit der Lösung x von der rechten Seite y zu zeigen. Sei $y_\star$ eine Folge in $[-\delta, \delta]$, die gegen $y \in [-\delta, \delta]$ konvergiert. Nun ist $x = g(y)$ das Urbild von y unter f. Entsprechend ist $x_\star := g(y_\star)$ die Urbildfolge zu $y_\star$. Zu zeigen ist, daß $x_\star$ gegen x konvergiert (Folgenstetigkeit der Umkehrabbildung g).

Nun ist $x_\star$ eine beschränkte Folge, da sie das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ nicht verläßt. Sie hat darum mindestens einen Häufungspunkt λ. Sei $a_\star$ eine Teilfolge von $x_\star$, die gegen λ konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert $f(a_\star)$ gegen $f(\lambda)$. Da $f(a_\star)$ eine Teilfolge von $y_\star$ ist, konvergiert $f(a_\star)$ gegen y. Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert darum, daß $f(\lambda) = y$ ist. Die Injektivität von f auf dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ impliziert dann $\lambda = x$. Also hat $x_\star$ genau einen Häufungspunkt, nämlich x. Nach (9.24) konvergiert $x_\star$ gegen x. **q.e.d.**

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen III

Lemma 14.71. *$I \ni 0$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Es gibt $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so daß für jede Gleichung $f(x) = y$ mit $y \in [-\delta, \delta]$ eindeutig lösbar ist mit $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Die eindeutige Lösung hängt stetig von y ab.*

Beweis (zweite Version). Für $y \in \mathbb{R}$ definieren wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_y : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y + x - f(x) \end{aligned}$$

Wir beobachten:

1. Eine Stelle x ist ein Fixpunkt der Abbildung Φ_y genau dann, wenn $y = f(x)$ ist:

$$x = \Phi_y(x) = y + x - f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = f(x)$$

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen IV

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad \Phi_y(x) = y + x - f(x)$$

Beweis (Fortsetzung).

2. Die Abbildung ist Φ_y stetig differenzierbar mit $\Phi_y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Phi_y(x) = 1 - f'(x)$. Insbesondere verschwindet die Ableitung an der Stelle 0. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß $\left|\Phi_y'(t)\right| < \frac{1}{4}$ ist für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
3. Da $f(0) = 0$ ist, gilt $\Phi_y(0) = y + 0 - f(0) = y$.
4. Für je zwei Stellen $s, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (14.27) ein ξ zwischen s und t mit

$$|\Phi_y(s) - \Phi_y(t)| = \left|\Phi_y'(\xi)\,(s-t)\right| \leq \frac{1}{4}\,|s-t|$$

   Die Abbildung Φ kontrahiert.

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen V

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad \Phi_y(x) = y + x - f(x)$$

Beweis (Fortsetzung).

5. Insbesondere ist für $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$|\Phi_y(t) - y| = |\Phi_y(t) - \Phi_y(0)| \leq \frac{1}{4}\,|t| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

   Für $|y| \leq \frac{3}{4}\varepsilon$ bildet die Abbildung Φ_y das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ in sich ab. Wir setzen $\delta := \frac{3\varepsilon}{4}$ und setzen ab jetzt $y \in [-\delta, \delta]$ voraus.

6. Für ein gegebenes y hat die Gleichung $f(x) = y$ höchstens eine Lösung im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$, denn (siehe Punkt 1) die Abbildung Φ_y hat höchstens einen Fixpunkt in $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Sind nämlich s und t zwei Fixpunkte, so folgt aus (4):

$$|s - t| = |\Phi_y(s) - \Phi_y(t)| \leq \frac{1}{4}\,|s - t| \qquad \Longrightarrow \qquad |s - t| = 0$$

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen VI

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad \Phi_y(x) = y + x - f(x)$$

Beweis (Fortsetzung).

7. Wir definieren rekursive die eine Folge von Funktionen

$$g_\star : [-\delta, \delta] \longrightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$$

durch

$$\begin{aligned} g_0(y) &:= 0 \\ g_{i+1}(y) &:= \Phi_y(x_i) = y + g_i(y) - f(g_i(y)) \end{aligned}$$

Aus der Darstellung $g_{i+1}(y) = \Phi_y(x_i)$ folgern wir induktiv, daß das Bild von g_i im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ enthalten ist und darum g_{i+1} wohldefiniert ist.

8. Aus der Darstellung $g_{i+1}(y) = y + g_i(y) - f(g_i(y))$ folgern wir induktiv, daß all g_i stetig sind.

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad \Phi_y(x) = y + x - f(x)$$

Beweis (Fortsetzung).

9. Für jedes feste y und je zwei Indices $i \leq j$ können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} |g_i(y) - g_j(y)| &\leq |g_i(y) - g_{i+1}(y)| + \cdots + |g_{j-1}(y) - g_j(y)| \\ &\leq |g_i(y) - g_{i+1}(y)| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\ &\leq |g_0(y) - g_1(y)| \, \frac{1}{4^i}\frac{4}{3} \\ &= |y| \, \frac{1}{4^i}\frac{4}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{4^i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Die Folge $g_\star(y)$ ist also Cauchy-konvergent. Die Funktionenfolge $g_\star$ konvergiert darum punktweise gegen eine Grenzfunktion $g : [-\delta, \delta] \to [-\varepsilon, \varepsilon]$

Invertierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen VIII

$$\Phi_y(x) = y + x - f(x) \qquad\qquad |g_i(y) - g_j(y)| \le \frac{\varepsilon}{4^i}$$

Beweis (Fortsetzung).

10. Für jedes $j \ge i$ liegt $g_j(y)$ in der $\frac{\varepsilon}{4^i}$-Umgebung von $g_i(y)$. Darum liegt auch der Limes $g(y)$ in der $\frac{\varepsilon}{4^i}$-Umgebung von $g_i(y)$. Diese Distanzabschätzung hängt nicht von y ab. Die Folge $g_\star$ konvergiert also **gleichmäßig** gegen g. Darum ist g stetig wegen (8).

11. Die Stetigkeit von Φ_y impliziert, daß der Grenzwert $g(y) = \lim_{\star\to\infty} g_\star(y)$ ein Fixpunkt ist. Wir haben nämlich:

$$\begin{array}{lllll} 0, & \Phi_y(0)\,, & \Phi_y(\Phi_y(0))\,, & \ldots & \to g(y) \\ \Phi_y(0)\,, & \Phi_y(\Phi_y(0))\,, & \Phi_y(\Phi_y(\Phi_y(0)))\,, & \ldots & \to \Phi_y(g(x)) \end{array}$$

Also ist $g(y)$ die eindeutig bestimmte (6) Lösung der Gleichung $f(x) = y$ im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Nach (10) hängt diese Lösung stetig von y ab. **q.e.d.**

Der Umkehrsatz I

Satz 14.72. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und t eine Stelle in I. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Abbildung f hat an der Stelle t eine nicht-verschwindende Ableitung $f'(t) \neq 0$.*
2. *Die Funktion f ist in einer Umgebung von t stetig umkehrbar und die Umkehrung ist an der Stelle t differenzierbar.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Umkehrung stetig differenzierbar und hat an der Stelle $f(t)$ die Ableitung $\frac{1}{f'(t)}$.

Beweis. Die Funktionen

$$\tau : x \mapsto x + t \qquad \text{und} \qquad \sigma : y \mapsto \frac{y - f(t)}{f'(t)}$$

sind glatt, bijektiv, und haben eine glatte Umkehrung.

Der Umkehrsatz II

$$\tau : x \mapsto x + t \qquad \text{und} \qquad \sigma : y \mapsto \frac{y - f(t)}{f'(t)}$$

Beweis (Fortsetzung). (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $f'(t) \neq 0$. Dann erfüllt die Verkettung

$$g := \sigma \circ f \circ \tau : x \mapsto \frac{f(x+t) - f(t)}{f'(t)}$$

die Voraussetzungen von Lemma (14.71), und wir schließen, daß g in einer Umgebung von 0 stetig umkehrbar ist. Dann ist aber $f = \tau^{-1} \circ g \circ \sigma^{-1}$ in einer Umgebung von t stetig umkehrbar. Mit der Umkehrregel (14.70) schließen wir, daß die Umkehrung differenzierbar an der Stelle $f(t)$ mit Ableitung $\frac{1}{f'(t)}$ ist.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei nun f in einer Umgebung von t stetig umkehrbar mit einer an der Stelle $f(t)$ differenzierbaren Ableitung, so folgt aus der Umkehrregel unmittelbar, daß $f'(t) \neq 0$ ist.

Der Umkehrsatz III

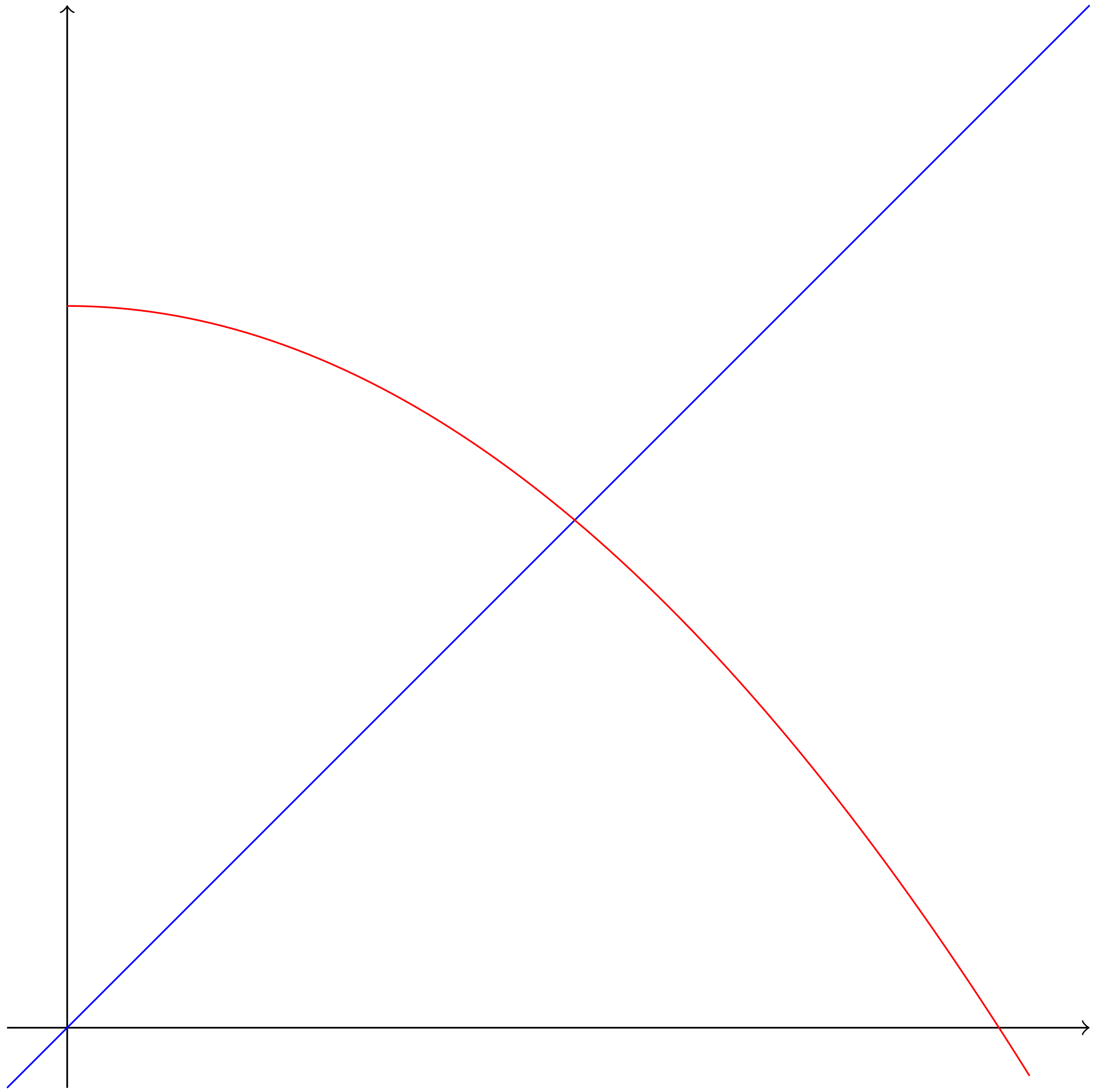
Satz 14.72. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und t eine Stelle in I. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Abbildung f hat an der Stelle t eine nicht-verschwindende Ableitung $f'(t) \neq 0$.*
2. *Die Funktion f ist in einer Umgebung von t stetig umkehrbar und die Umkehrung ist an der Stelle t differenzierbar.*

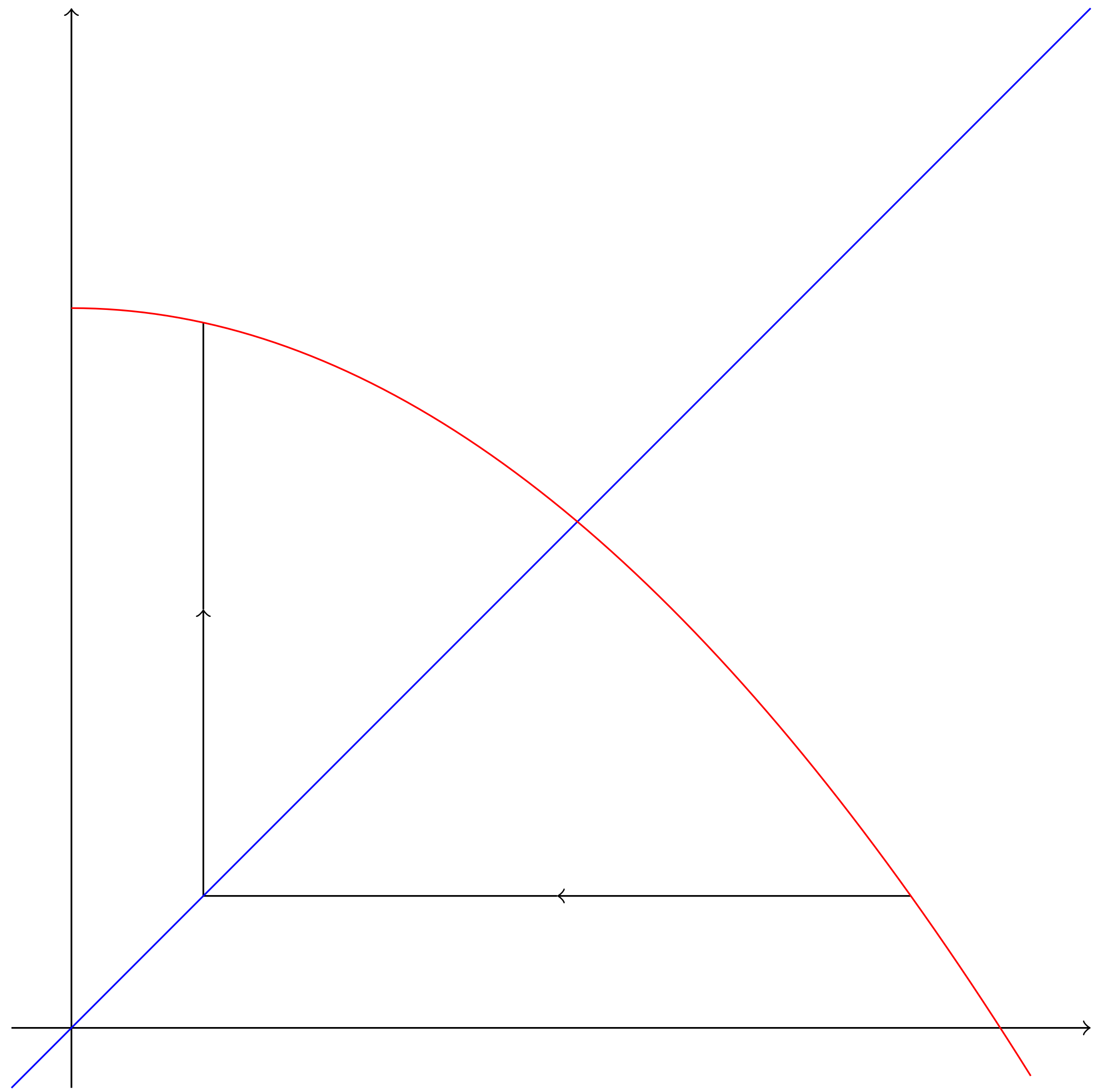
Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Umkehrung stetig differenzierbar und hat an der Stelle $f(t)$ die Ableitung $\frac{1}{f'(t)}$.

Beweis (Fortsetzung). Es bleibt der Zusatz zu zeigen. Da f stetig differenzierbar ist, folgt aus $f'(t) \neq 0$, daß die Ableitung f' in einer offenen Umgebung U von t nicht verschwindet. An jedem Punkt dieser Umgebung sind darum die Voraussetzungen erfüllt und wir erhalten die Differenzierbarkeit der Umkehrung an allen Punktes der Bildes $f(U)$. **q.e.d.**

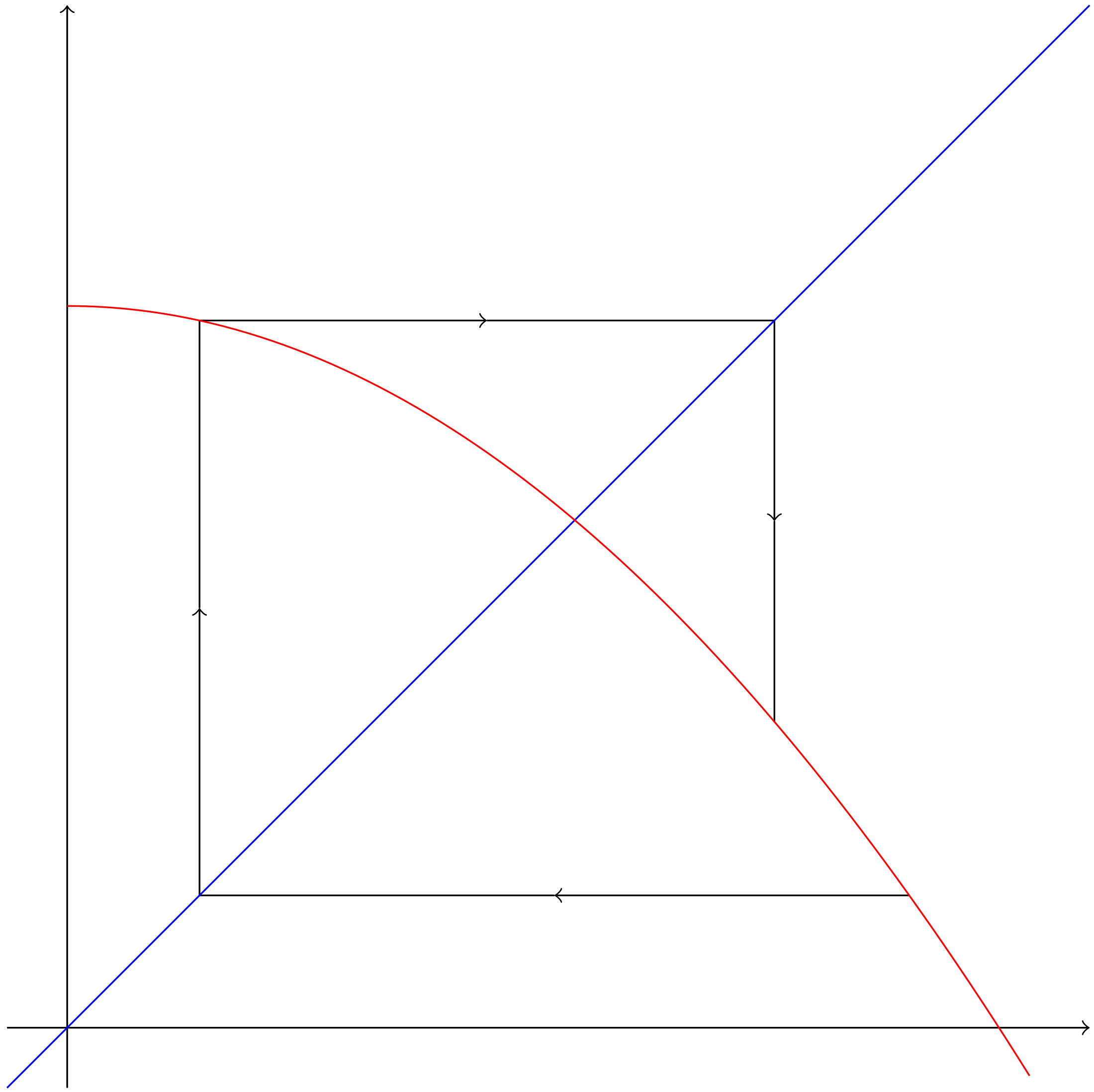
Fixpunkte durch Iteration I



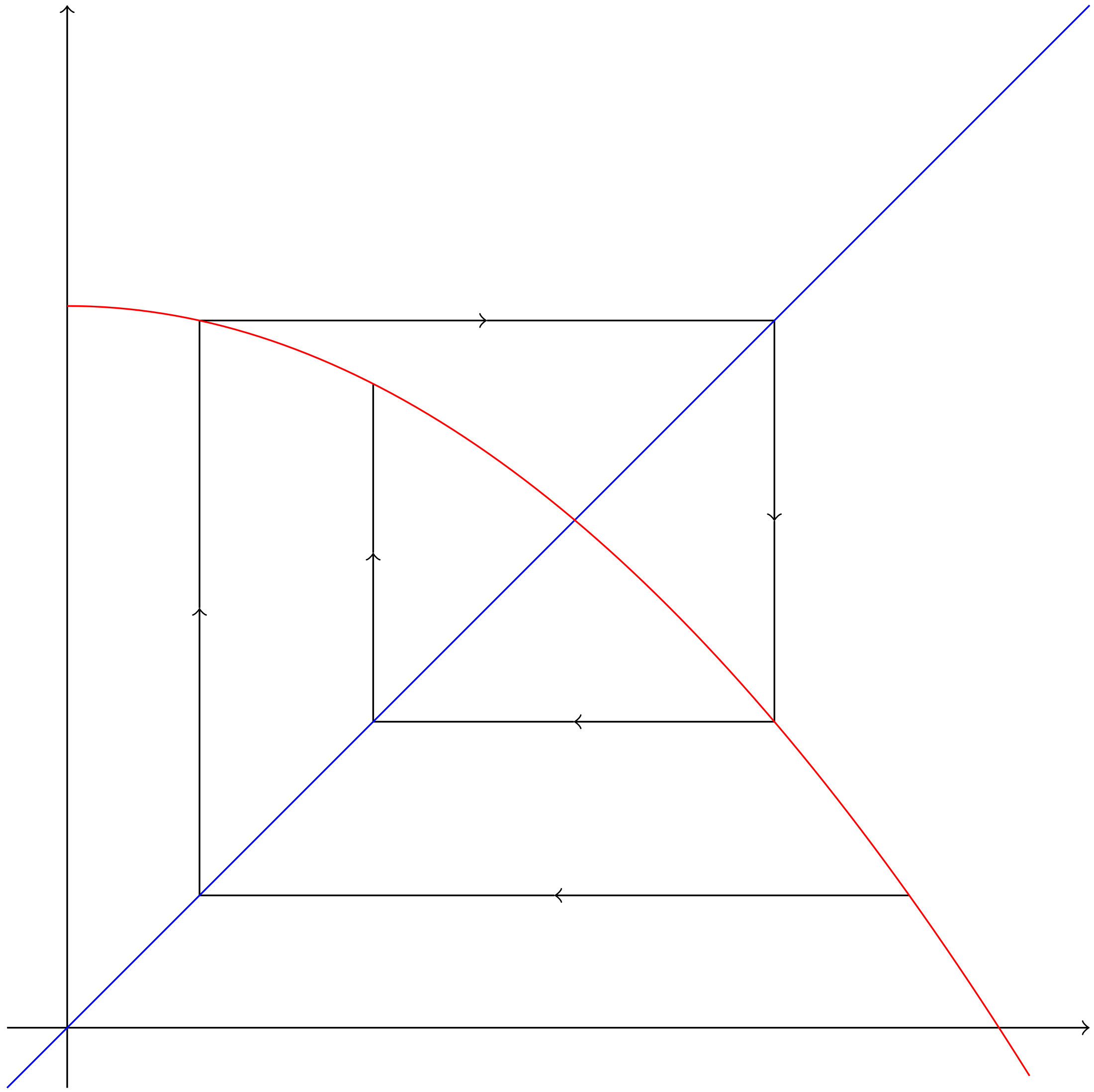
Fixpunkte durch Iteration I



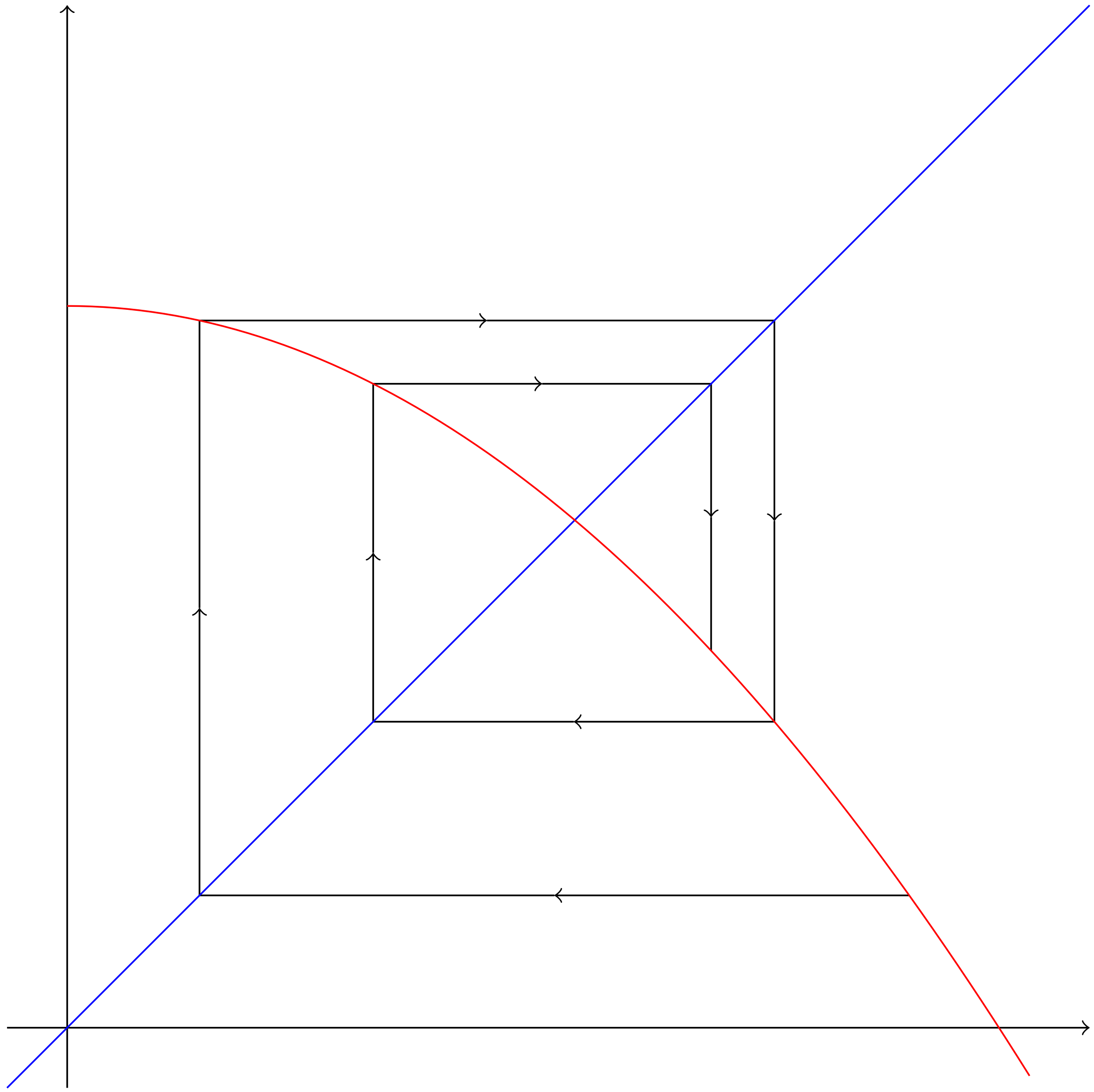
Fixpunkte durch Iteration I



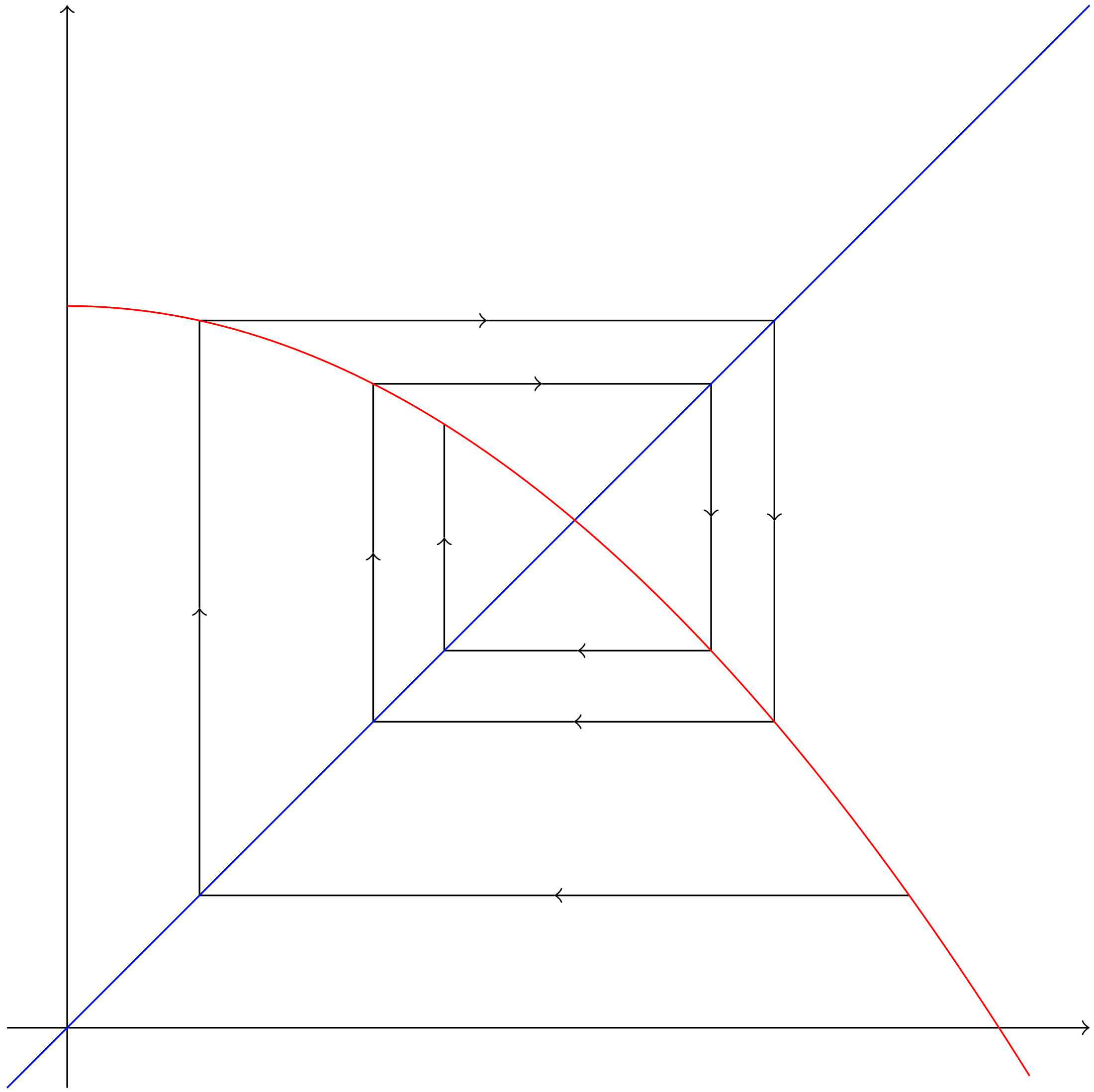
Fixpunkte durch Iteration I



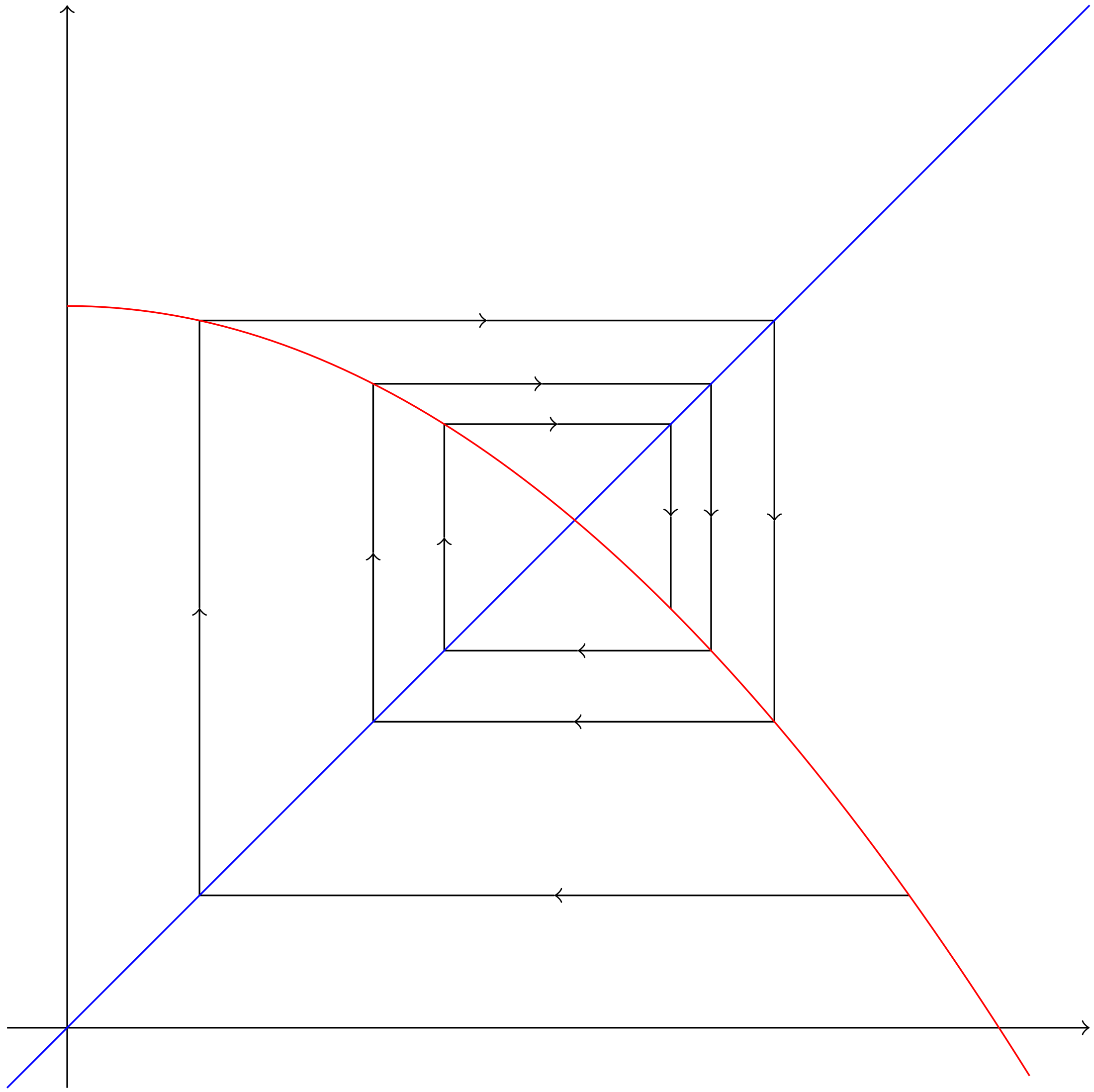
Fixpunkte durch Iteration I



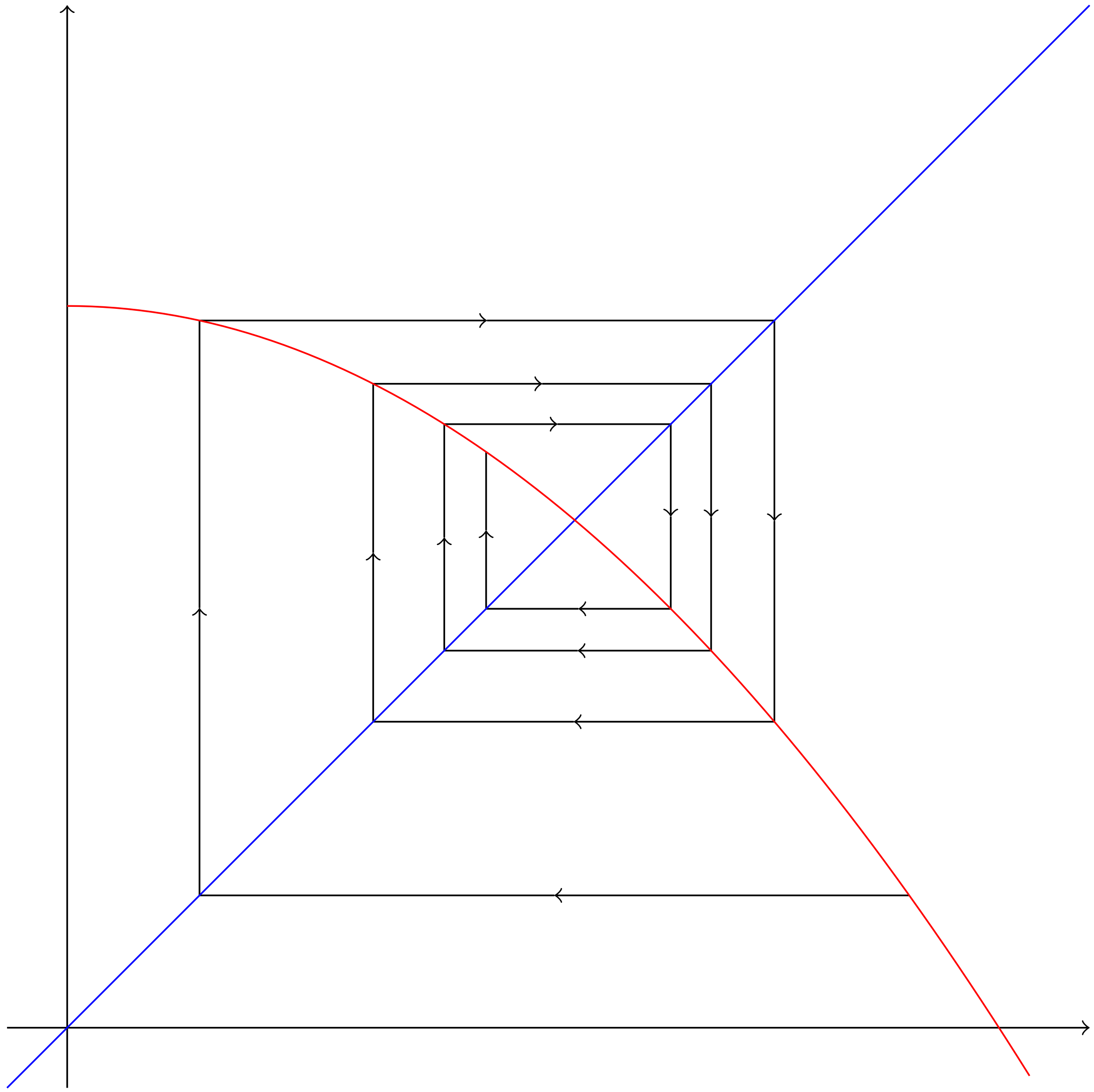
Fixpunkte durch Iteration I



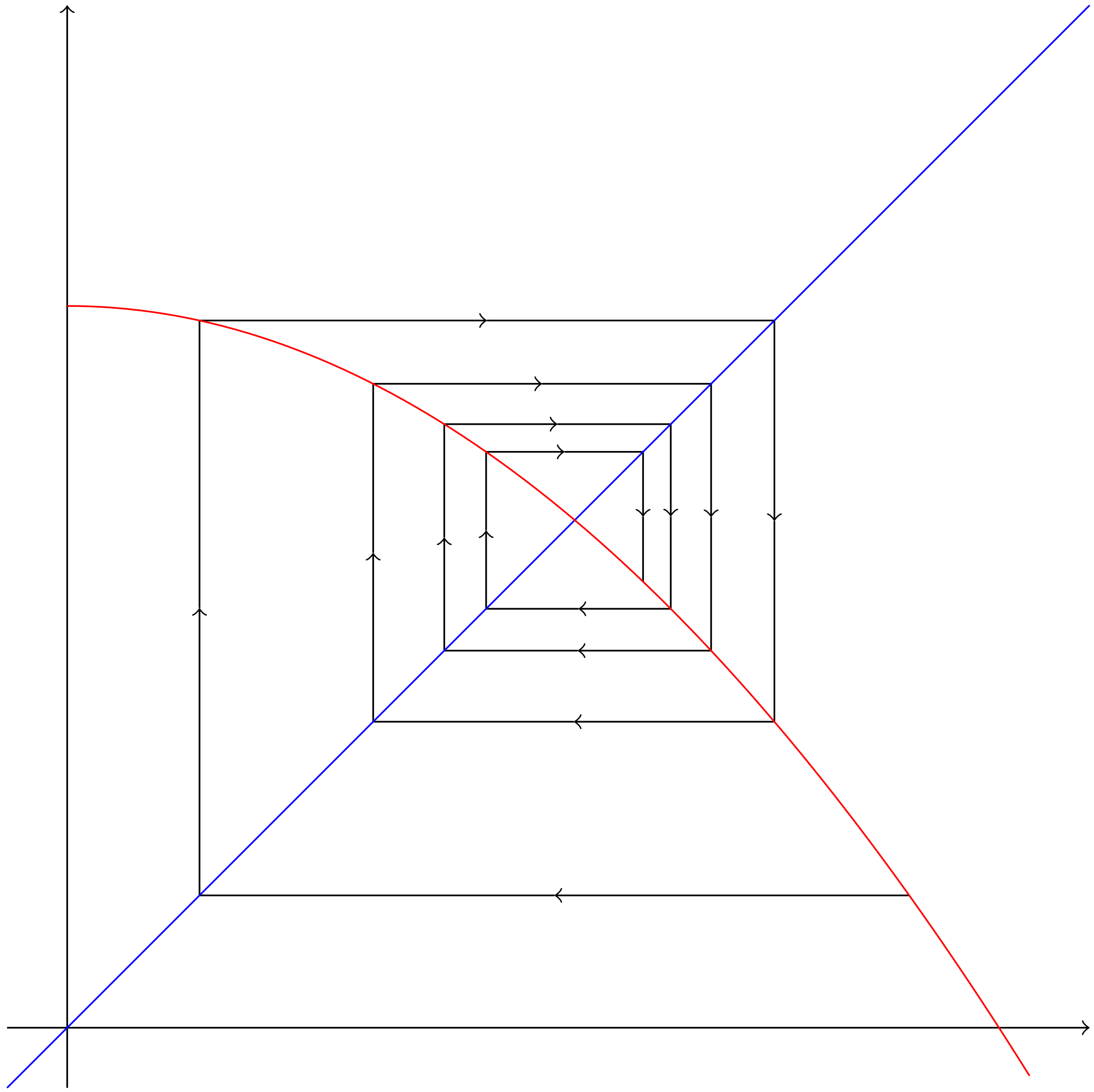
Fixpunkte durch Iteration I



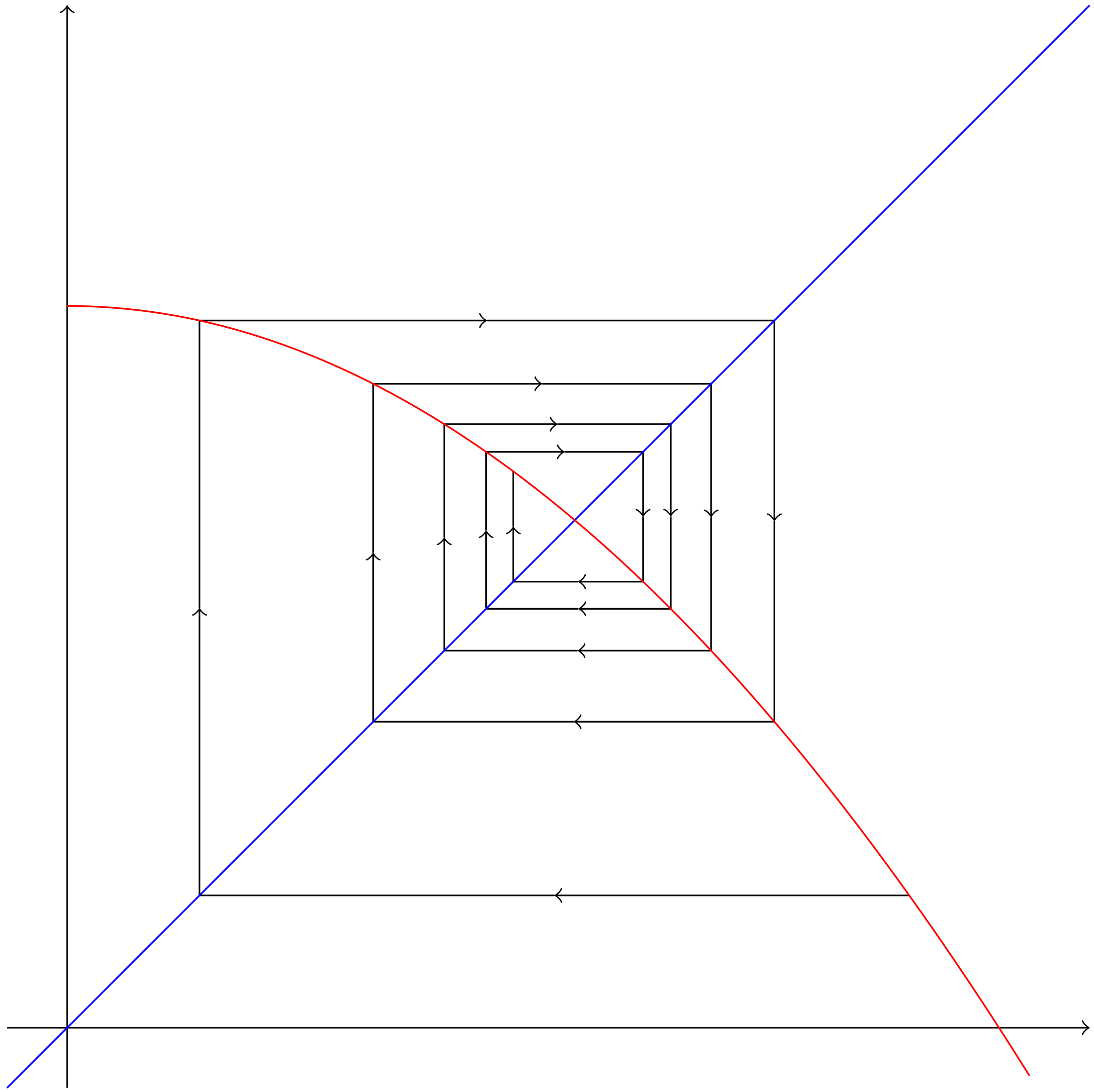
Fixpunkte durch Iteration I



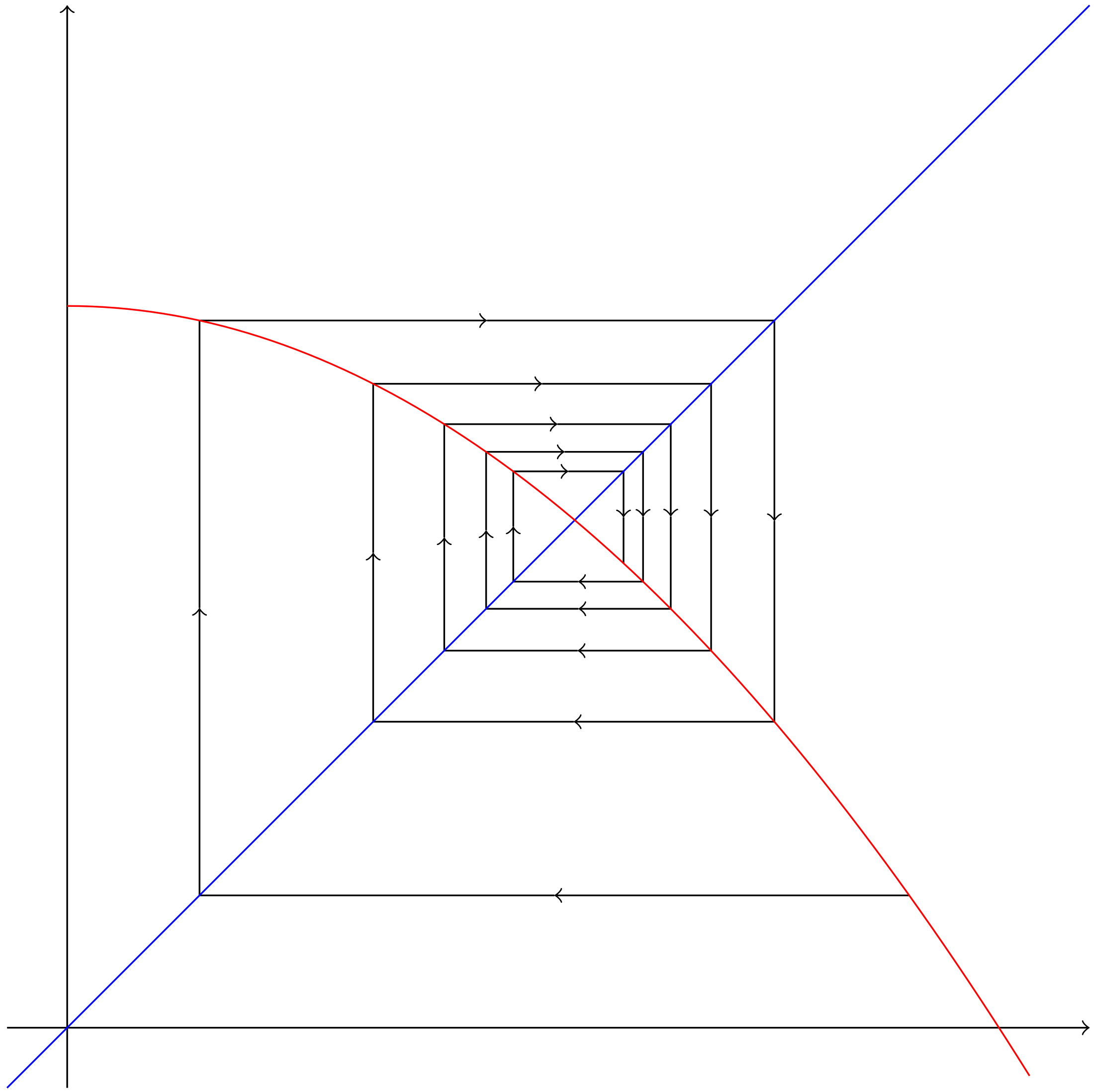
Fixpunkte durch Iteration I



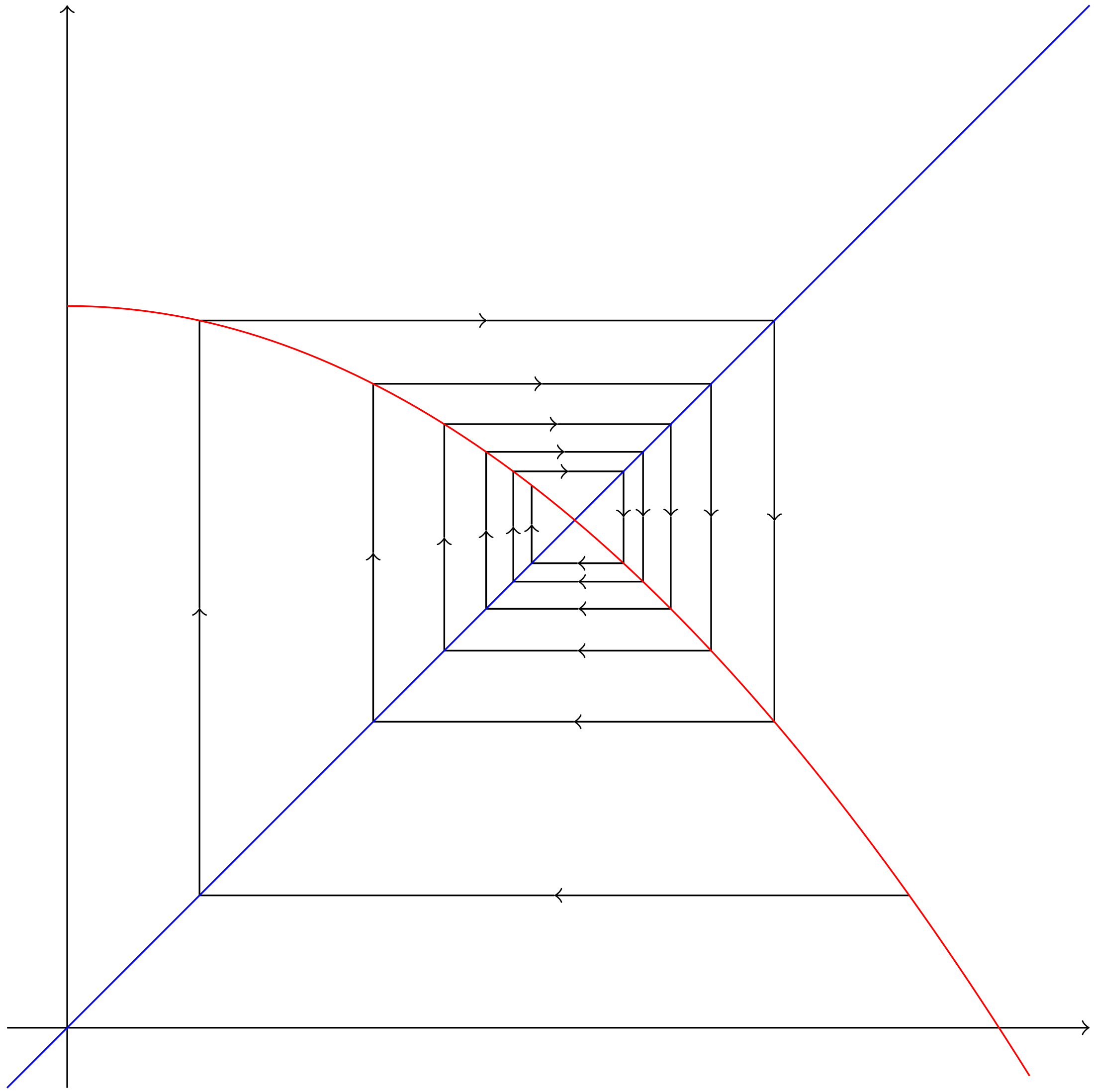
Fixpunkte durch Iteration I



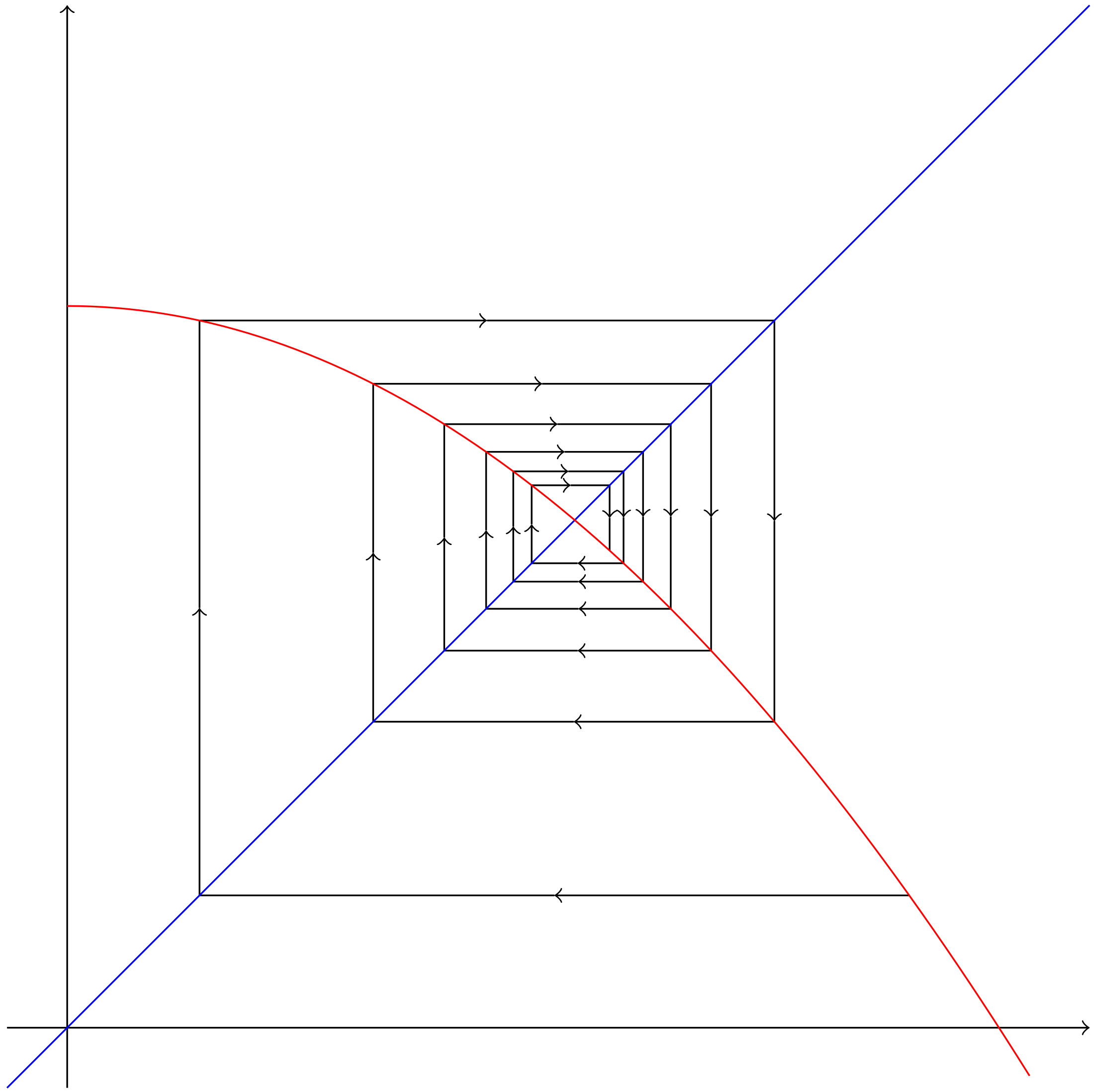
Fixpunkte durch Iteration I



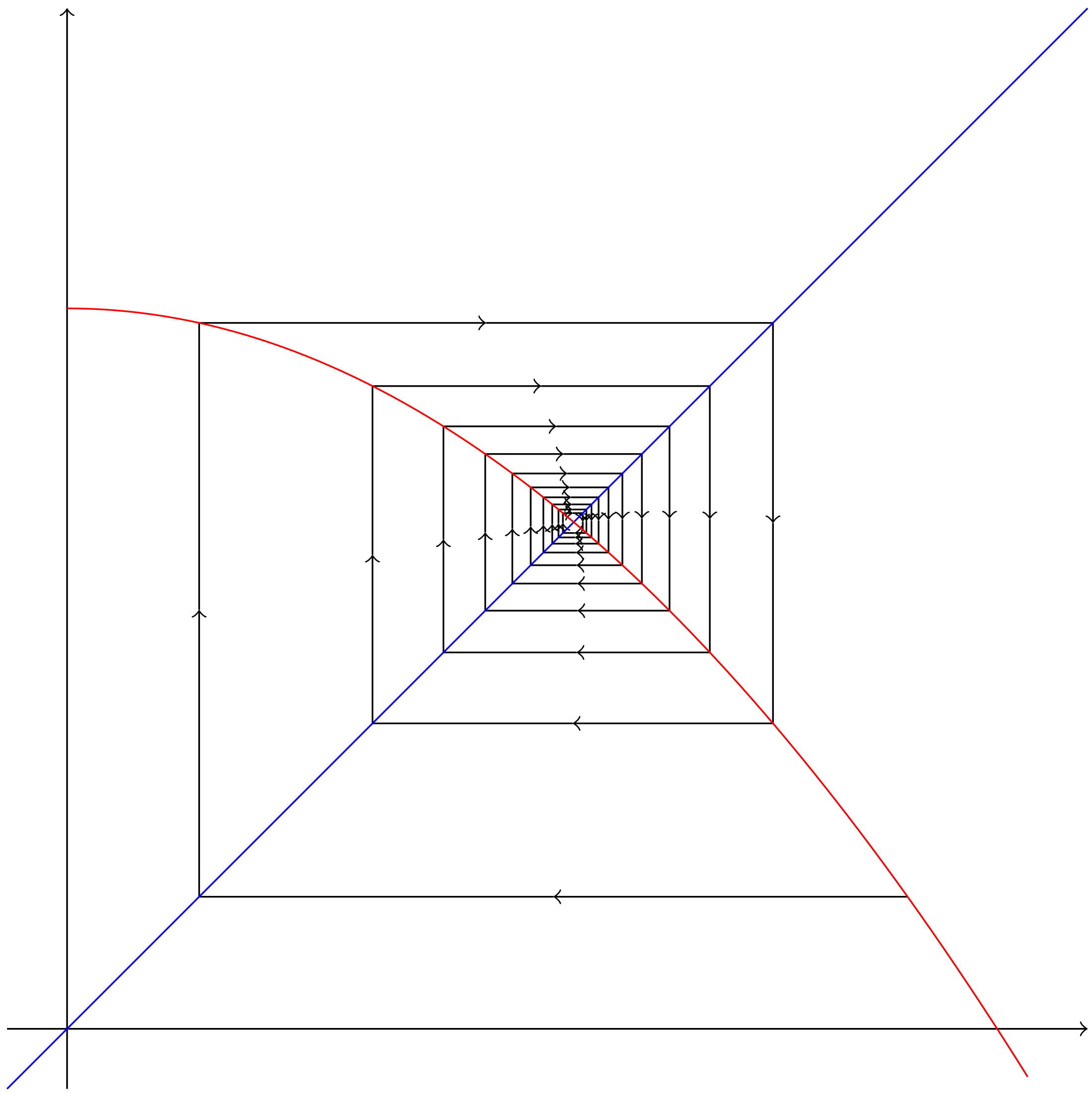
Fixpunkte durch Iteration I



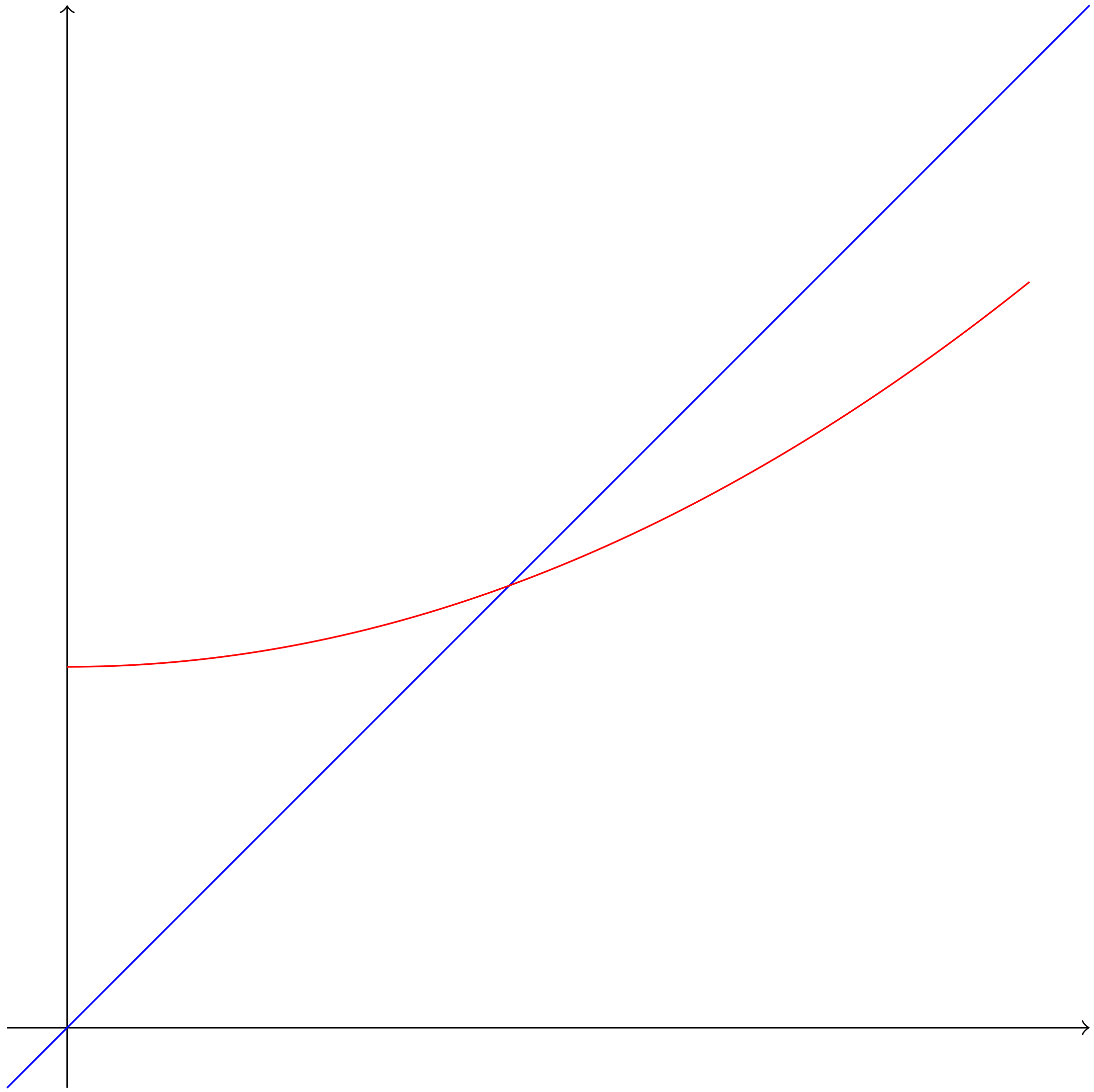
Fixpunkte durch Iteration I



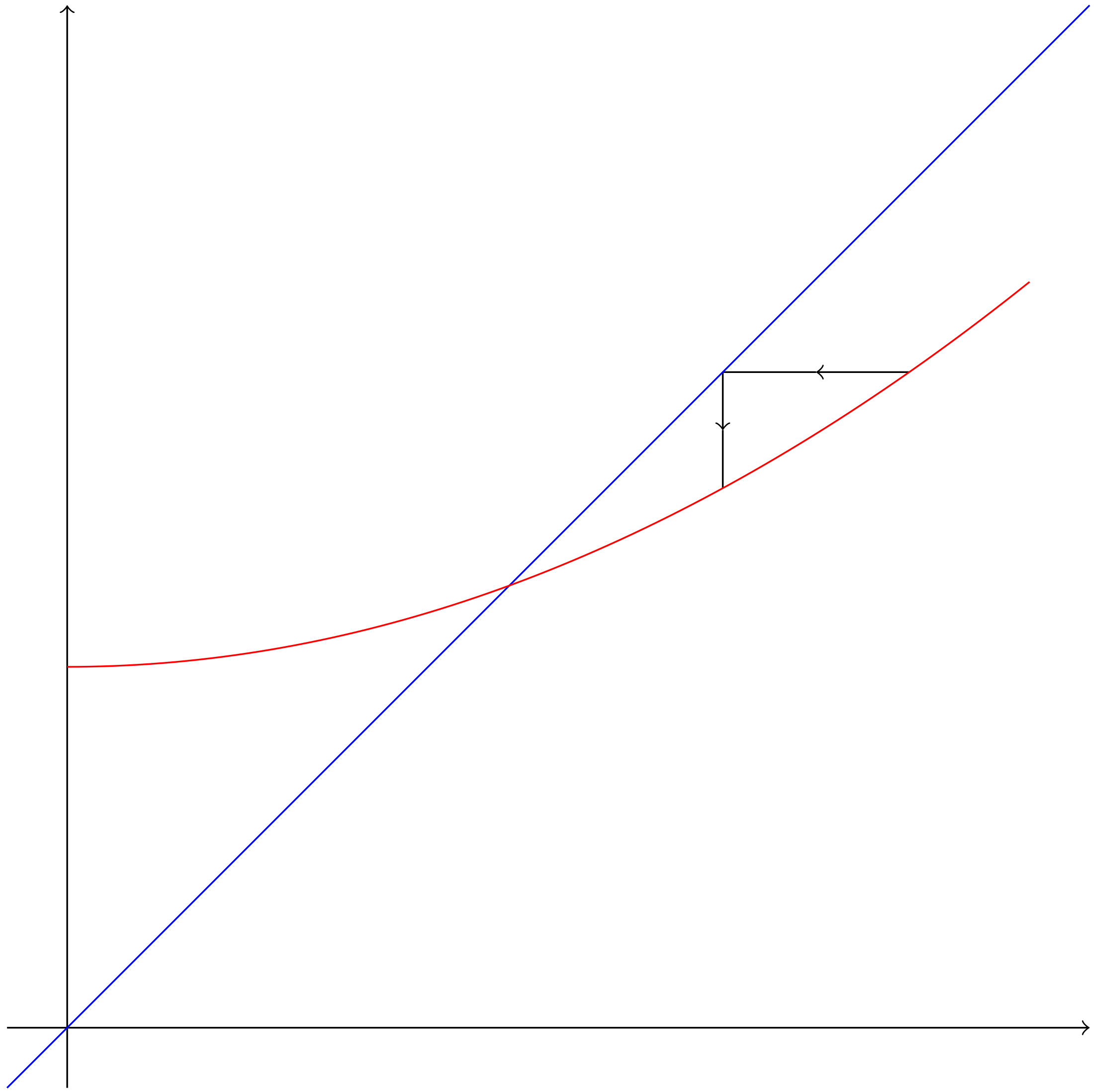
Fixpunkte durch Iteration I



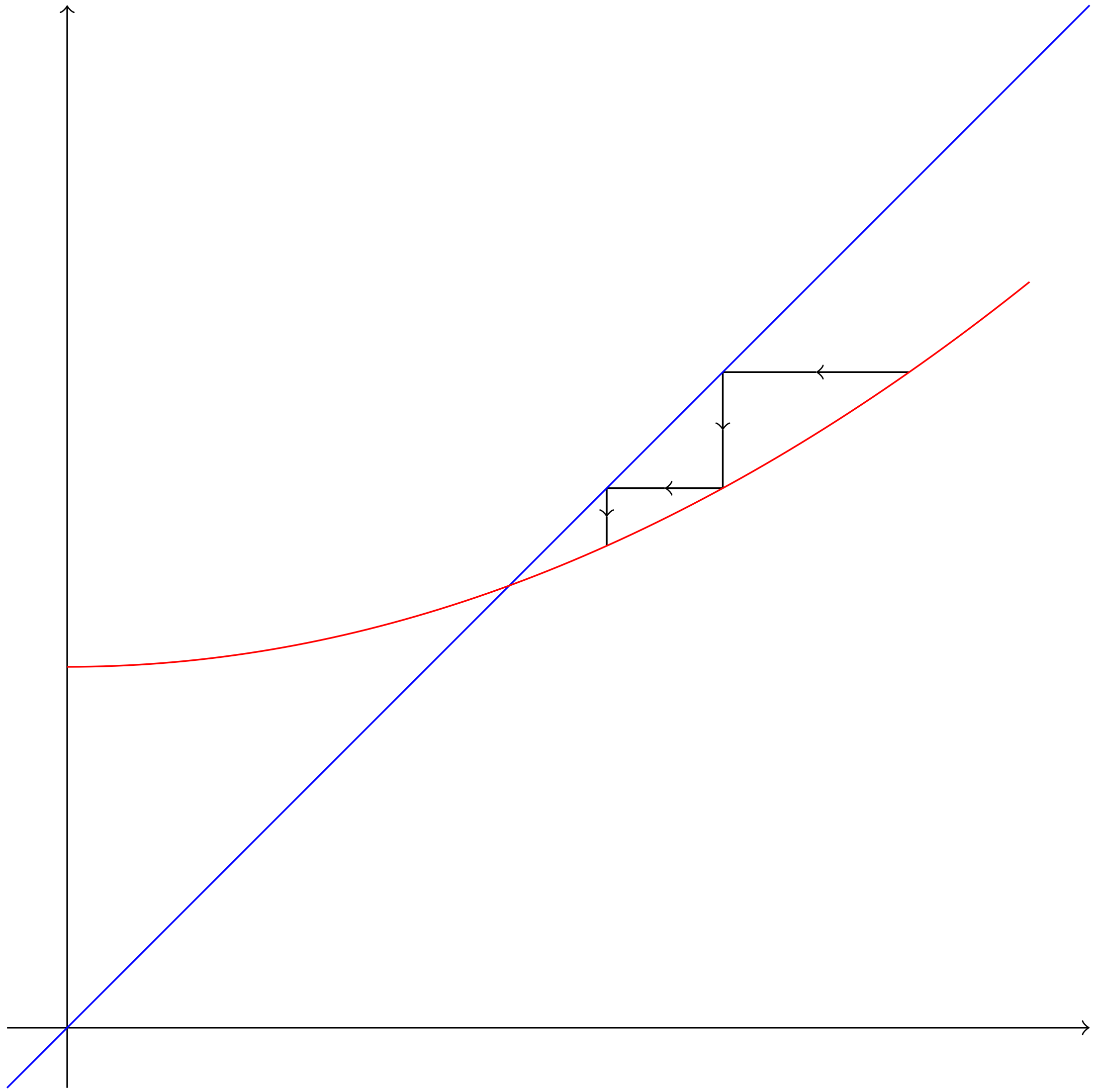
Fixpunkte durch Iteration II



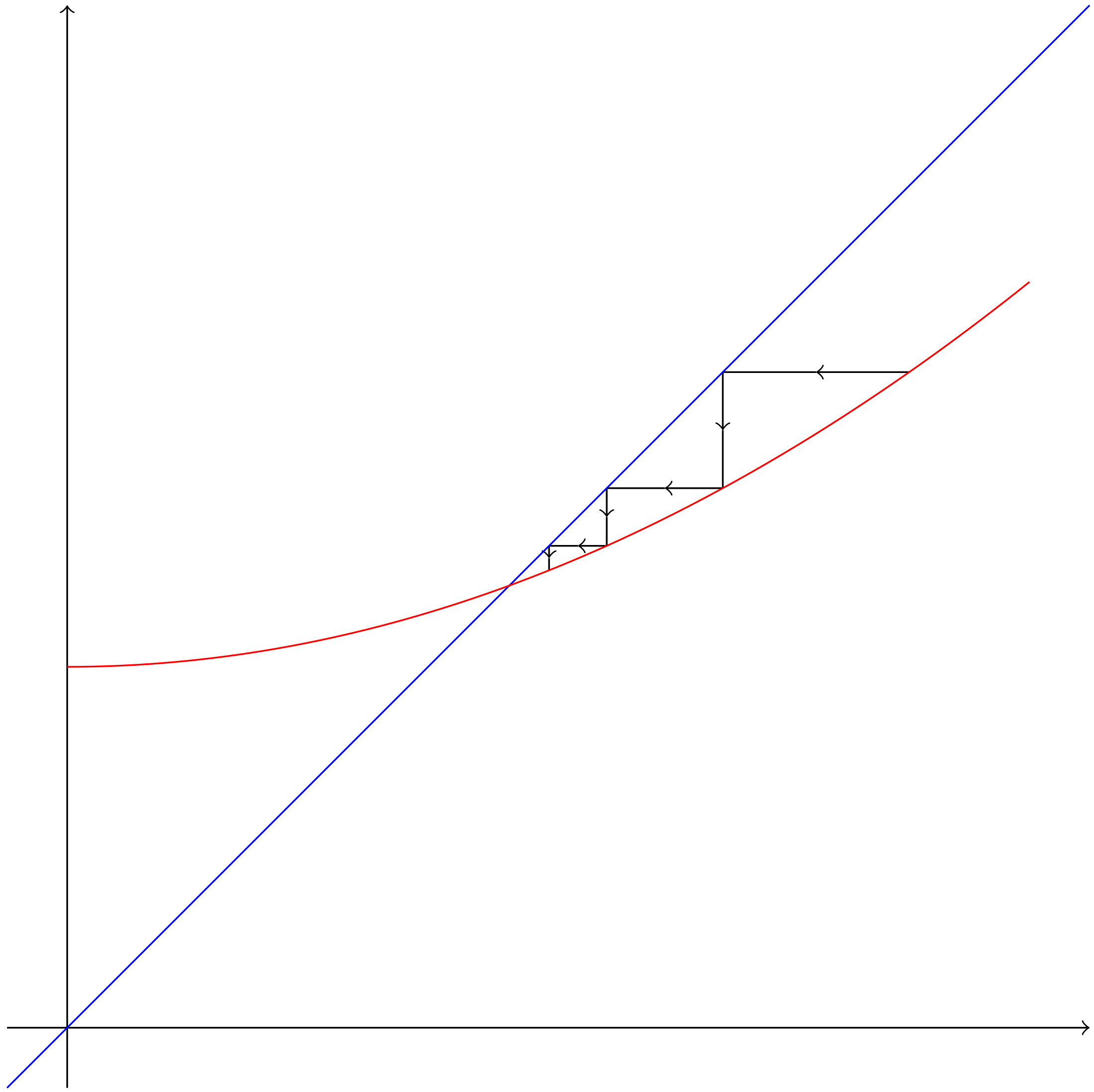
Fixpunkte durch Iteration II



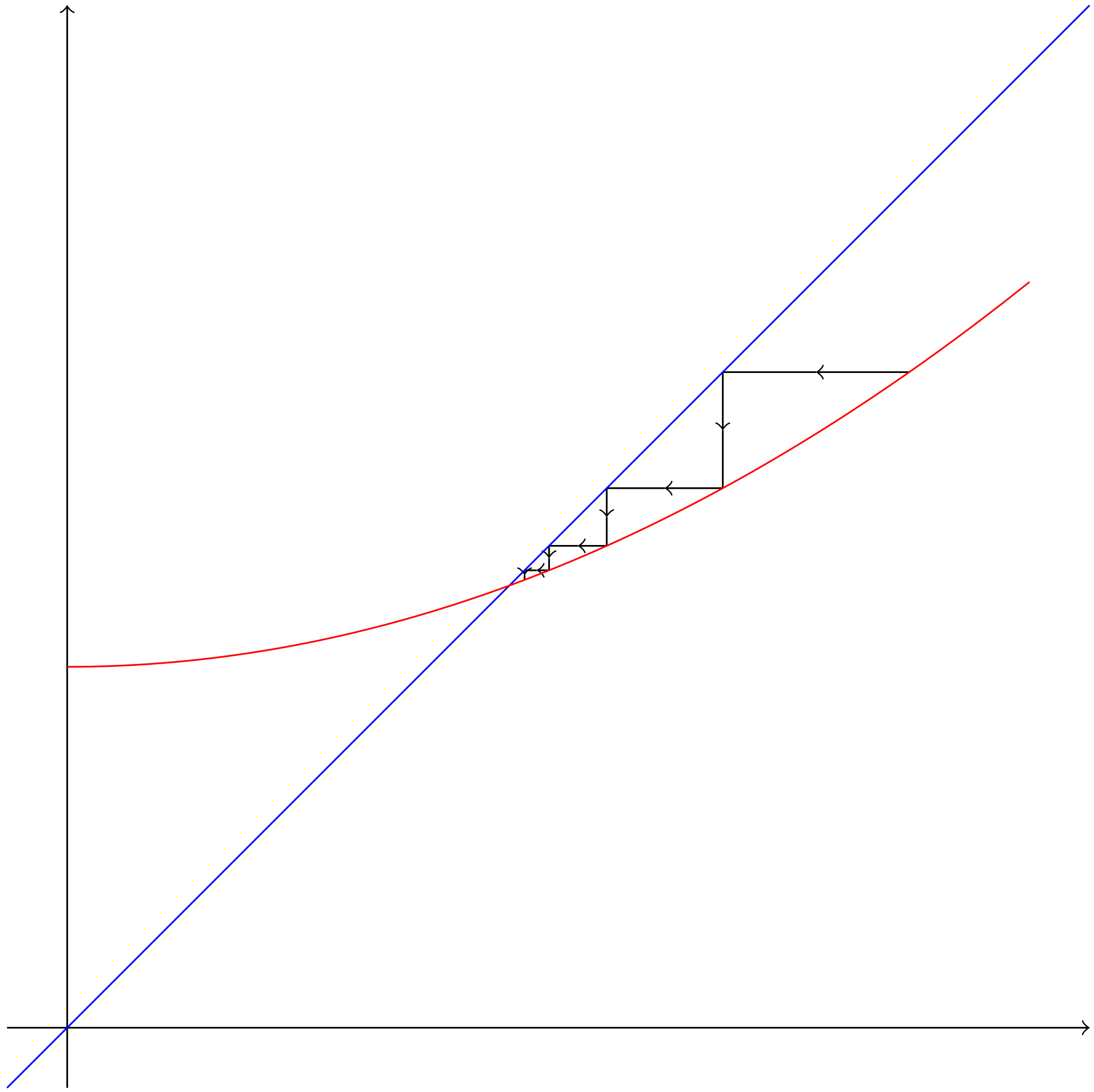
Fixpunkte durch Iteration II



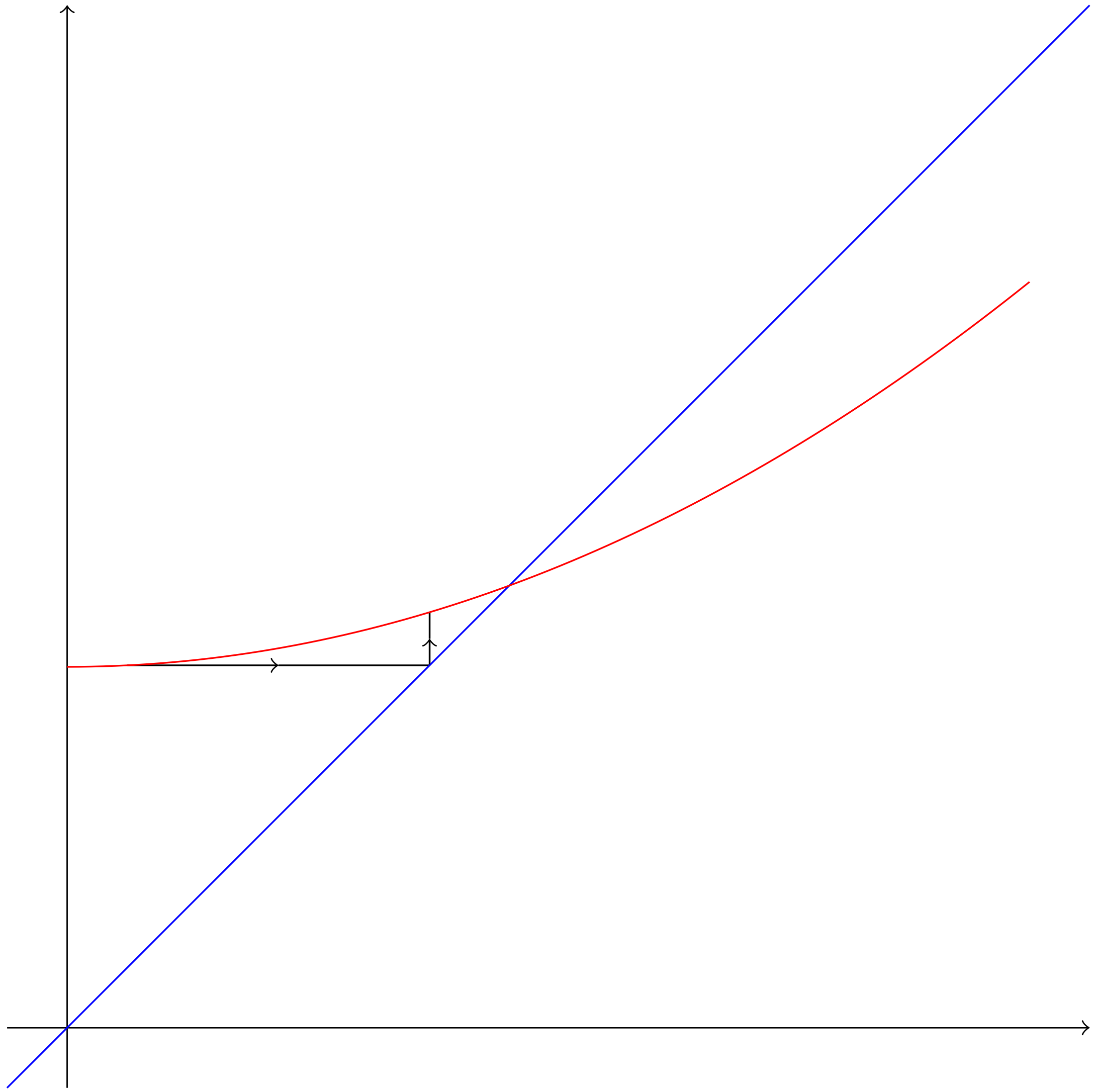
Fixpunkte durch Iteration II



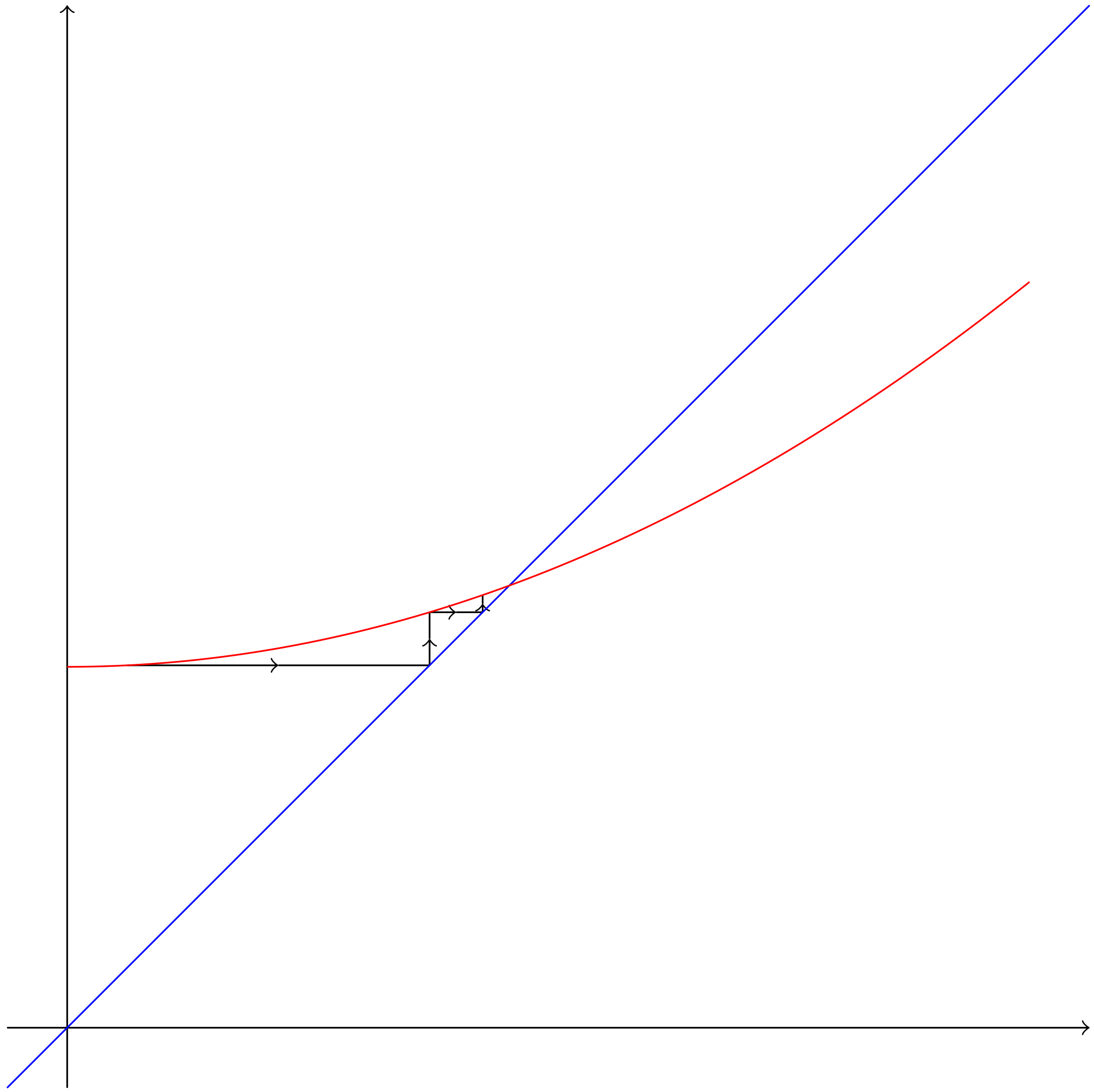
Fixpunkte durch Iteration II



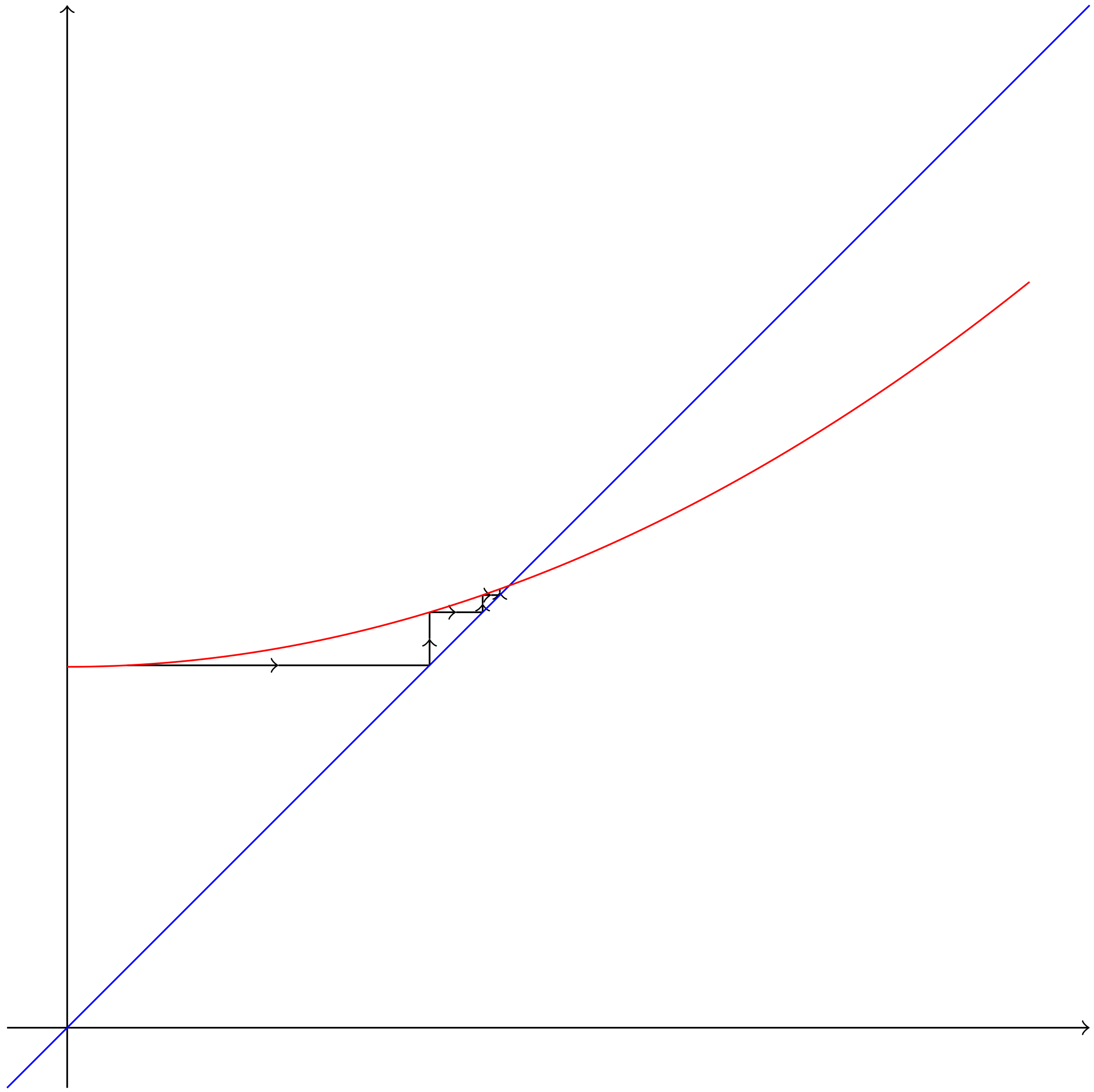
Fixpunkte durch Iteration II



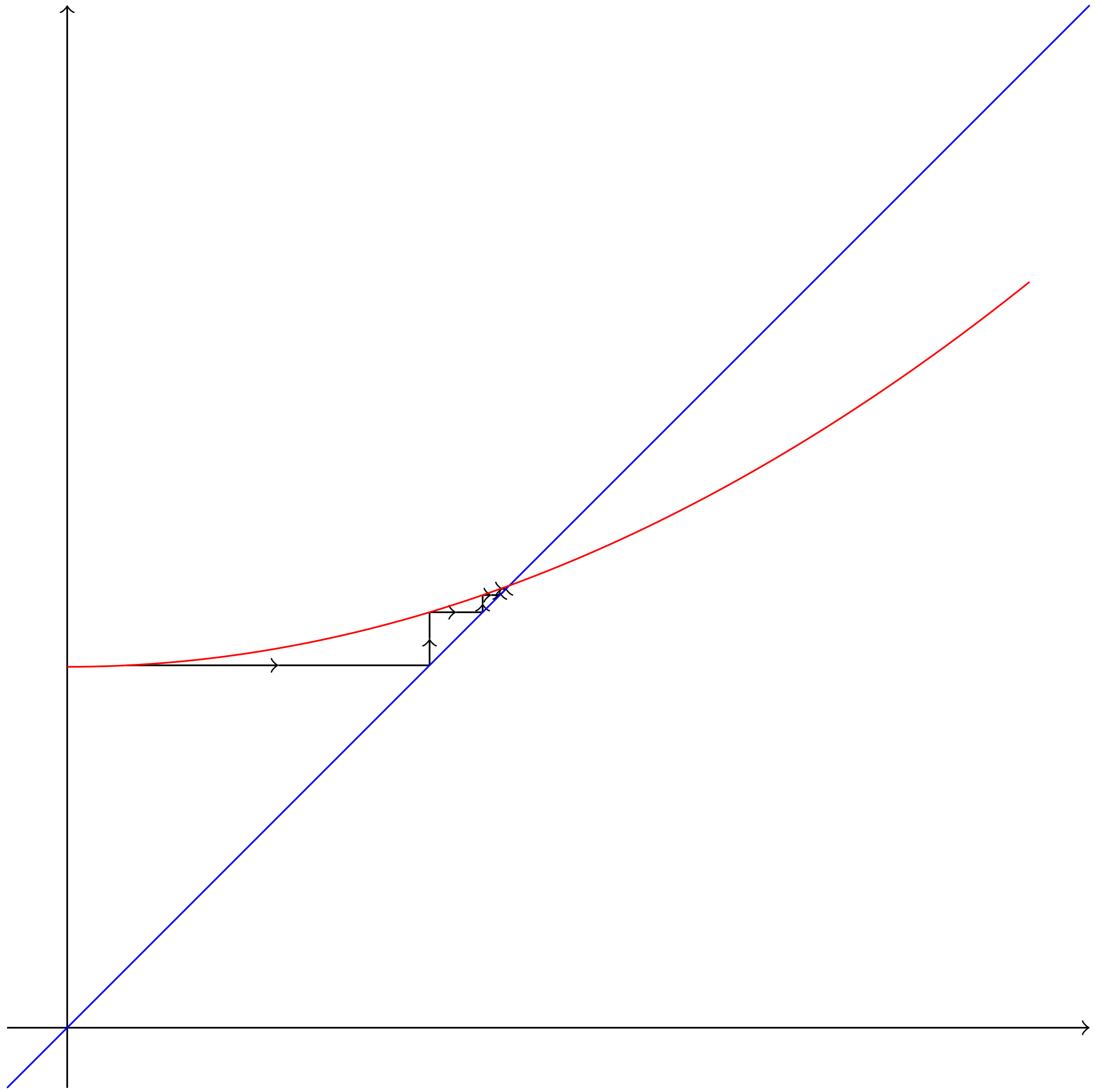
Fixpunkte durch Iteration II



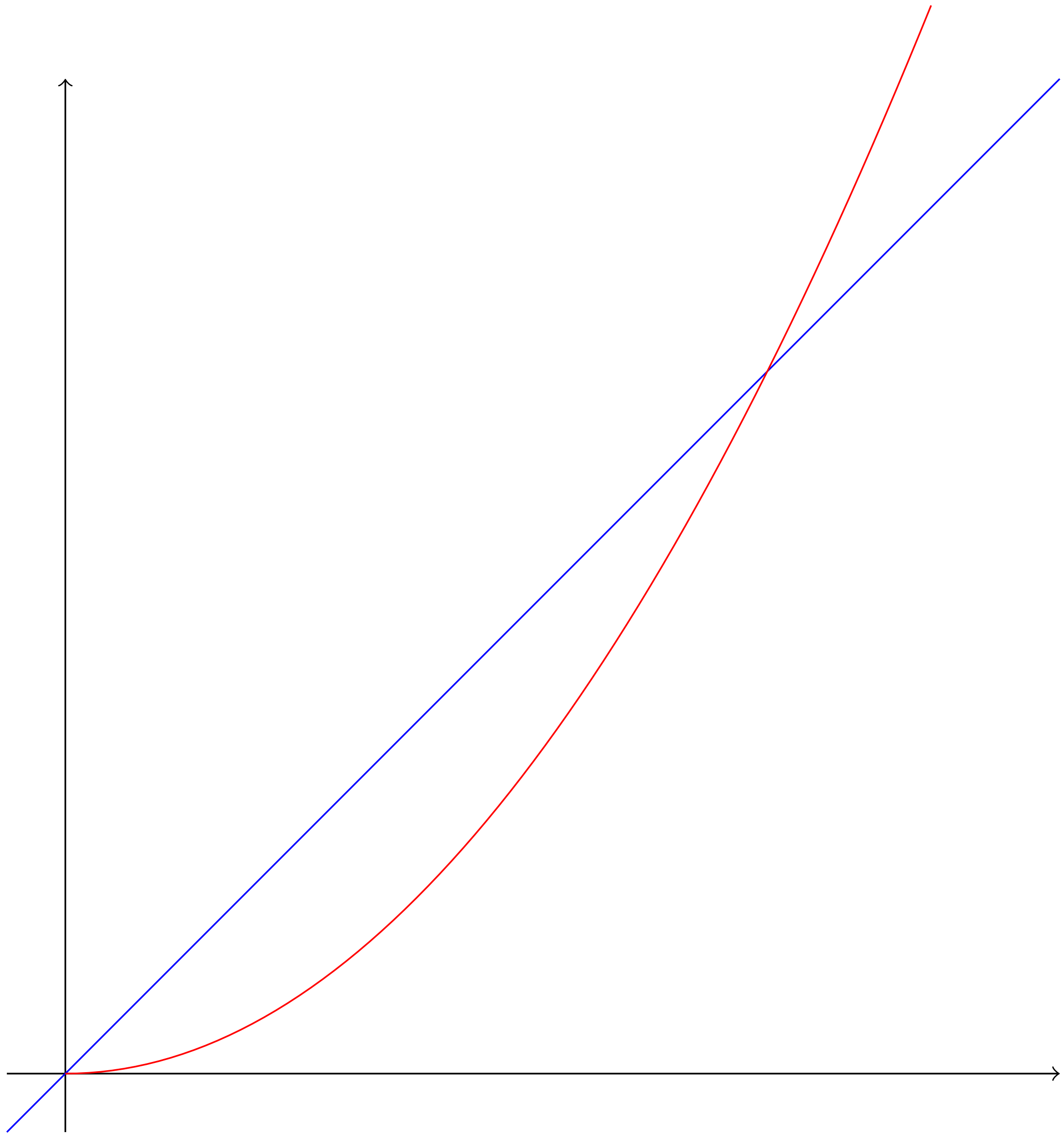
Fixpunkte durch Iteration II



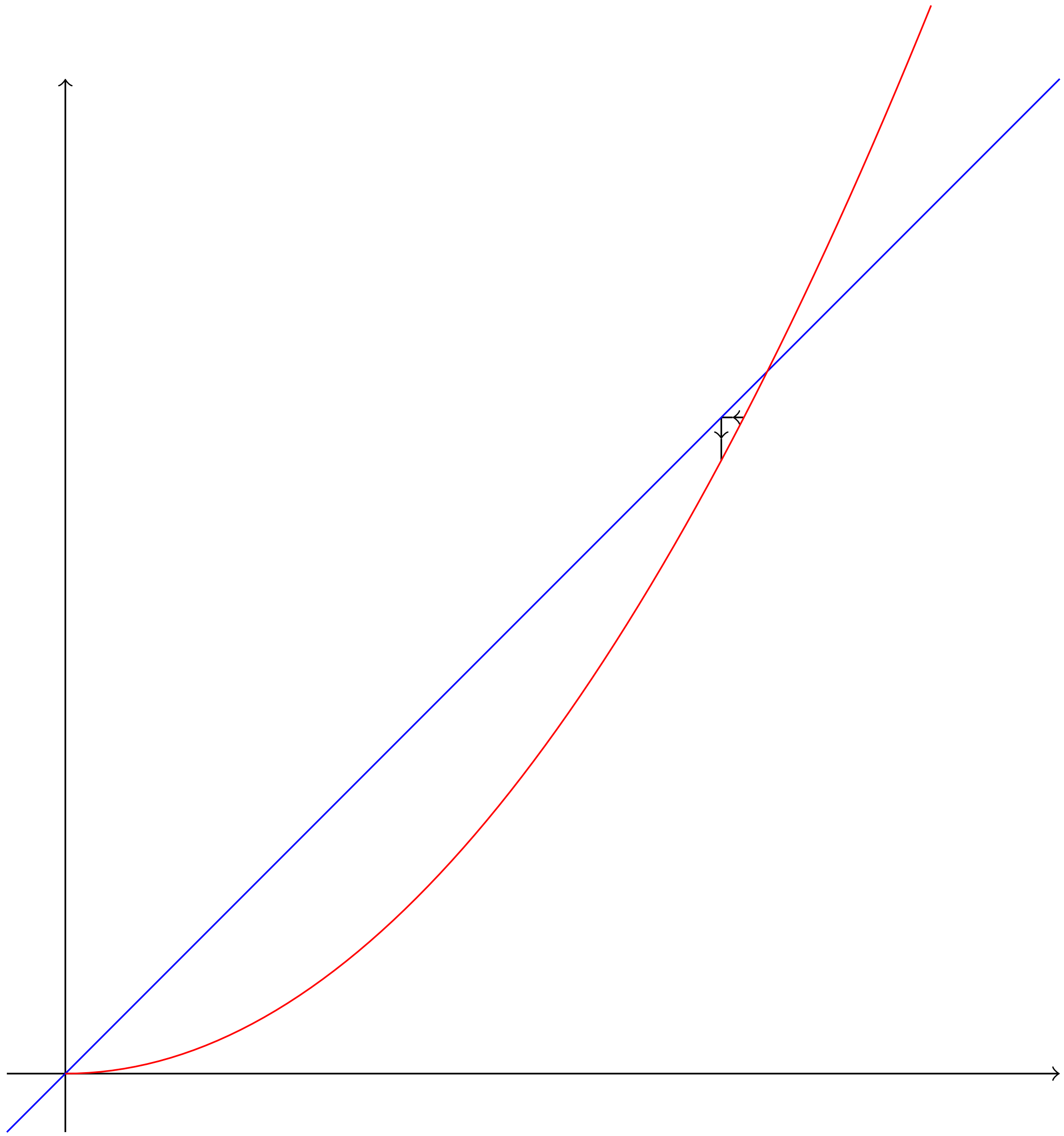
Fixpunkte durch Iteration II



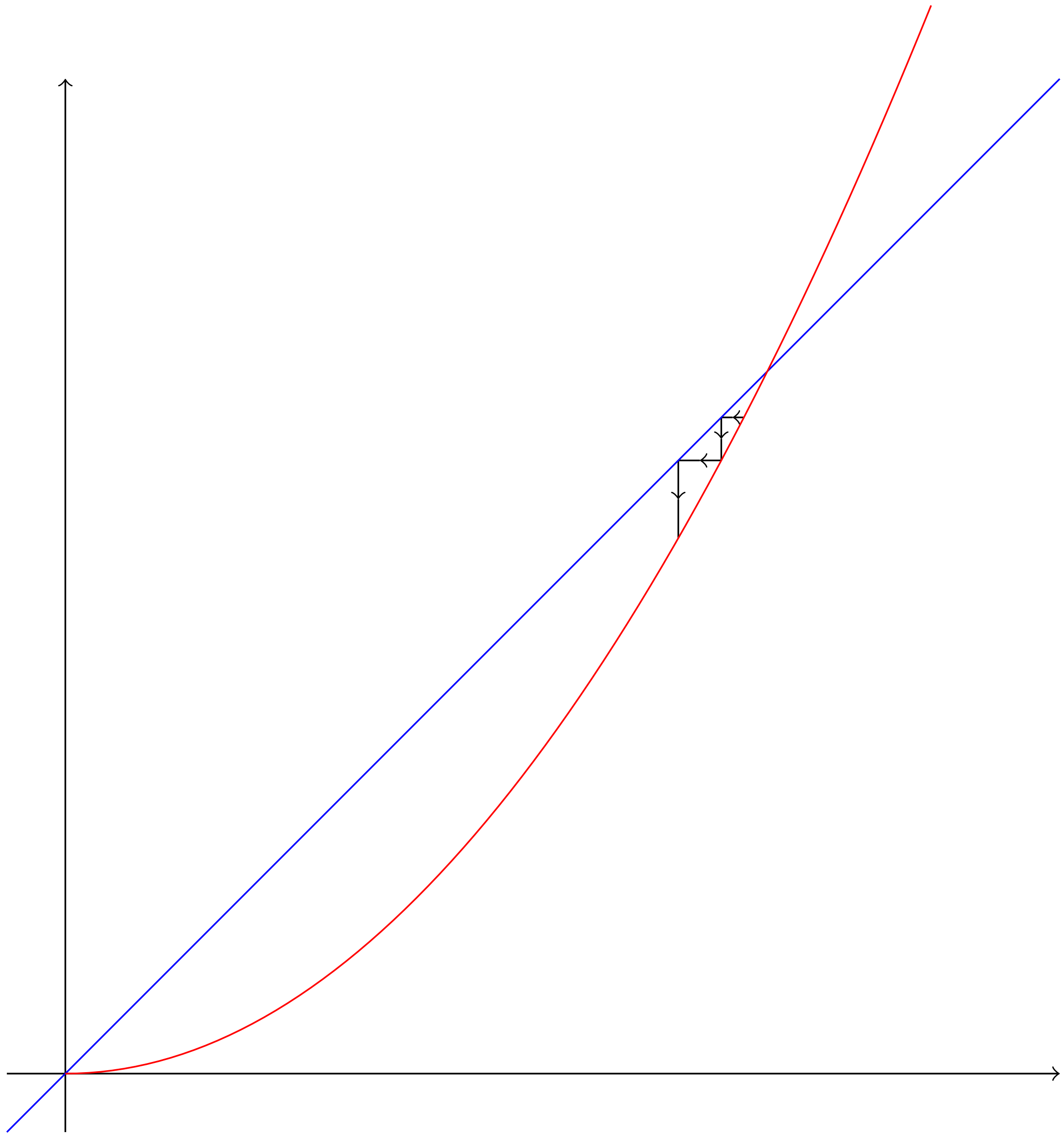
Fixpunkte durch Iteration III



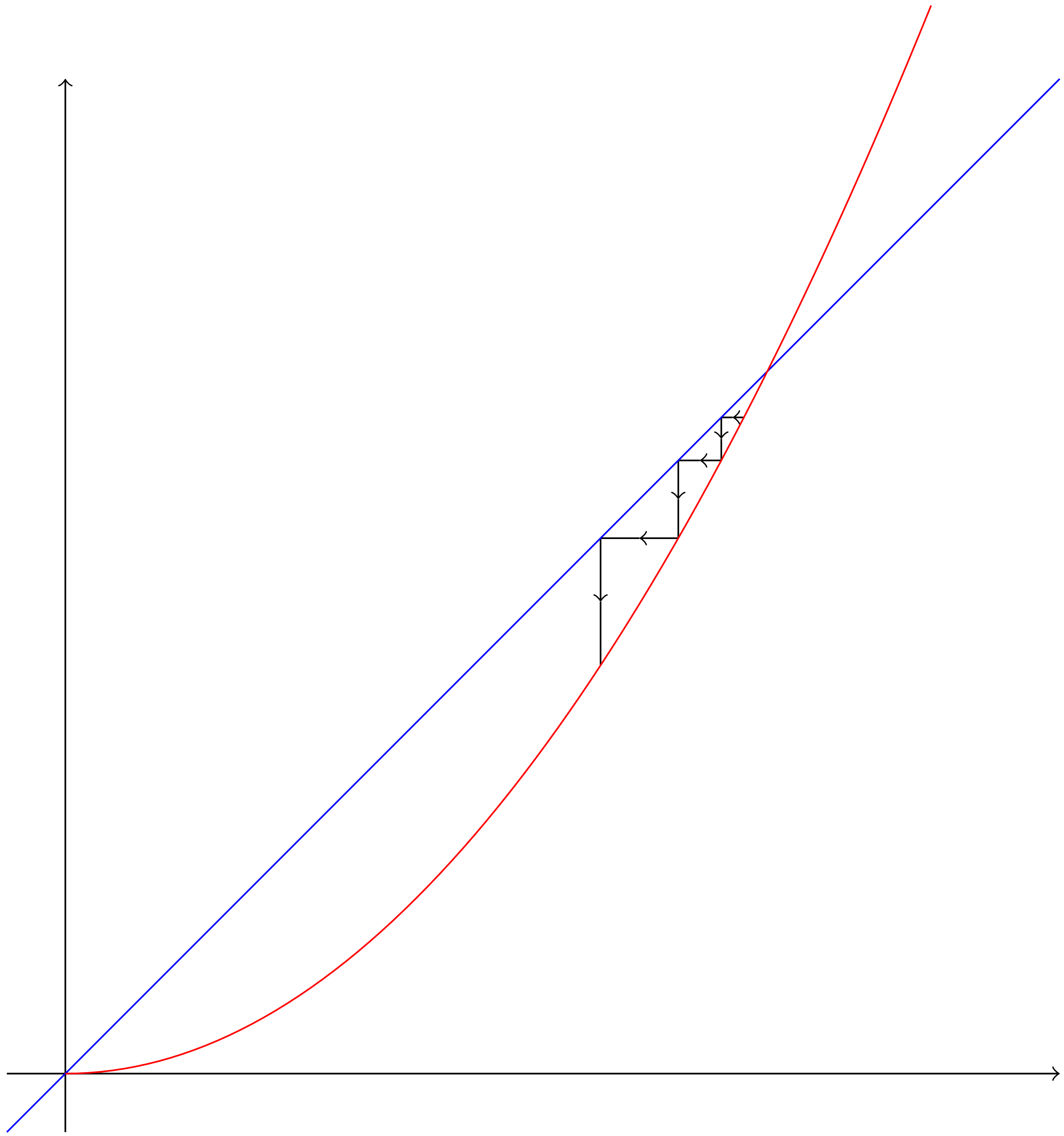
Fixpunkte durch Iteration III



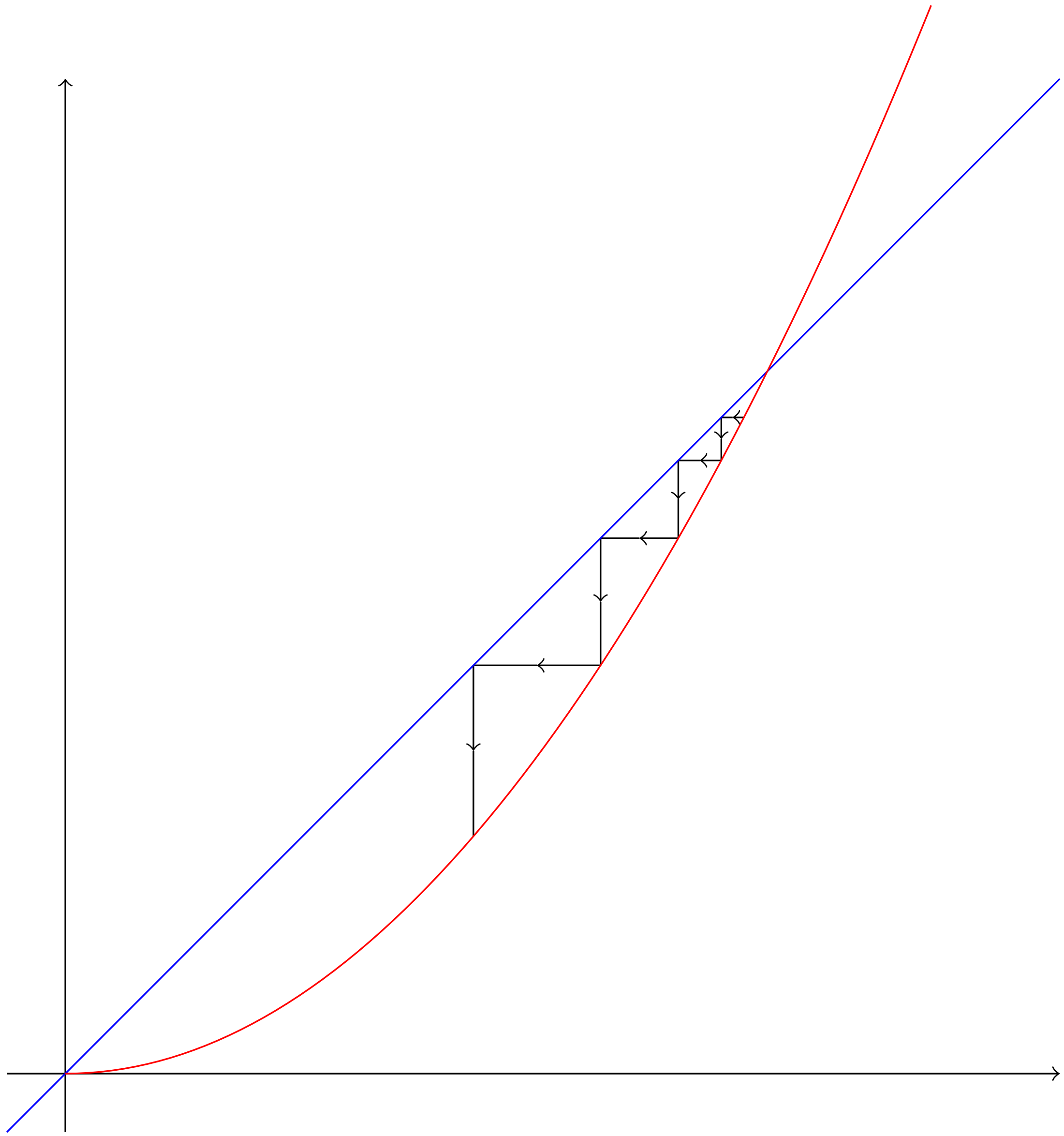
Fixpunkte durch Iteration III



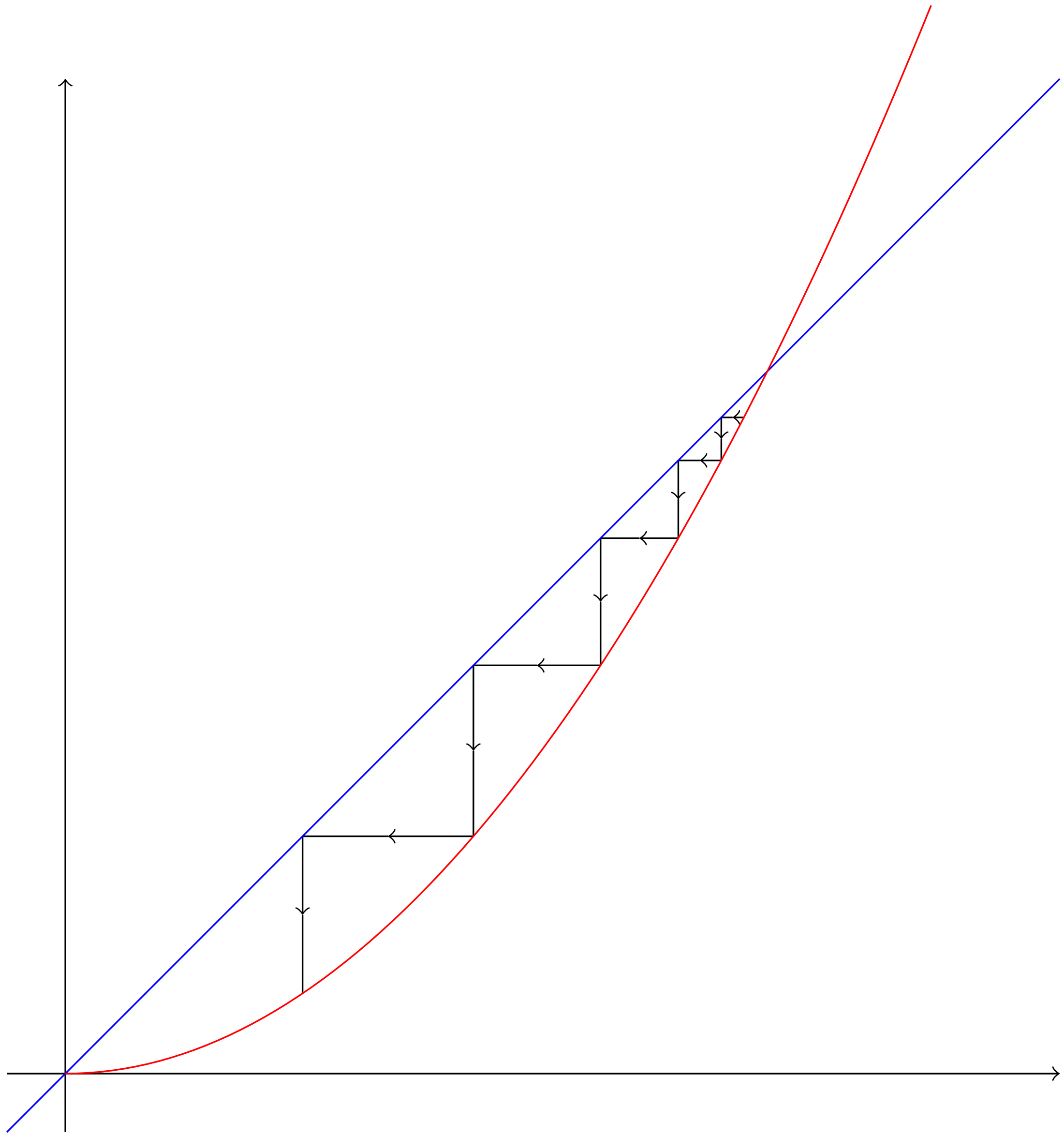
Fixpunkte durch Iteration III



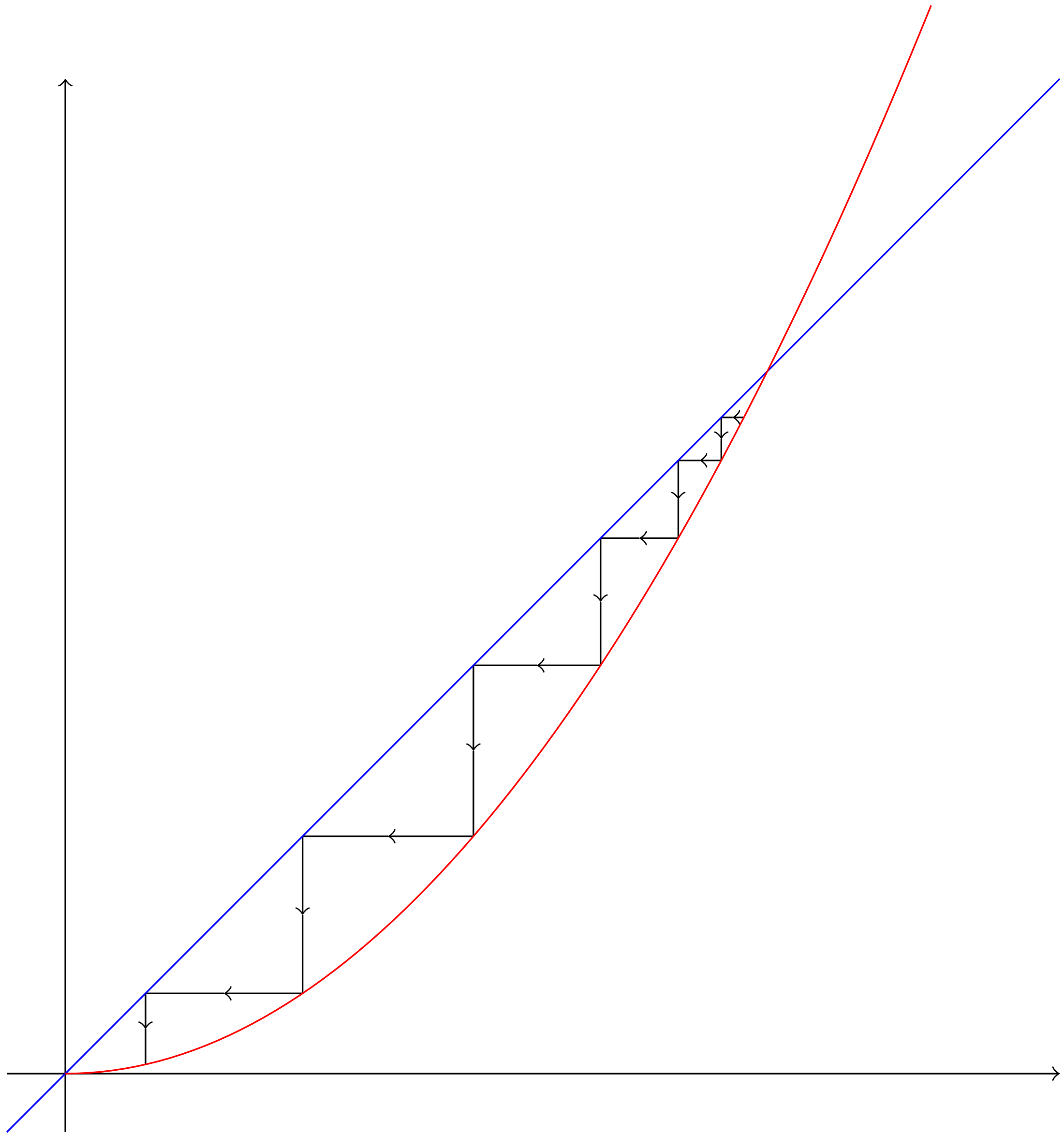
Fixpunkte durch Iteration III



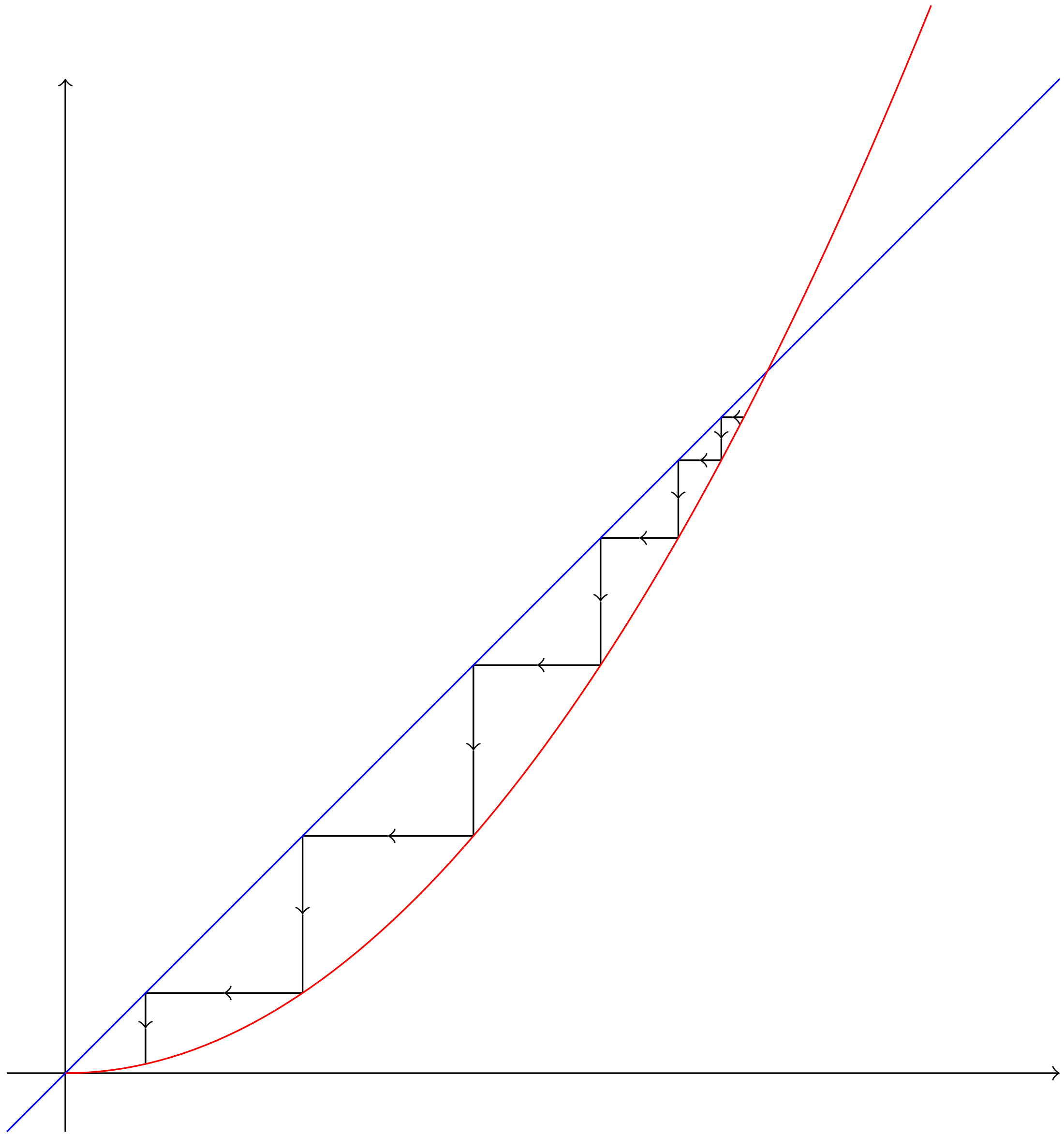
Fixpunkte durch Iteration III



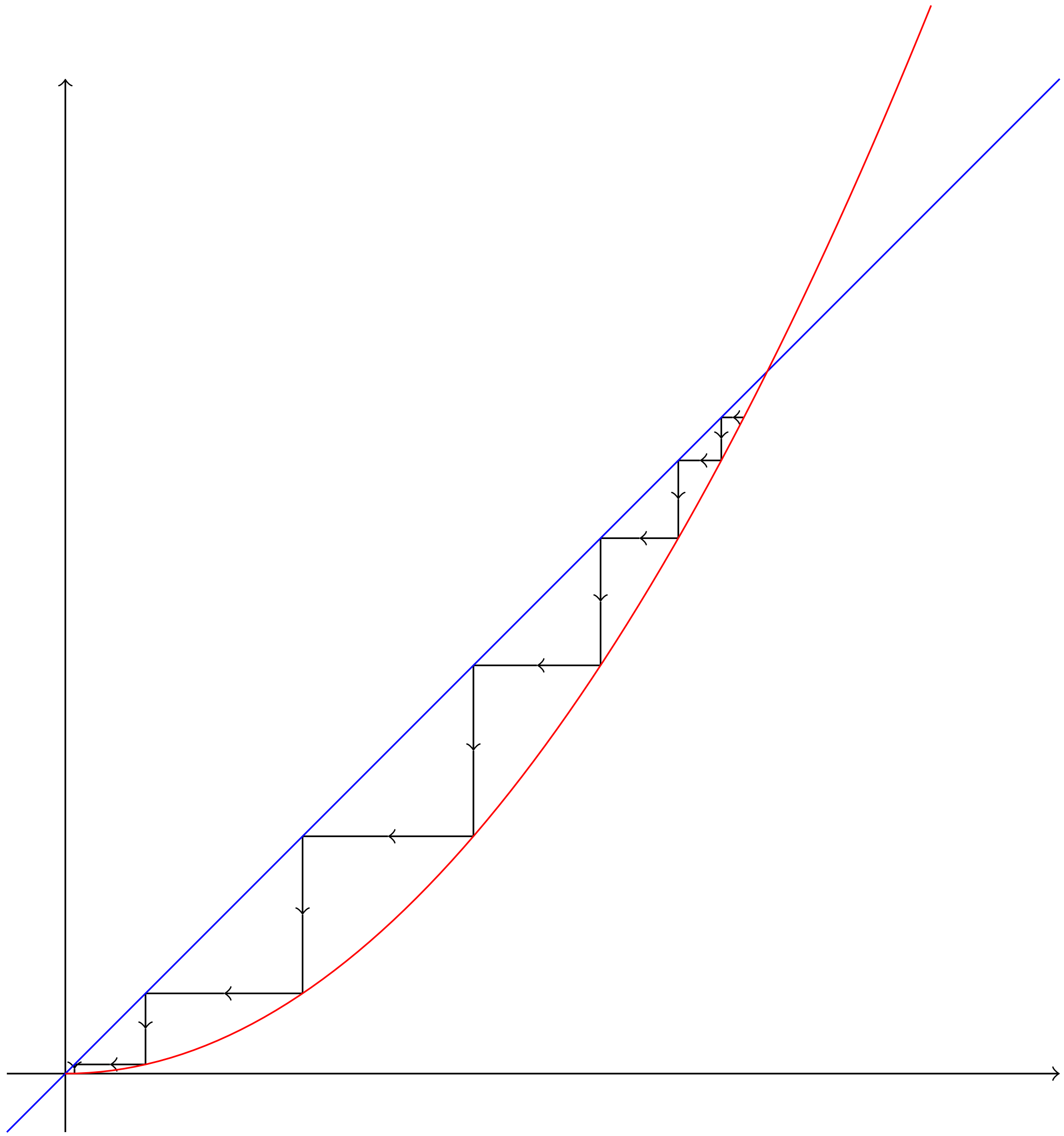
Fixpunkte durch Iteration III



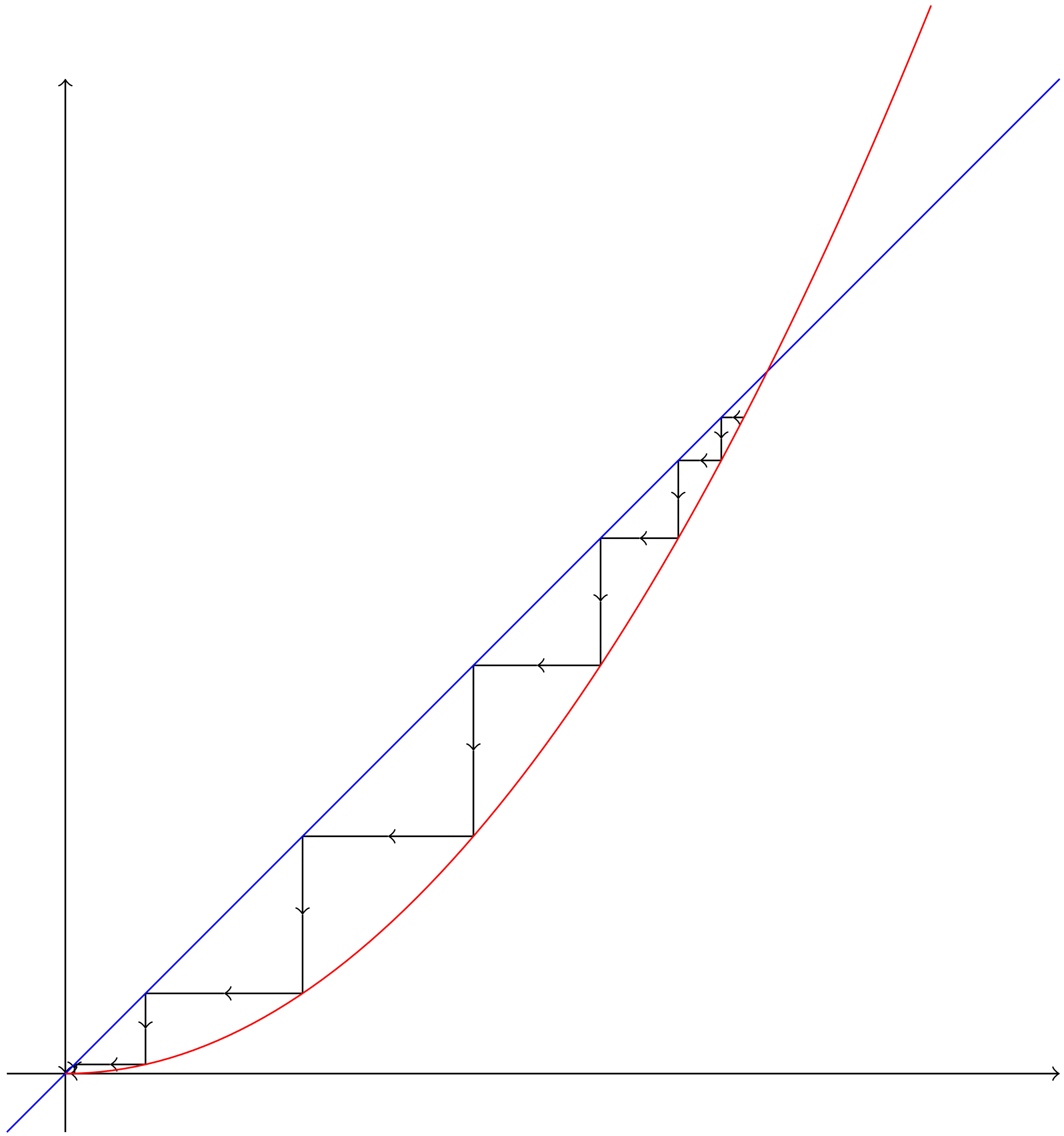
Fixpunkte durch Iteration III



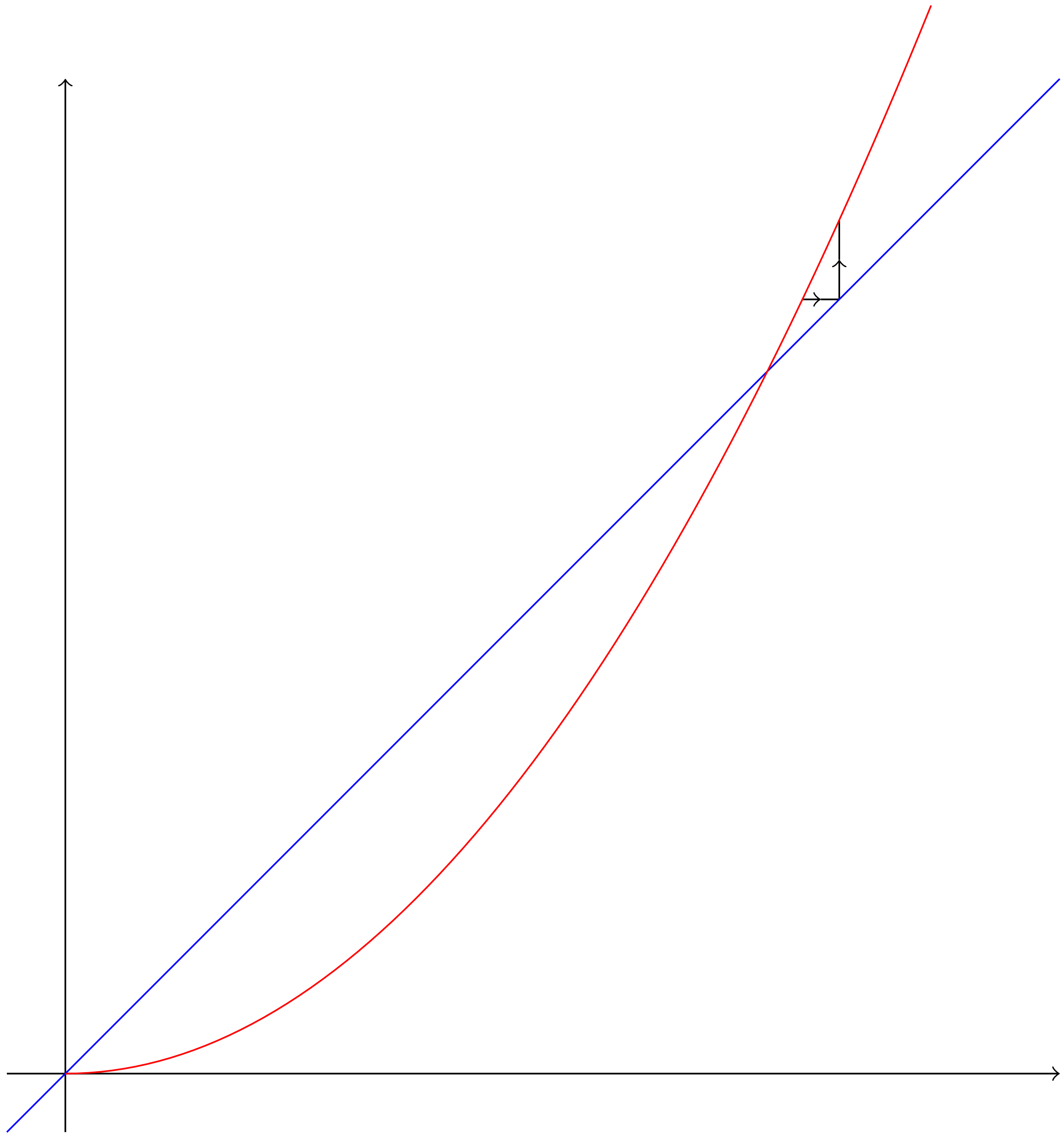
Fixpunkte durch Iteration III



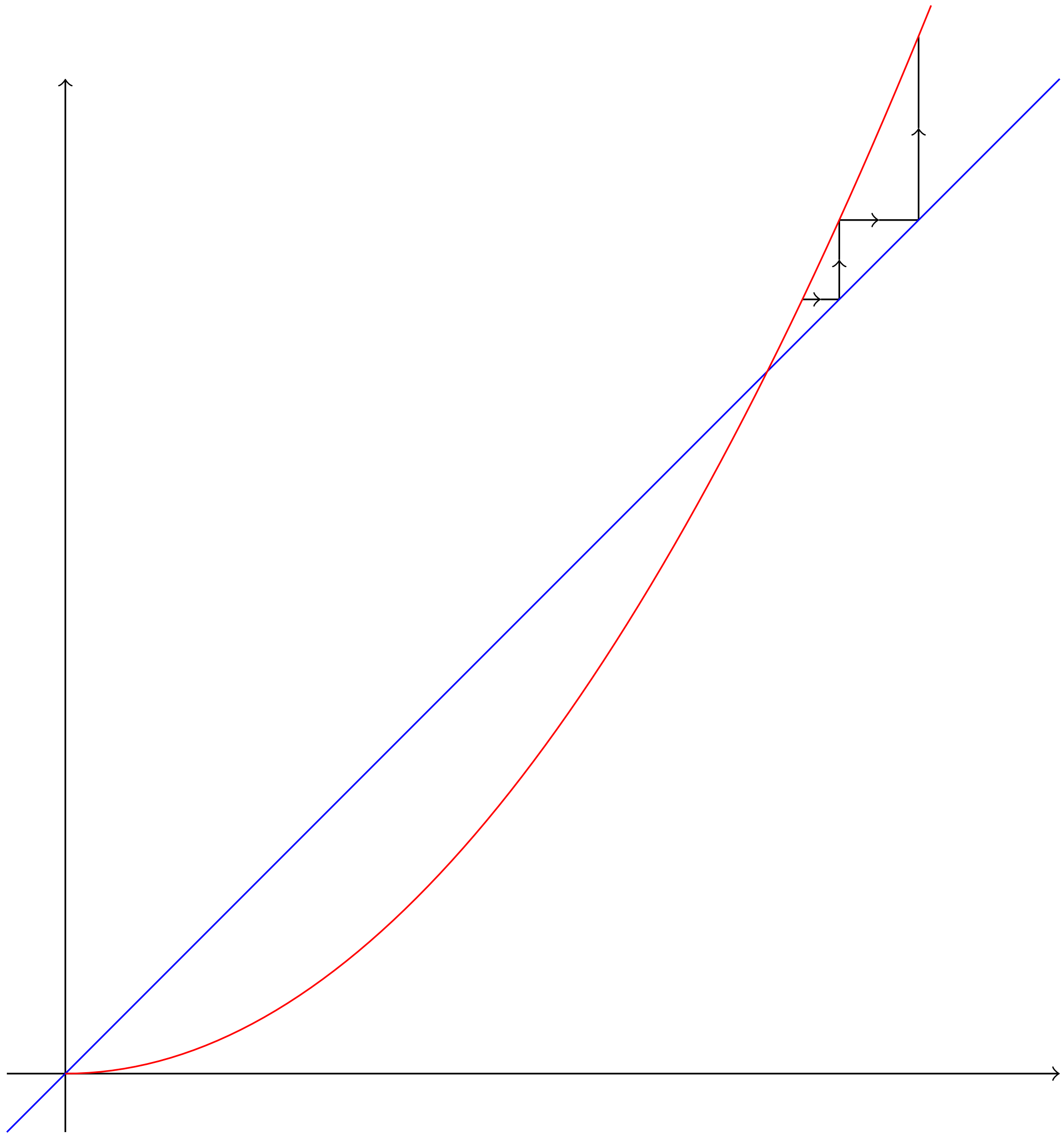
Fixpunkte durch Iteration III



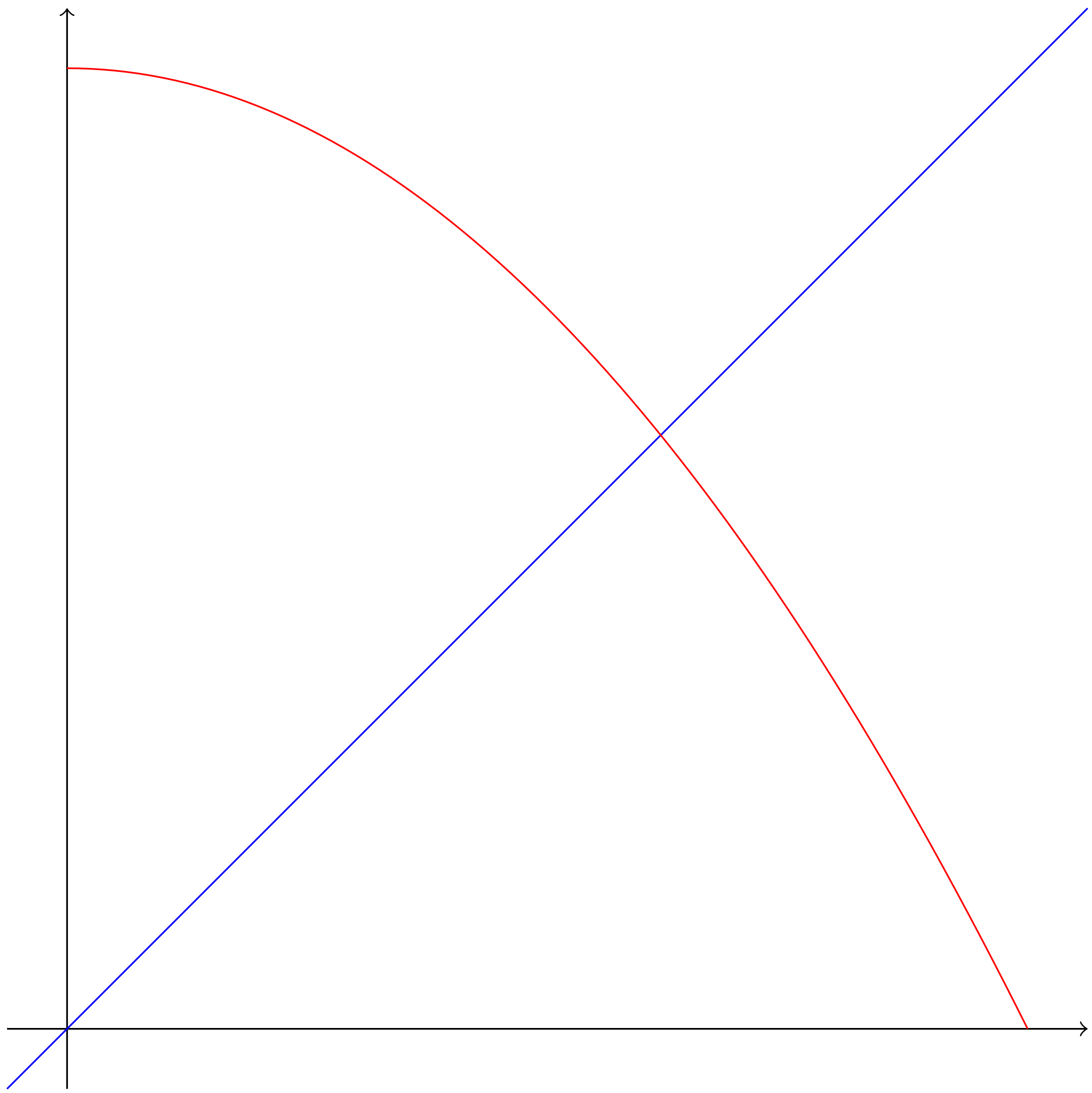
Fixpunkte durch Iteration III



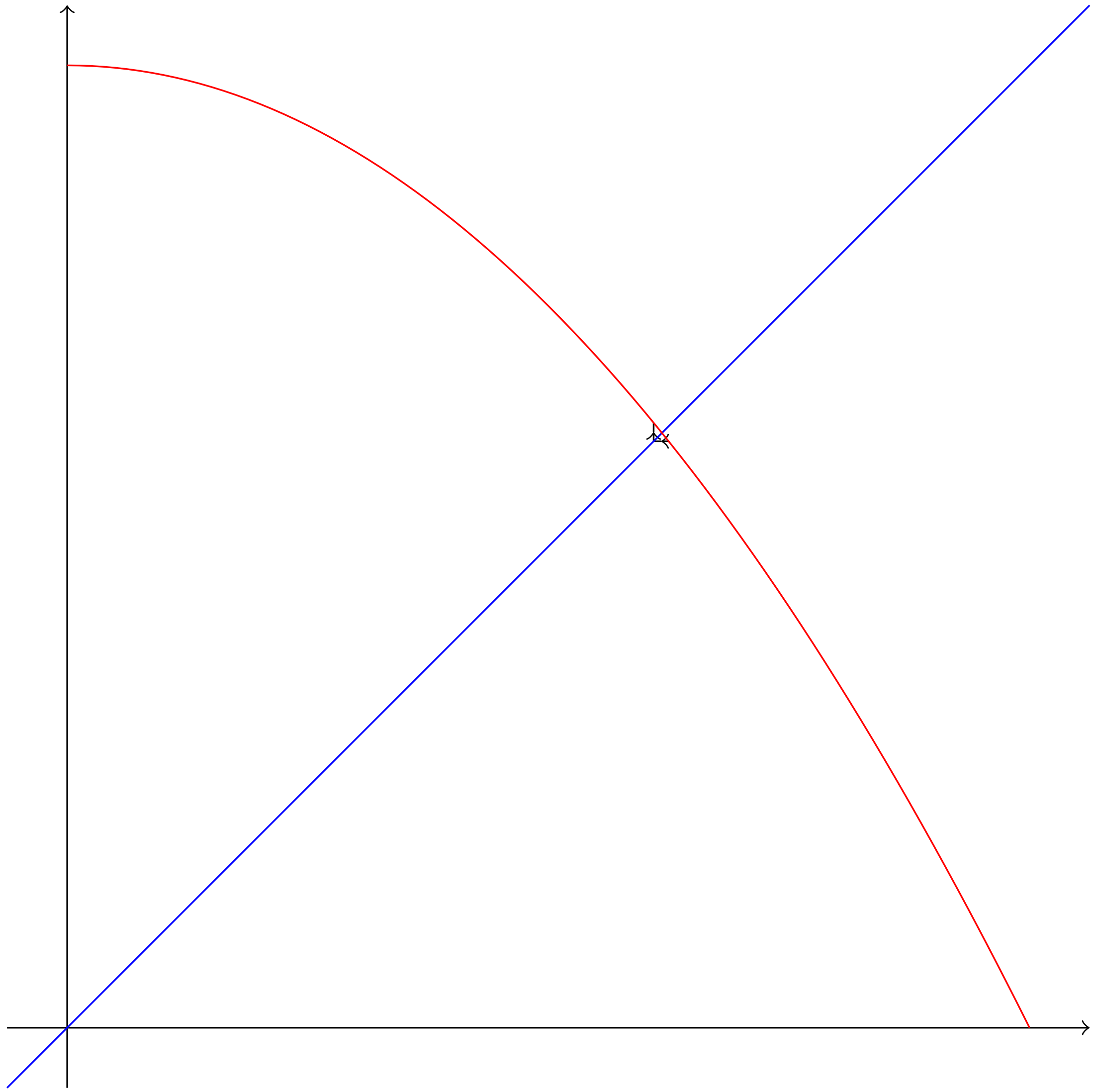
Fixpunkte durch Iteration III



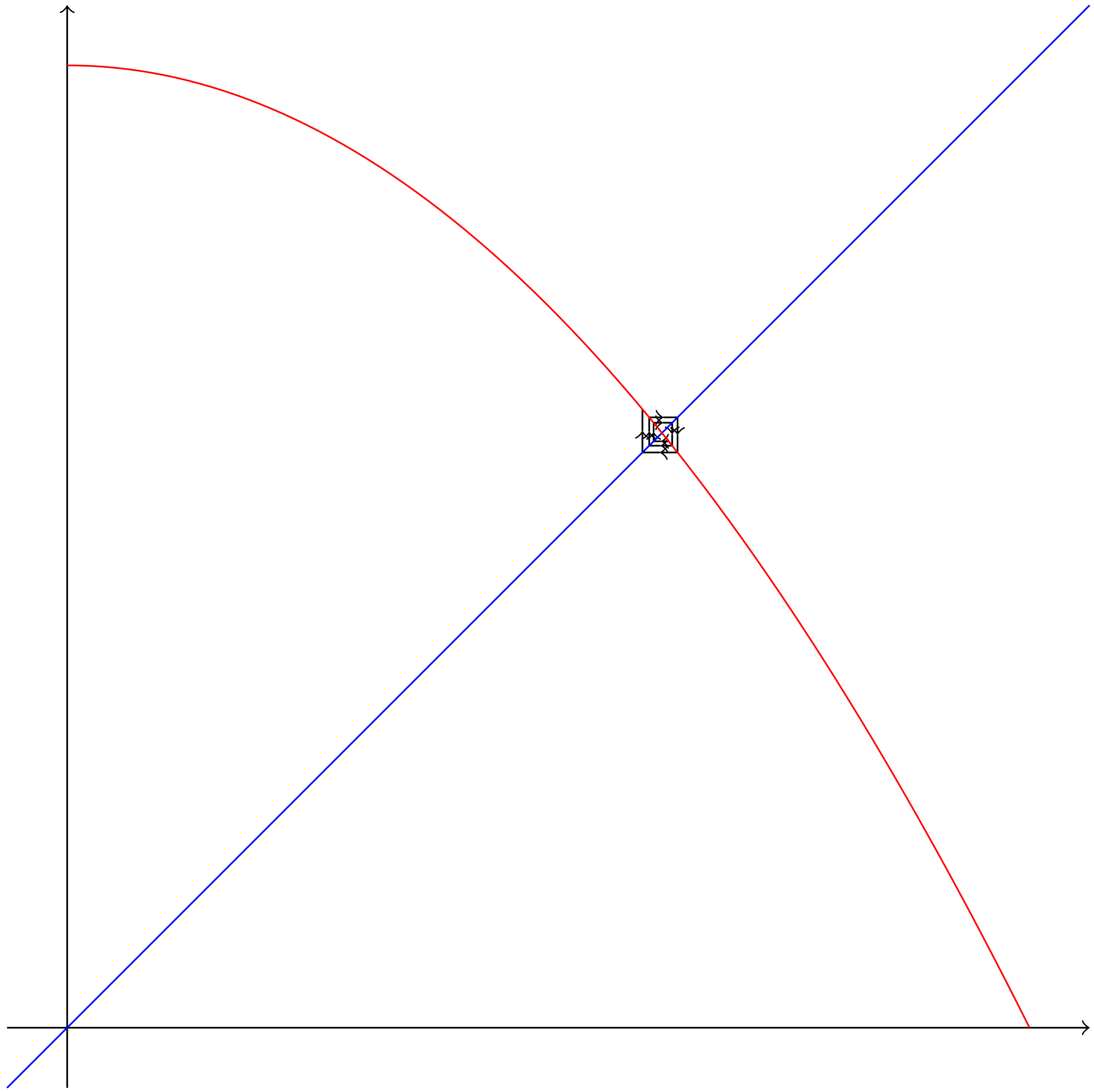
Fixpunkte durch Iteration IV



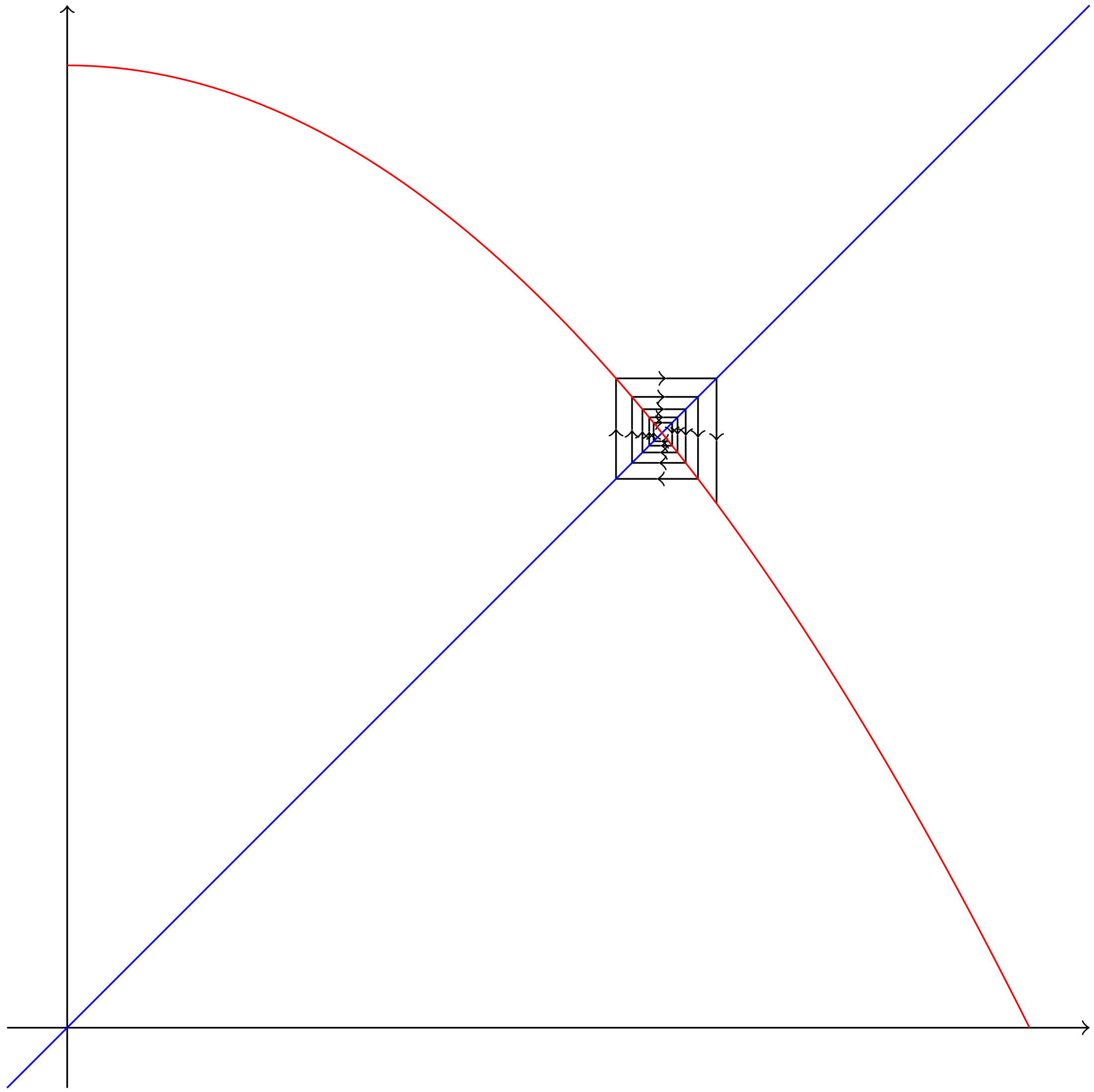
Fixpunkte durch Iteration IV



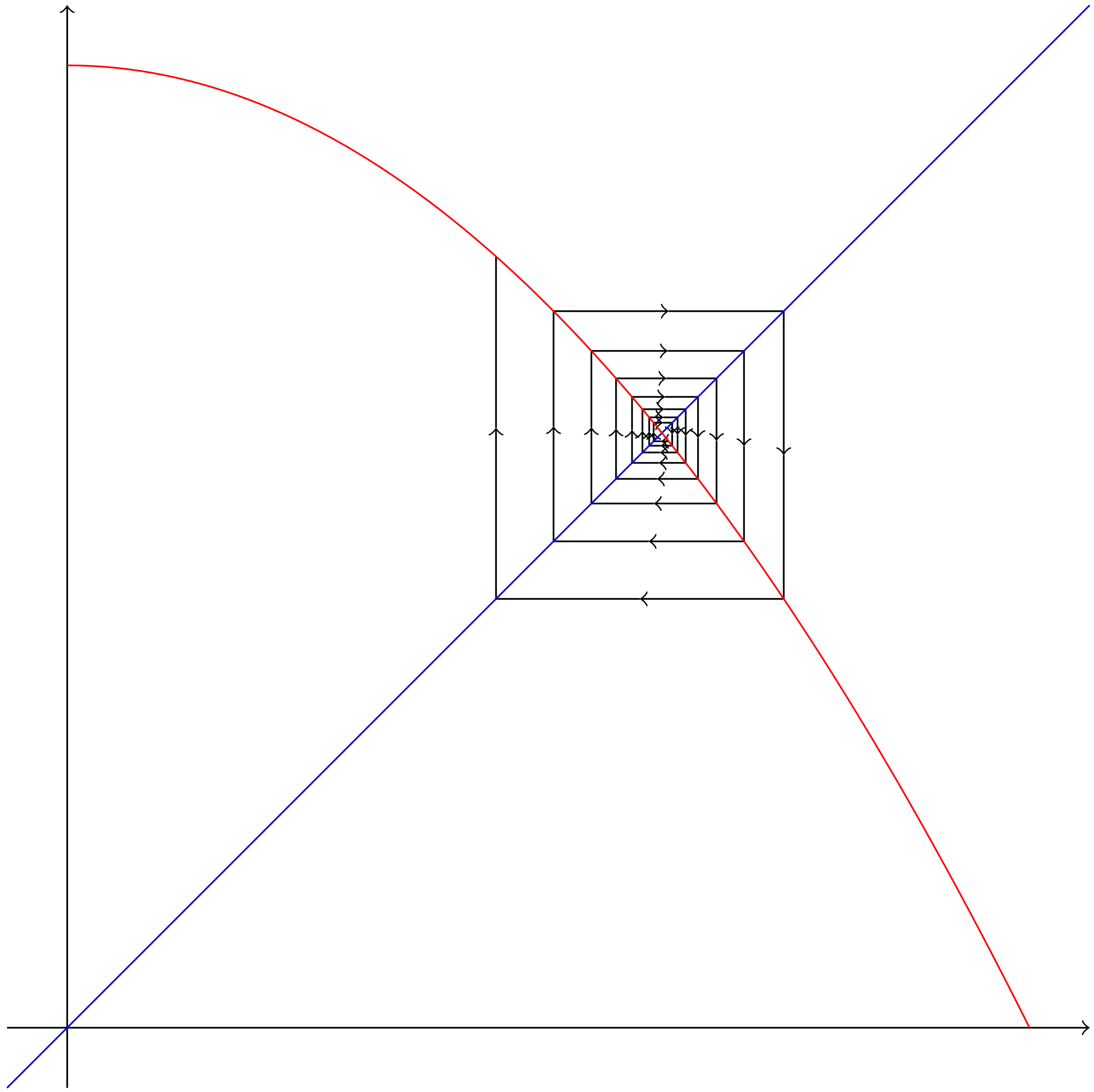
Fixpunkte durch Iteration IV



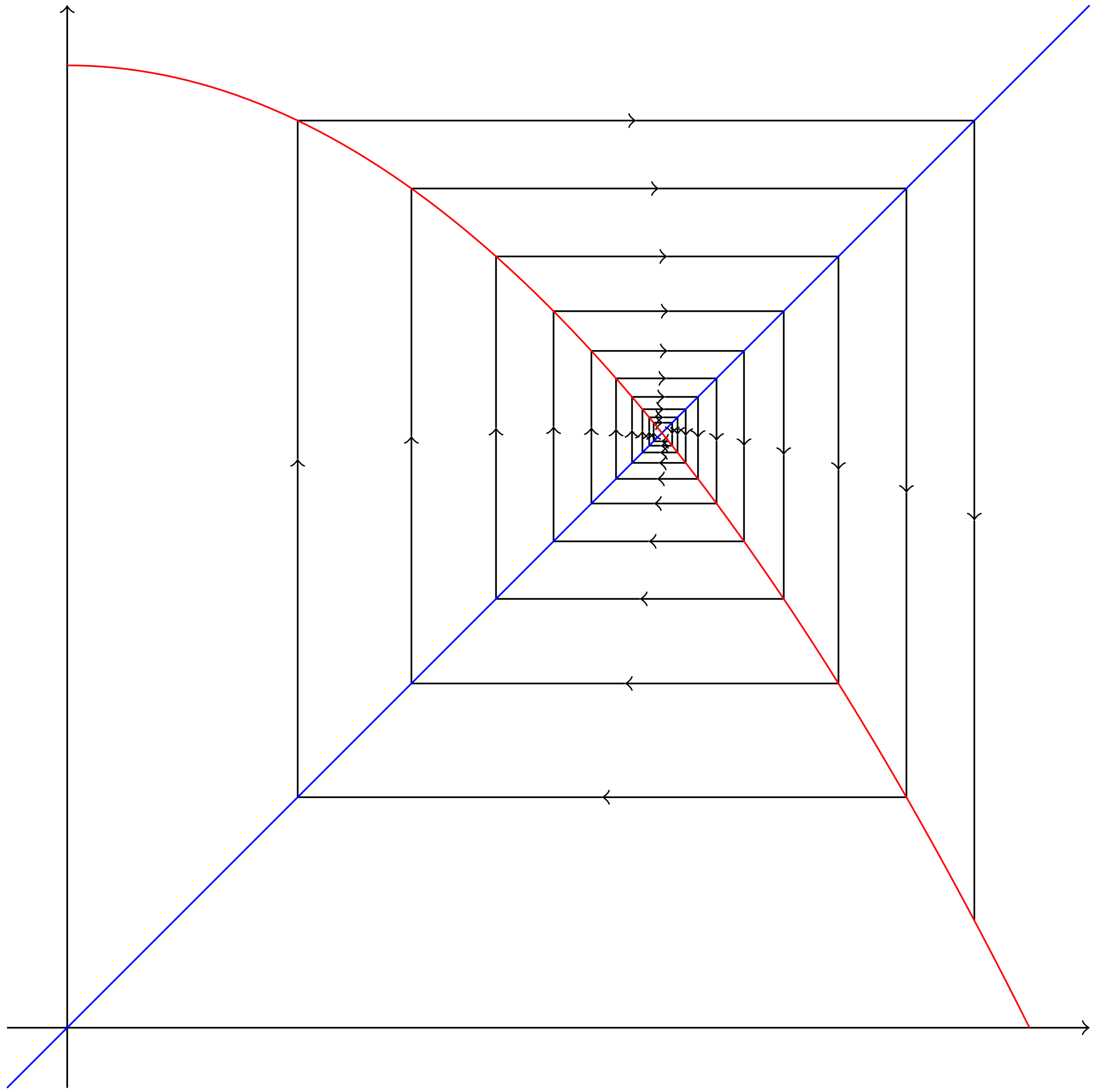
Fixpunkte durch Iteration IV



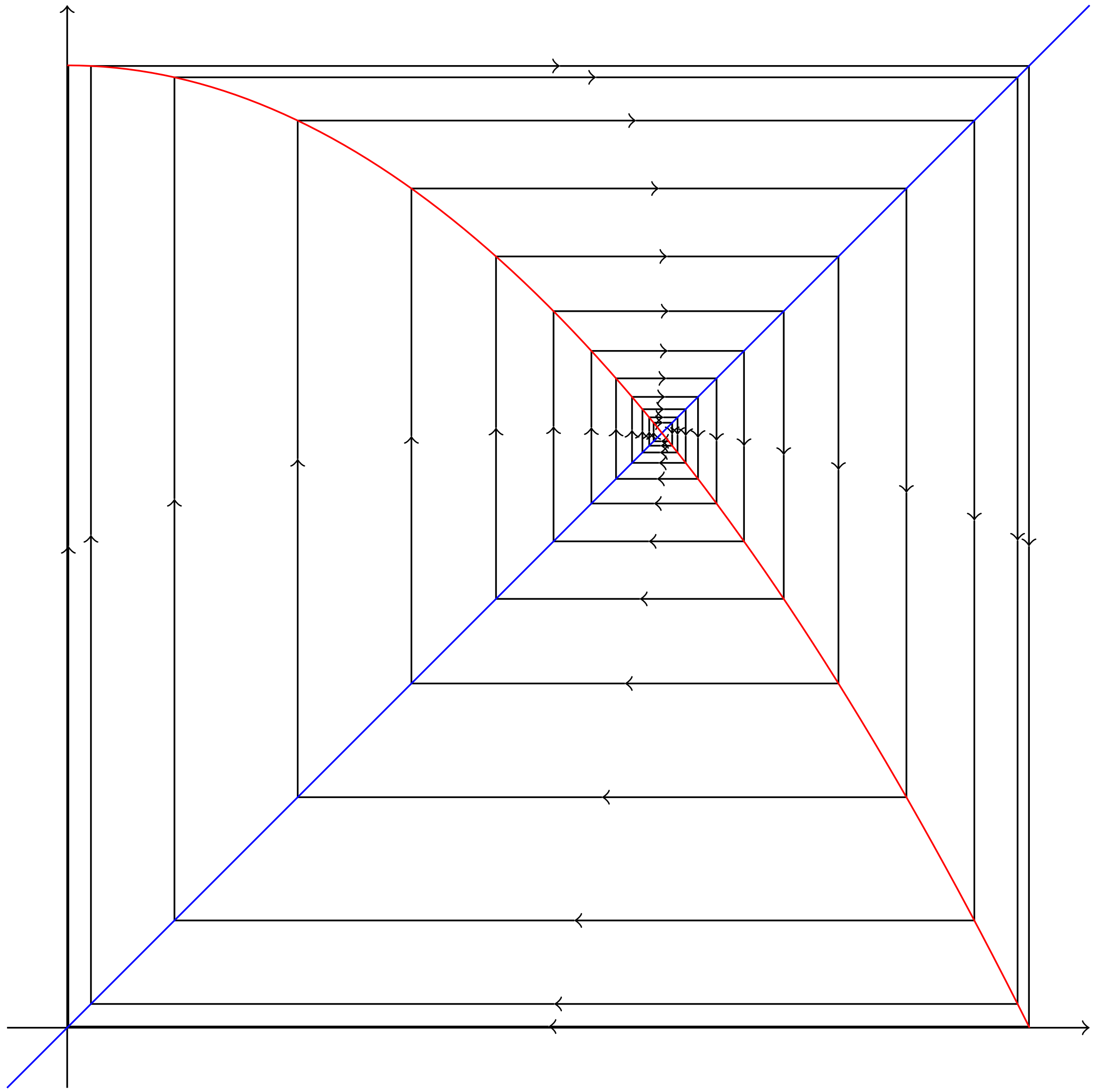
Fixpunkte durch Iteration IV



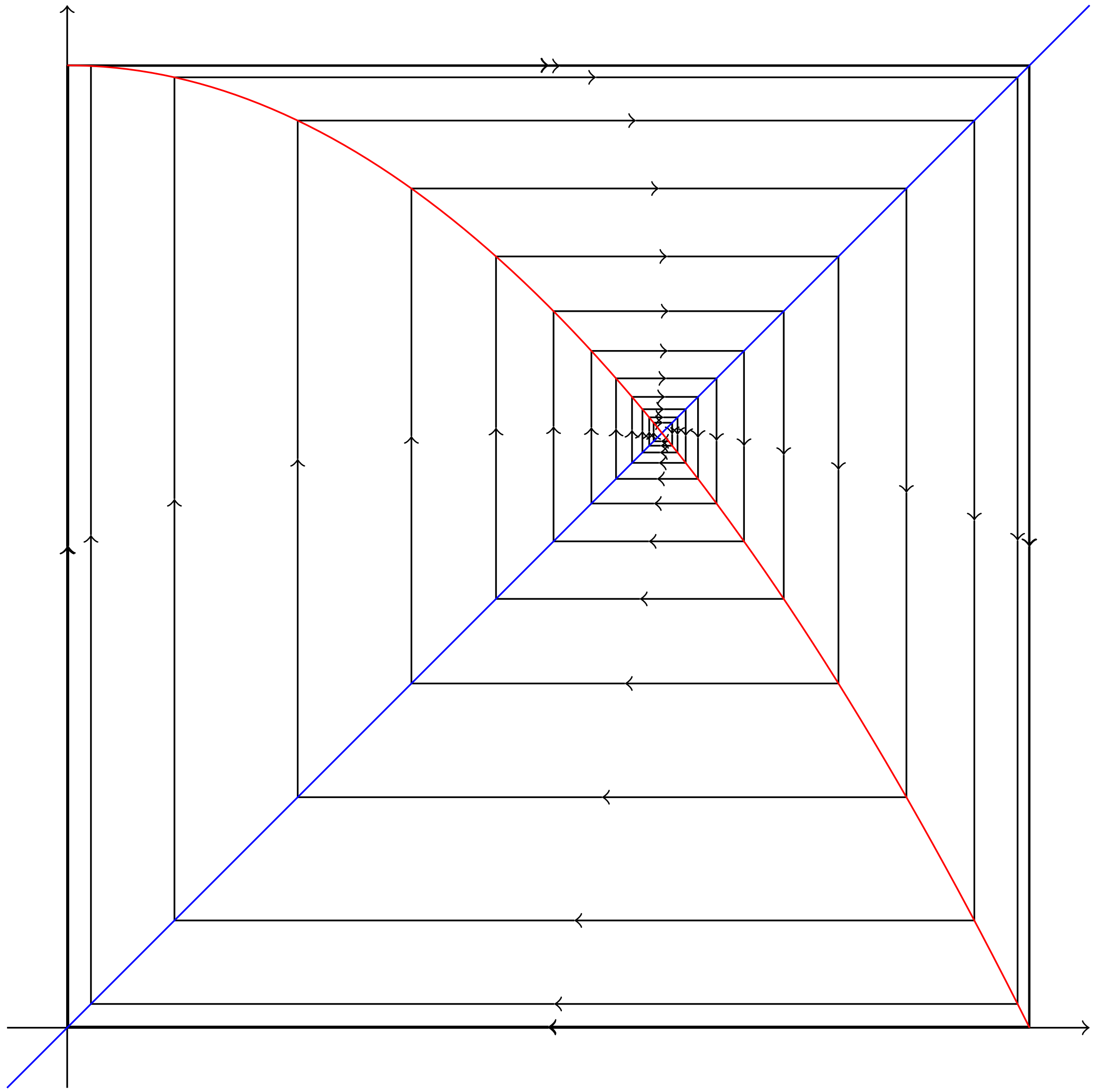
Fixpunkte durch Iteration IV



Fixpunkte durch Iteration IV



Fixpunkte durch Iteration IV



Beispiel 14.73. *Die Sinus-Funktion* $\sin$ *ist stetig differenzierbar (sogar glatt) und an der Stelle* 0 *ist die Ableitung* $\frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}\,x}(0) = \cos(0) = 1$. *Also ist die Sinus-Funktion in einer Umgebung von* 0 *invertierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion. Man nennt die Umkehrung*

$$\arcsin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

den <u>*Arcussinus*</u>. *Wir können die Ableitung mit Hilfe der Umkehrregel bestimmen:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\arcsin(y) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}\\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin(\arcsin(y))^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

Es gilt das positive Vorzeichen, weil der Cosinus im Bild $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *des Arcussinus nirgends negativ ist.*

Umkehrfunktionen trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen

Bemerkung 14.74. In Beispiel (14.73) zeigt sich ein allgemeines Prinzip. Nehmen wir an, eine stetig differenzierbare und invertierbare Funktion f mit Umkehrung g habe eine Ableitung f', *die sich als Funktion von f ausdrücken läßt*:

$$f'(x) = \Psi(f(x))$$

Dann können wir die Ableitung g' der Umkehrfunktion einfach angeben. Es ist nämlich mit $x = g(y)$ und damit $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\Psi(f(x))} = \frac{1}{\Psi(y)}$$

Dieses Prinzip ist anwendbar auf die Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sinh$, $\cosh$ und $\tanh$. Im Abschnitt (A.2) findet sich die entsprechende Tabelle.

Der Raum $\mathbb{R}^m$

Definition 15.1. Das m-fache Kreuzprodukt $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ ist die Menge aller m-Tupel reeller Zahlen. Wir schreiben diese Tupel als Spalten- oder Zeilenvektoren.

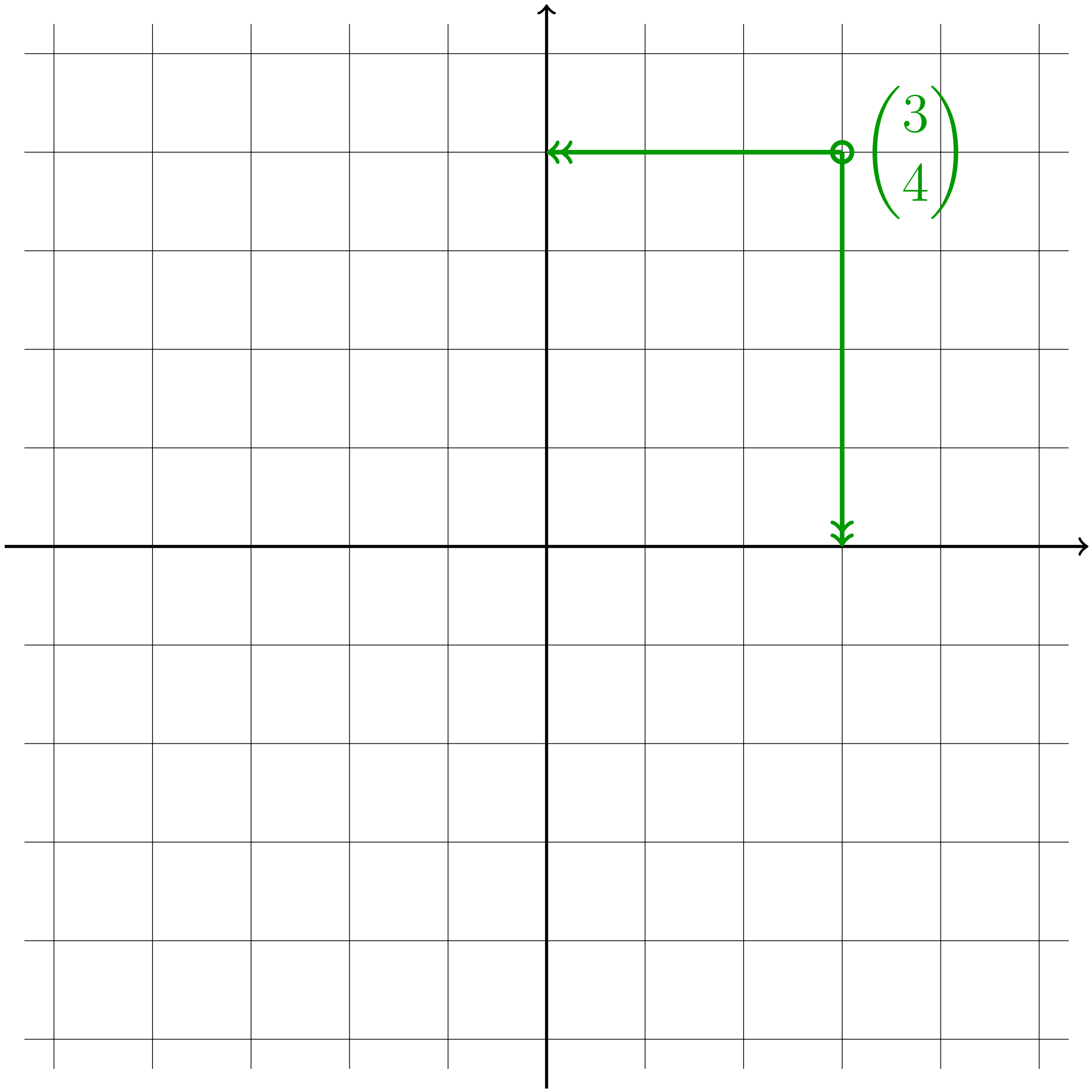
Durch komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation versehen wir $\mathbb{R}^m$ mit der Struktur eines reellen Vektorraumes (Vergleiche den Vektorraum der Treppenfunktionen). Man nennen m die Dimension von $\mathbb{R}^m$.

Der Raum $\mathbb{R}^m$ hat auch eine *Geometrie*, denn wir können die Länge eines Vektor definieren durch:

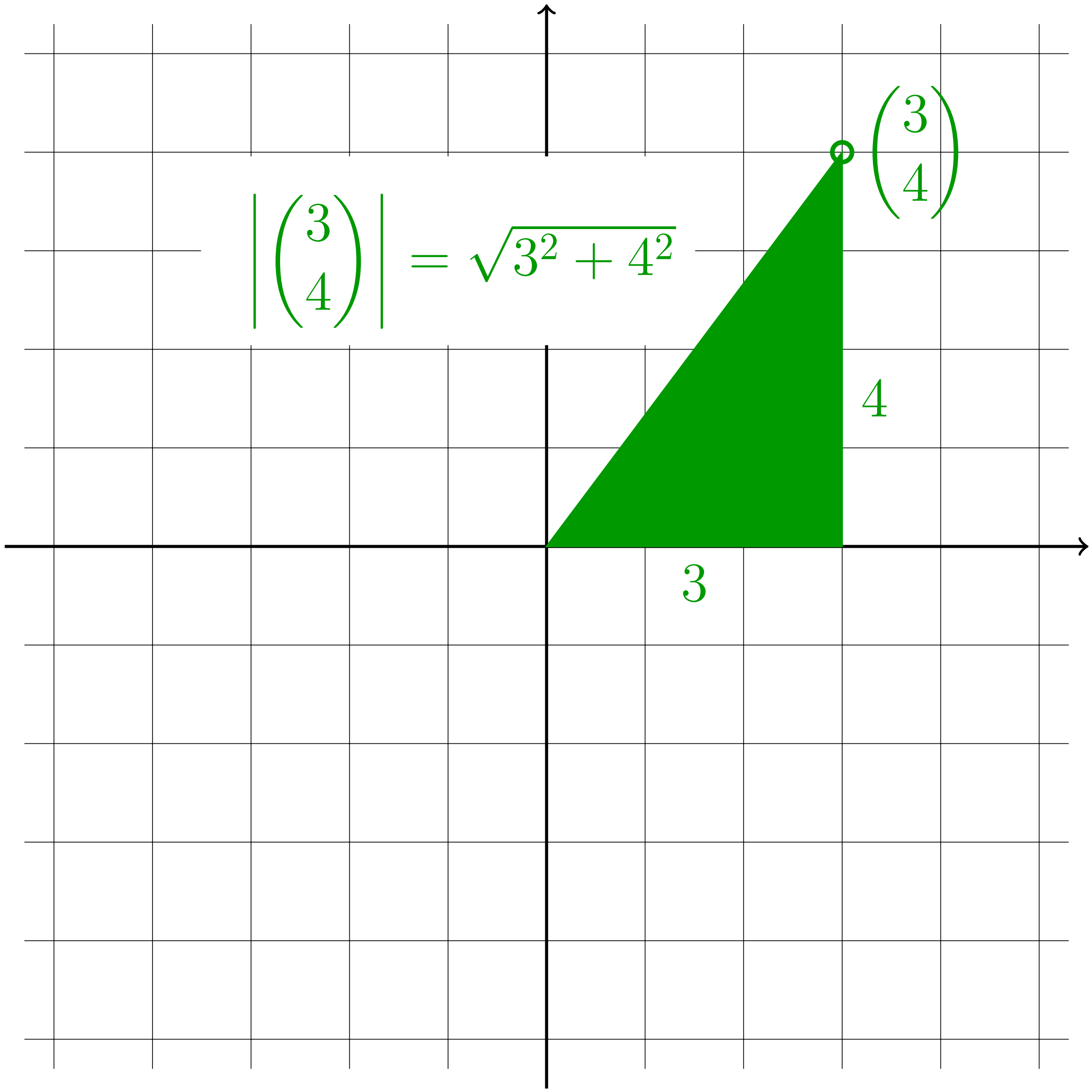
$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right| := \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$$

Der Abstand zweier Vektoren ist dann einfach die Länge ihrer Differenz. Die Formel entspricht dem, was der Satz von Pythagoras gerade für kartesische Koordinaten erwarten läßt.

Kartesische Koordinaten



Länge eines Vektor



Definition 15.2. Der Abstand läßt sich auch vermöge des Skalarproduktes von Vektoren definieren (es heißt so, weil das Ergebnis eine skalare Größe, also eine Zahl, ist). Für zwei Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

definiert man

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

Damit ist $|\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Bemerkung 15.3. Das Skalarprodukt genügt den Bedingungen für ein inneres Produkt:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$
$$\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \qquad \text{Gleichheit nur für } \mathbf{u} = 0$$

Die erste Bedingung ist die Symmetrie. Die zweite Bedingung formuliert, daß $\langle \bigstar, \mathbf{w} \rangle$ für jeden festen Vektor $\mathbf{w}$ eine lineare Abbildung ist. Mit der Symmetrie folgt, daß das Skalarprodukt auch im zweiten Argument linear ist. Es ist also eine symmetrische Bilinearform. Die dritte Bedingung nennt man positive Definitheit.

Einen Vektorraum, auf dem ein innered Produkt fixiert ist, nennt man einen euklidischen Vektorraum. In der linearen Algebra wird gezeigt, daß sich auf jedem euklidischen Vektorraum kartesische Koordinaten einführen lasse, so daß das innere Produkt die Form des Skalarproduktes annimmt.

Proposition 15.4. *In einem euklidischen Raum (insbesondere im $\mathbb{R}^m$) gilt:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Beweis. Der Fall $\mathbf{v} = 0$ ist offensichtlich. Sei also $\mathbf{v} \neq 0$. Betrachte das quadratische Polynom

$$x \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2x \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + x^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} + x\mathbf{v}, \mathbf{u} + x\mathbf{v} \rangle \geq 0$$

und bestimme die Stelle x, an der das Minimum angenommen wird. Es ist $x_{\min} = -\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Einsetzen ergibt:

$$0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Nach Multiplikation mit $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Die Dreiecksungleichung

Aufgabe 15.5. Der Abstand von Punkten im $\mathbb{R}^m$ genügt der Dreiecksungleichung. Seien $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ drei Punkte in $\mathbb{R}^m$. Zeige:

$$|\mathbf{w} - \mathbf{u}| \leq |\mathbf{w} - \mathbf{v}| + |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$$

Definition 15.6. Eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ heißt Kurve. Sie wird gegeben durch m Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ vermöge der Beziehung:

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

Für

$$\text{„blah"} \in \left\{ \begin{array}{l} \text{integrierbar, beschränkt, stetig,} \\ \text{differenzierbar, stetig differenzierbar,} \\ \text{zweifach stetig differenzierbar, } \ldots \end{array} \right\}$$

heißt eine Kurve blah, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen blah sind.

Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeit

Definition 15.14. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine an der Stelle t differenzierbare Kurve mit Koordinatenfunktionen γ_i. Dann heißt

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{d}\,x}(t) = \dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\,\gamma_1}{\mathrm{d}\,x}(t) \\ \cdots \\ \frac{\mathrm{d}\,\gamma_m}{\mathrm{d}\,x}(t) \end{pmatrix}$$

der Tangentenvektor oder Geschwindigkeitsvektor der Kurve γ an der Stelle t. Die Notation $\dot{\gamma}$ ist in der Vorstellungswelt beheimatet, die die Kurve als Bewegung ansieht und das Argument als Zeitpunkt auffaßt. Daher rührt auch die präferierte Bezeichnung t für die Argumente und der Name Geschwindigkeitsvektor.

Der Betrag $|\dot{\gamma}(t)|$ ist die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t.

Behauptung und Definition 15.8. Ist die Kurve γ stetig differenzierbar im ganzen Definitionsbereich, so ist die Abbildung $t \mapsto |\dot{\gamma}(t)|$ stetig und damit integrierbar. Die Größe

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

heißt Kurvenlänge. Sie gibt die Länge des Kurvenstückes $\gamma|_{[a,b]}$ an.

Beweis. Stetige Differenzierbarkeit von γ bedeutet, daß die Ableitung $\dot{\gamma}$ stetige Koordinatenfunktionen hat. Dann ist die Abbildung $t \mapsto \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_i(t)^2$ stetig, weil sie mittels der Grundrechenarten aus stetigen Abbildungen zusammengesetzt ist. Die Stetigkeit von $y \mapsto y^{\frac{1}{2}}$ impliziert dann die Stetigkeit der Verkettung:

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_i(t)^2 \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_i(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\dot{\gamma}(t)| \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beispiel 15.9. *Seien* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. *Die Kurve*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \mathbf{u} + t\mathbf{v} \end{aligned}$$

beschreibt eine gerade Linie. Die Geschwindigkeit ist hier konstant. Sogar der Geschwindigkeitsvektor ist konstant. Es gilt nämlich $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}$. *Die Länge des Kurvensegments* $\gamma|_{[a,b]}$ *ist darum*

$$(b-a)\,|\mathbf{v}| = |\mathbf{u} + b\mathbf{v} - \mathbf{u} - a\mathbf{v}| = |\gamma(b) - \gamma(a)|$$

der Abstand der Endpunkte (unabhängig davon, mit welcher Geschwindidkeit die Strecke zurückgelegt wird).

Beispiel 15.10. *Die Kurve*

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

ist stetig differenzierbar. Es gilt:

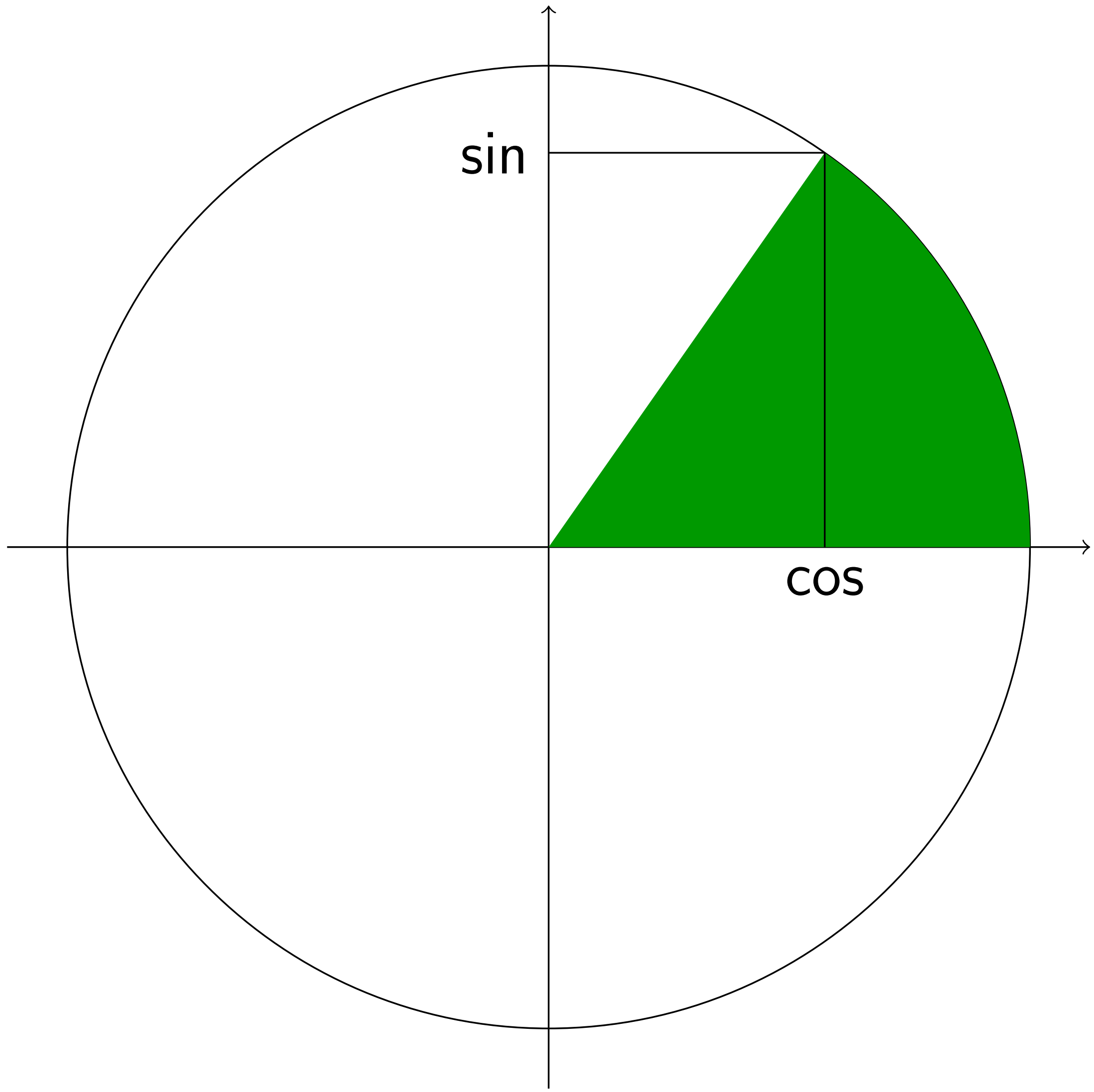
$$|\gamma(t)| = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 1 \quad \textit{und} \quad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\cos(t)^2 + (-\sin(t))^2} = 1$$

Also ist beschreibt $\gamma(t)$ die Bewegung eines Punktes, der sich auf dem Einheitskreis mit konstanter Geschwindigkeit 1 bewegt.

Entprechend sind $\cos(\vartheta)$ und $\sin(\vartheta)$ die x- bzw. y-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis, der im Bogenmaß gerade ϑ vom Punkt $x = 1, y = 0$ (gegen den Uhrzeigersinn) entfernt ist.

Der Umfang des Kreises ist 2π. Damit ist π die kleinste positive Nullstelle von $\sin(x)$.

Der Einheitskreis



Definition 15.11. Die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen Standardeinheitsvektoren. Sie haben jeweils die Länge 1 und für ihre Skalarprodukte gilt:

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Die Standardeinheitsvektoren bilden die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$.

Einfache Normabschätzungen

Beobachtung 15.12. *Für* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:*

$$|u_i| \leq |\mathbf{u}| \leq |u_1| + \cdots + |u_m|$$

Beweis. Zunächst ist

$$|u_i| = \sqrt{u_i^2} \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_m^2} = |\mathbf{u}|$$

Auf der anderen Seite ist:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_m\mathbf{e}_m$$

Mit $|u_i\mathbf{e}_i| = |u_i|$ und der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$|\mathbf{u}| \leq |u_1\mathbf{e}_1| + \cdots + |u_m\mathbf{e}_m| = |u_1| + \cdots + |u_m|$$

q.e.d.

Die Tangente

Definition 15.13. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve und $t \in I$ eine Stelle. Eine Gerade

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto \mathbf{u} + x\mathbf{v} \end{aligned}$$

heißt <u>Tangente</u> von γ an der Stelle t, wenn die Abbildung

$$x \mapsto |\gamma(x) - \lambda(x)|$$

an der Stelle t von höherer als erster Ordnung verschwindet.

Der Tangentenvektor I

Satz 15.14. *Sei* $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ *eine Kurve und* $t \in I$ *eine Stelle. Wir setzen* $\mathbf{u} := \gamma(t)$. *Für einen Vektor* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ *sind dann äquivalent:*

1. *Die Kurve* γ *ist differenzierbar an der Stelle* t *mit Ableitung* $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}$.
2. *Die Gerade*
$$x \mapsto \mathbf{u} + (x - t)\mathbf{v} = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) + x\mathbf{v}$$
ist eine Tangente an die Kurve γ *an der Stelle* t.
3. *Es gibt eine an der Stelle* t *stetige Kurve* $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ *mit:*
$$\gamma(x) - \gamma(t) = (x - t)\bar{\gamma}(x) \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{v} = \bar{\gamma}(t)$$

Der Tangentenvektor II

Satz 15.14. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve, $t \in I$ und $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1, \ldots, v_m \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^m$. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Kurve γ ist differenzierbar an der Stelle t mit Ableitung $\dot\gamma(t) = \mathbf{v}$.*

3. *Es gibt eine an der Stelle t stetige Kurve $\bar\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ mit: $\gamma(x) - \gamma(t) = (x - t)\bar\gamma(x)$ und $\mathbf{v} = \bar\gamma(t)$.*

Beweis. Seien γ_i die Koordinatenfunktionen von γ.

$\boxed{\gamma_i \text{ ist differenzierbar}_{\text{st}}}$

$$
\begin{aligned}
& \dot\gamma(t) = \mathbf{v} \\
\iff\quad & \forall i \;:\; \dot\gamma_i(t) = v_i \\
\iff\quad & \forall i \quad \exists \bar\gamma_i : I \to \mathbb{R} \;:\; \begin{cases} \bar\gamma_i \text{ stetig an der Stelle } t \\ \bar\gamma_i(t) = v_i \\ \gamma_i(x) - \gamma_i(t) = (x - t)\bar\gamma_i(x) \end{cases} \\
\iff\quad & \exists \bar\gamma : I \to \mathbb{R}^m \;:\; \begin{cases} \bar\gamma \text{ stetig an der Stelle } t \\ \bar\gamma(t) = \mathbf{v} \\ \gamma(x) - \gamma(t) = (x - t)\bar\gamma(x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Der Tangentenvektor III

Satz 15.14. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve, $t \in I$, $\mathbf{u} := \gamma(t)$ und $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1, \dots, v_m \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^m$. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Kurve γ ist differenzierbar an der Stelle t mit Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}$.*
2. *Die Gerade $x \mapsto \mathbf{u} + (x-t)\mathbf{v} = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) + x\mathbf{v}$ ist eine Tangente an die Kurve γ an der Stelle t.*

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2). Sei γ differenzierbar an der Stelle t mit Tangentenvektor $\mathbf{v}$. Dann sind die Koordinatenfunktionen γ_i differenzierbar an der Stelle t mit Ableitung v_i. Also:

$$\left.\begin{array}{rl} & x \mapsto \gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i \\ \Rightarrow & x \mapsto |\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i| \\ \Rightarrow & x \mapsto \sum_{i=1}^m |\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i| \\ \Rightarrow & x \mapsto |\gamma(x) - \lambda(x)| \end{array}\right\} \text{verschwindet an der Stelle } t \text{ von höherer als erster Ordnung}$$

mit (15.12):
$$\begin{aligned} |\gamma(x) - \lambda(x)| &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^m \left(\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i\right)^2} \\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^m |\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i| \end{aligned}$$

q.e.d.

Der Tangentenvektor IV

Satz 15.14. *Sei* $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ *eine Kurve,* $t \in I$*,* $\mathbf{u} := \gamma(t)$ *und* $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1, \ldots, v_m \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^m$*. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Kurve* γ *ist differenzierbar an der Stelle* t *mit Ableitung* $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}$*.*
2. *Die Gerade* $x \mapsto \mathbf{u} + (x-t)\mathbf{v} = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) + x\mathbf{v}$ *ist eine Tangente an die Kurve* γ *an der Stelle* t*.*

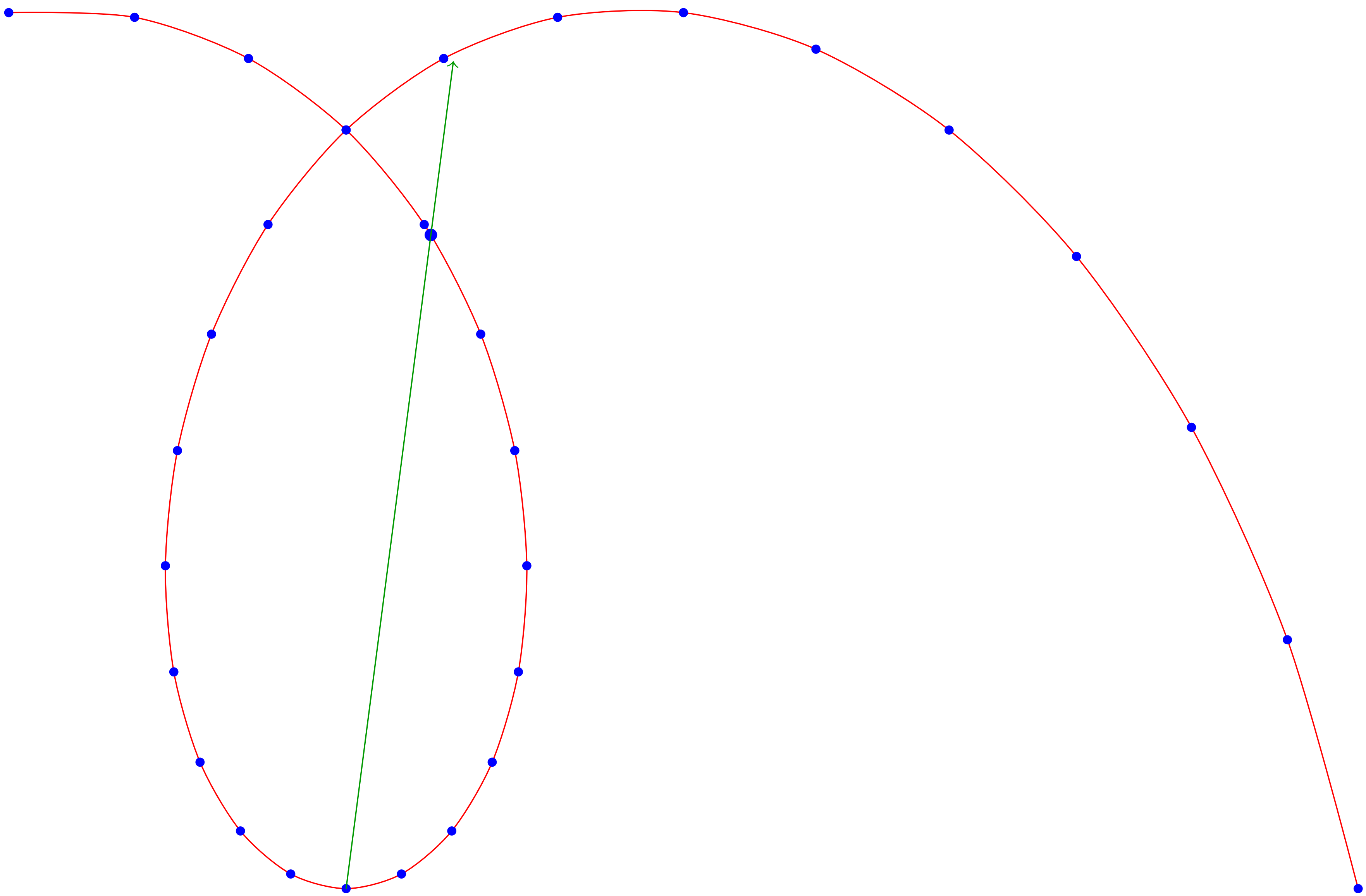
Beweis (2) $\Rightarrow$ (1). Nun haben wir in umgekehrter Richtung:

$$\left.\begin{array}{ll} & x \mapsto |\gamma(x) - \lambda(x)| \\ \Rightarrow & x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i\right)^2} \\ \Rightarrow & x \mapsto |\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i| \\ \Rightarrow & x \mapsto \gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i \end{array}\right\} \text{verschwindet an der Stelle } t \text{ von höherer als erster Ordnung}$$

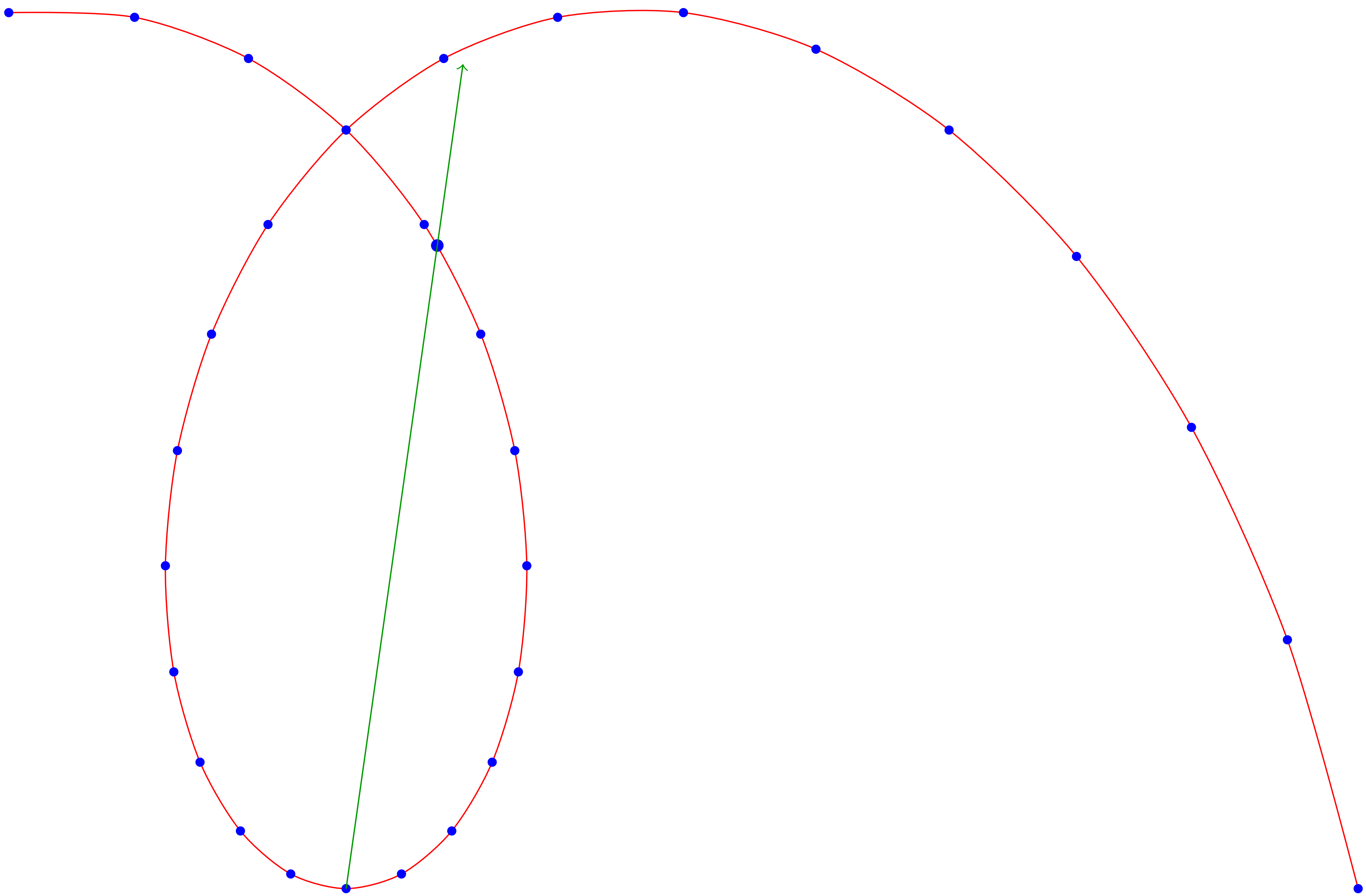
mit (15.12):

$$|\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\gamma_i(x) - \gamma_i(t) - (x-t)v_i\right)^2} \qquad \textbf{q.e.d.}$$

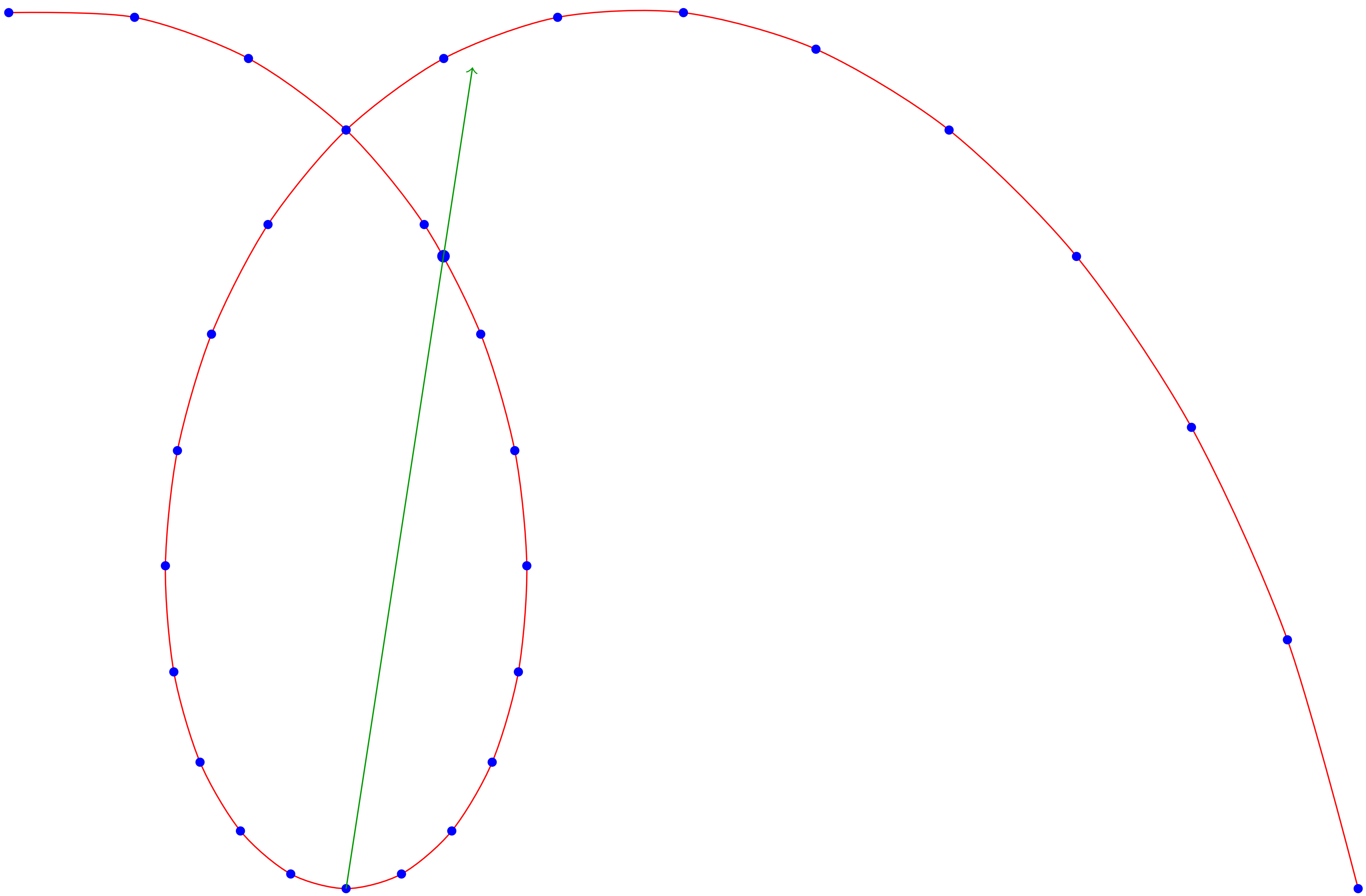
Der Tangentenvektor V



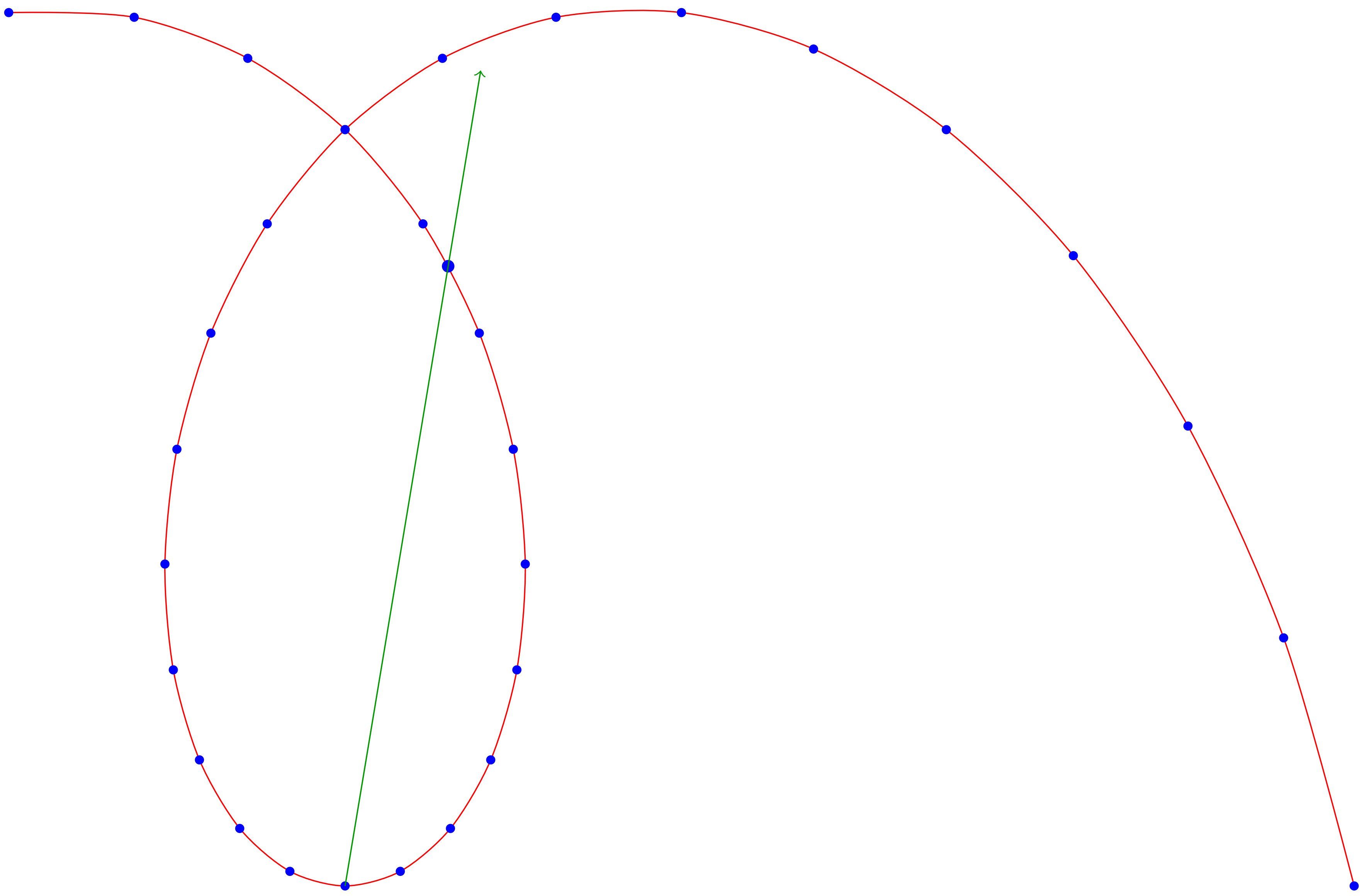
Der Tangentenvektor V



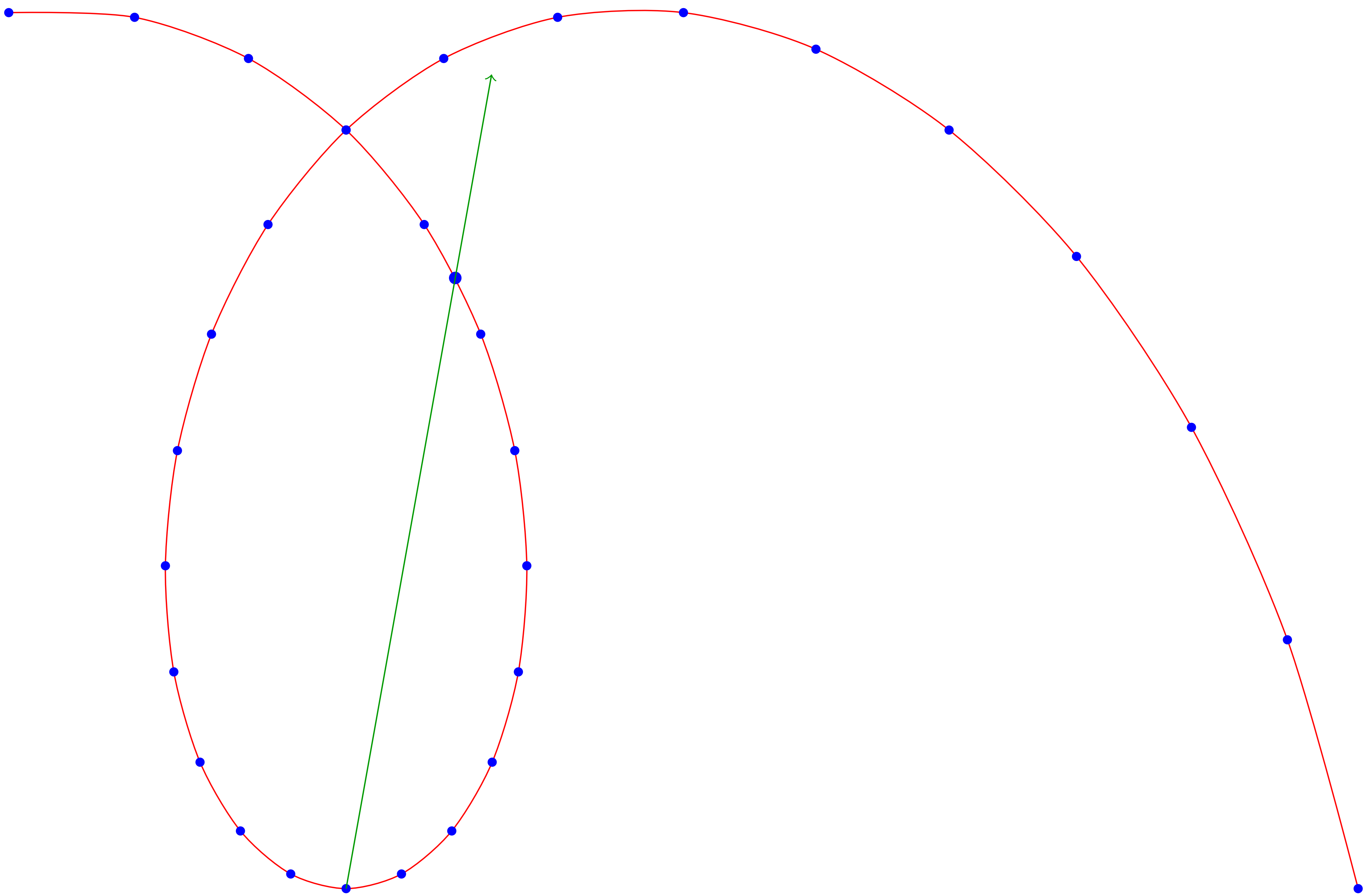
Der Tangentenvektor V



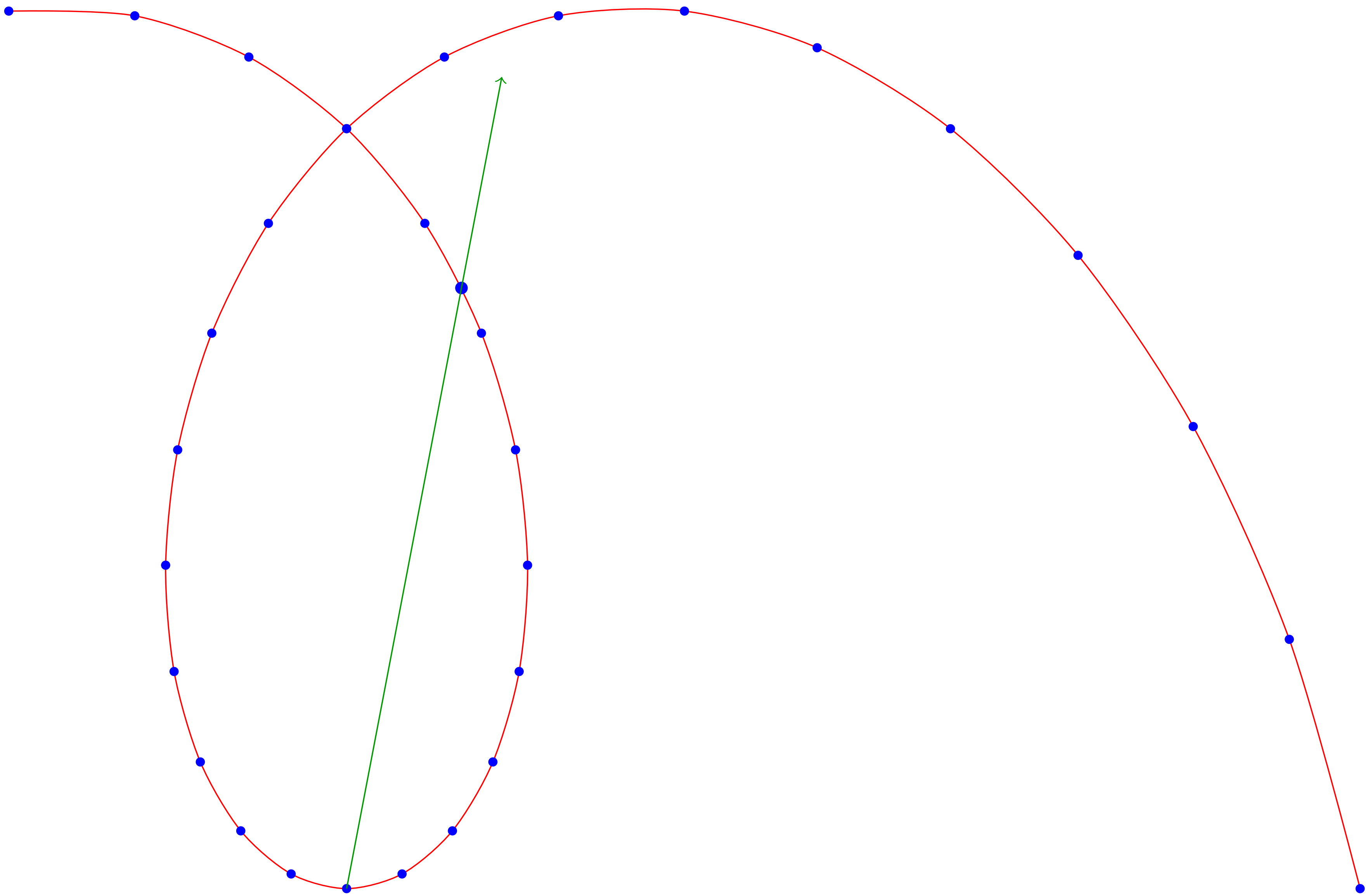
Der Tangentenvektor V



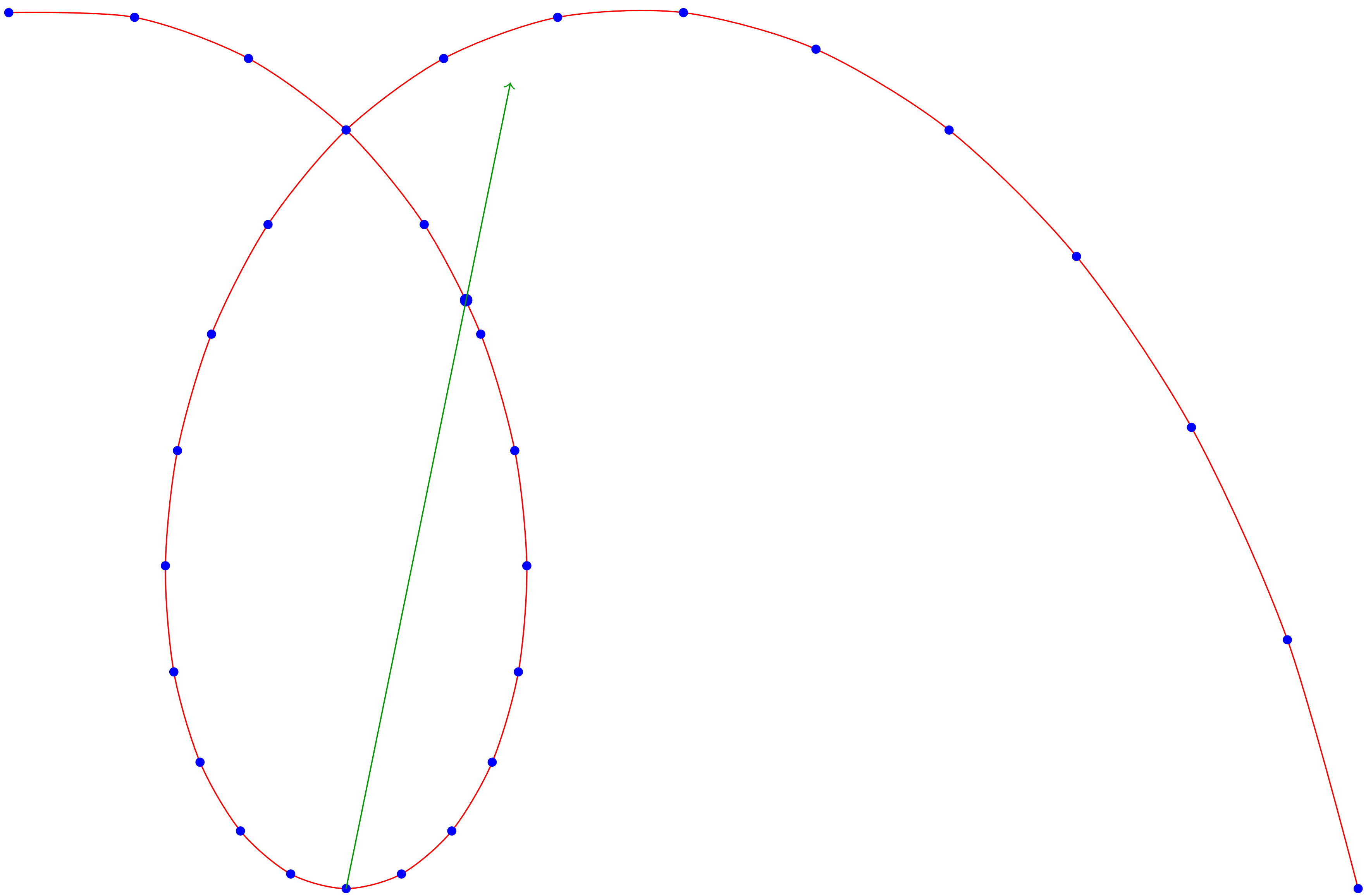
Der Tangentenvektor V



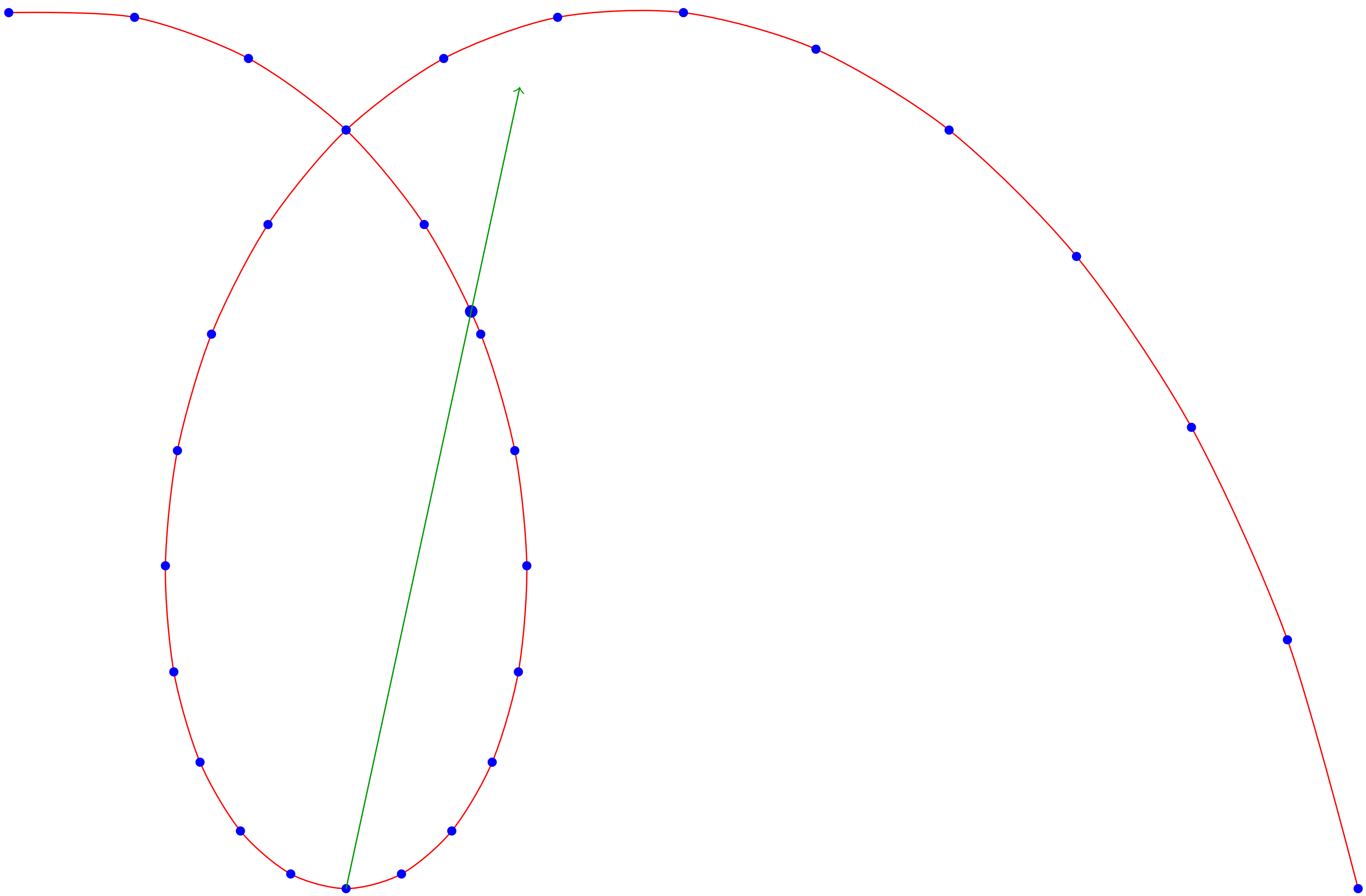
Der Tangentenvektor V



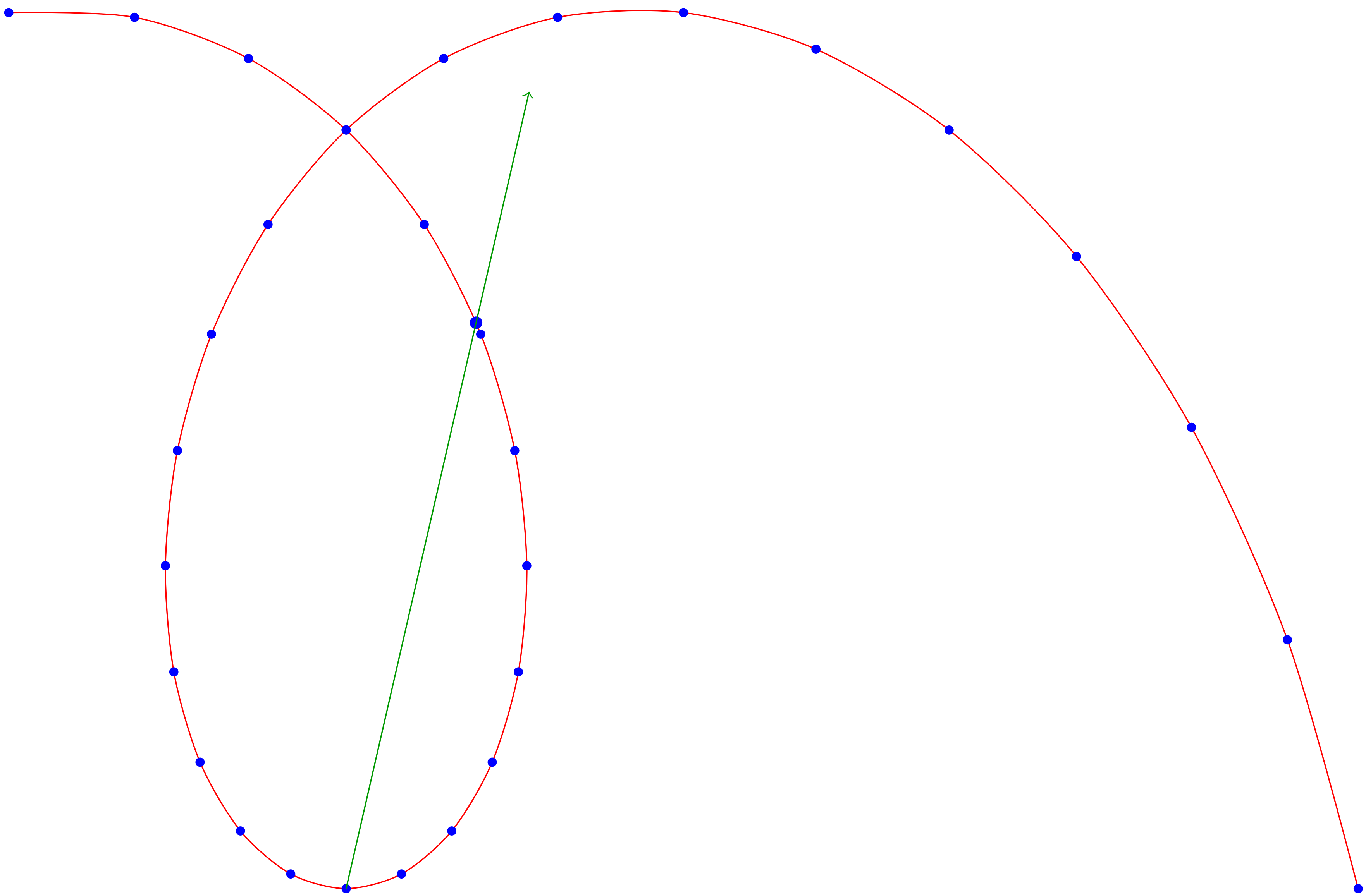
Der Tangentenvektor V



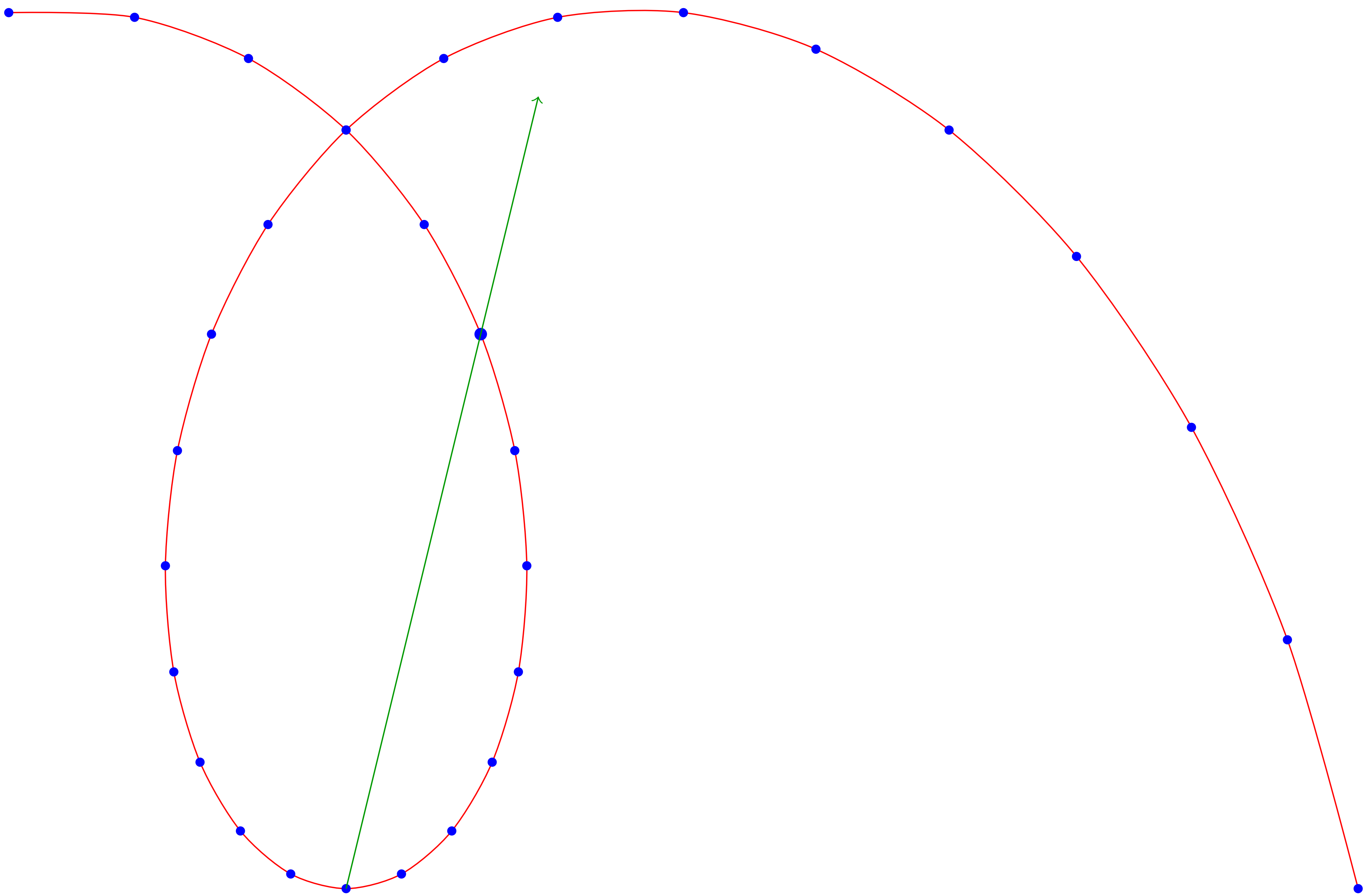
Der Tangentenvektor V



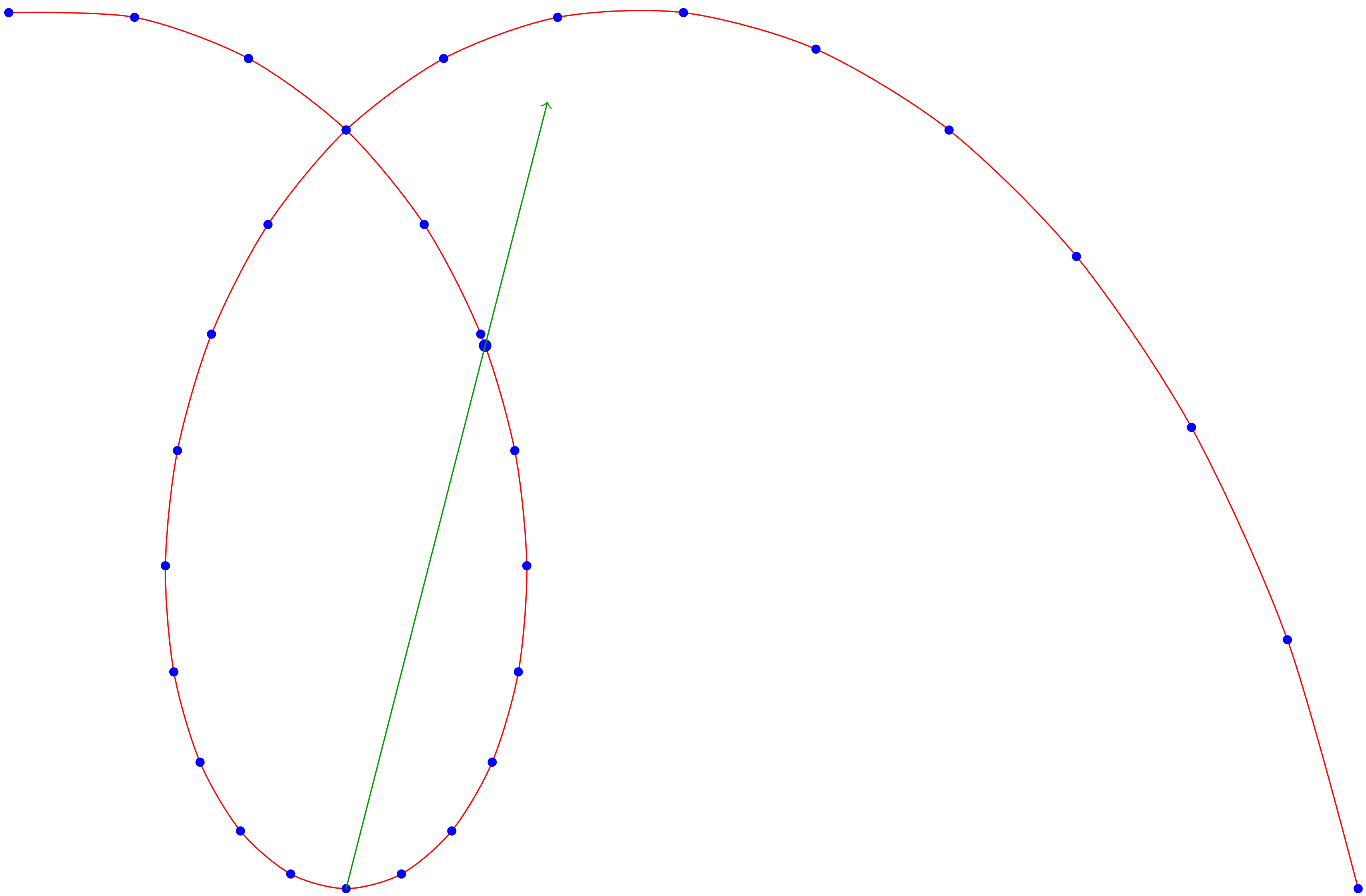
Der Tangentenvektor V



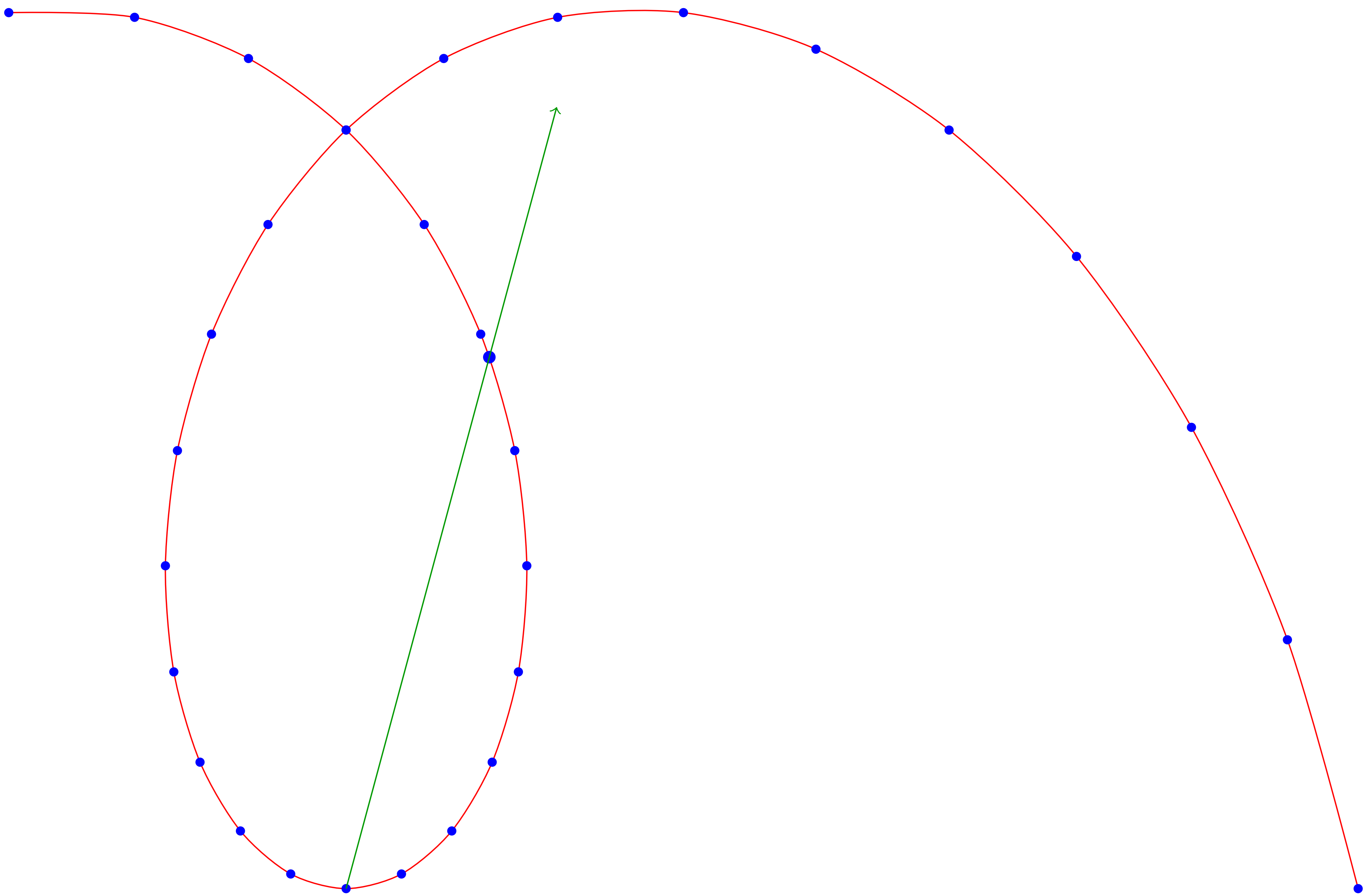
Der Tangentenvektor V



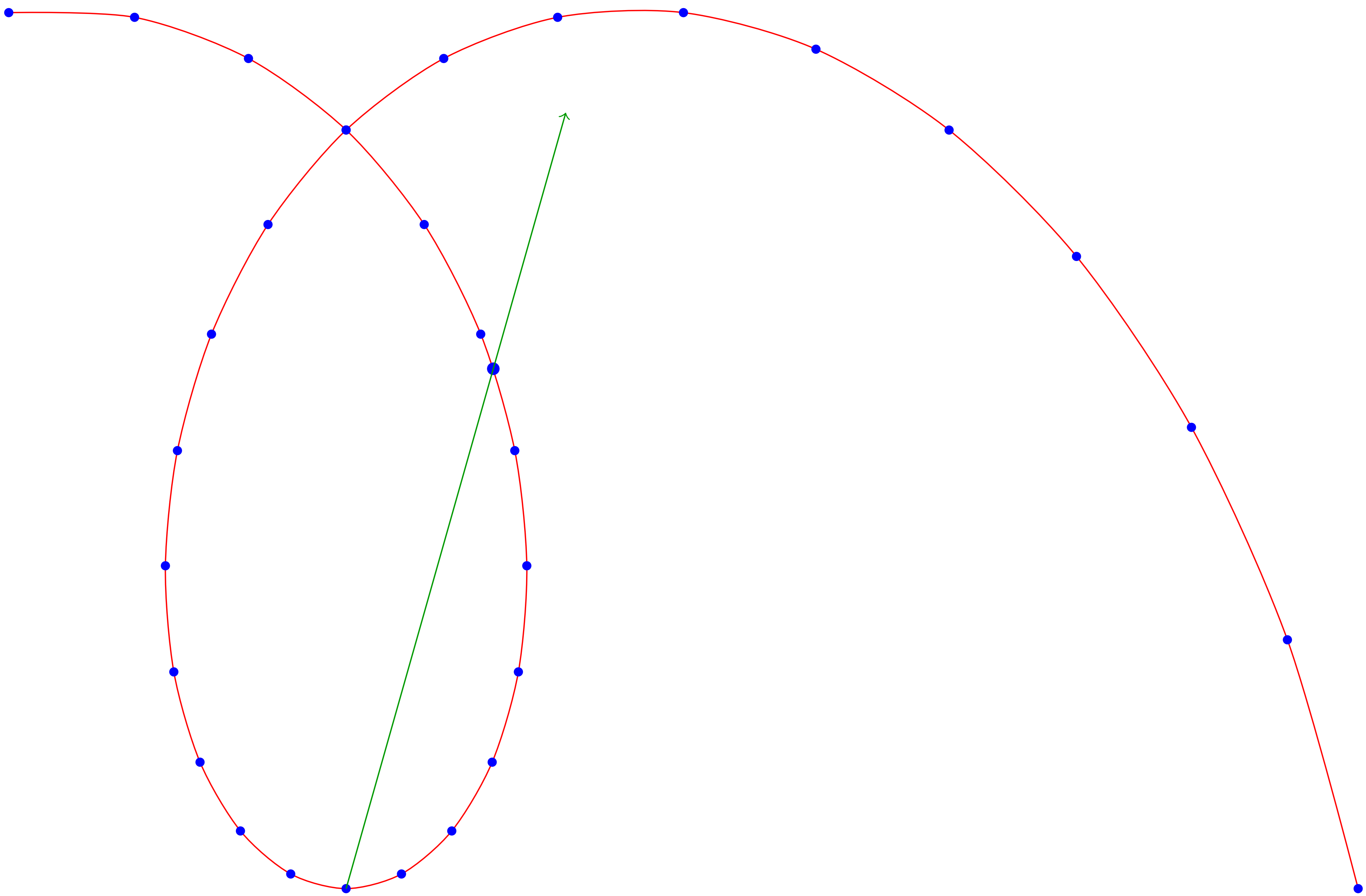
Der Tangentenvektor V



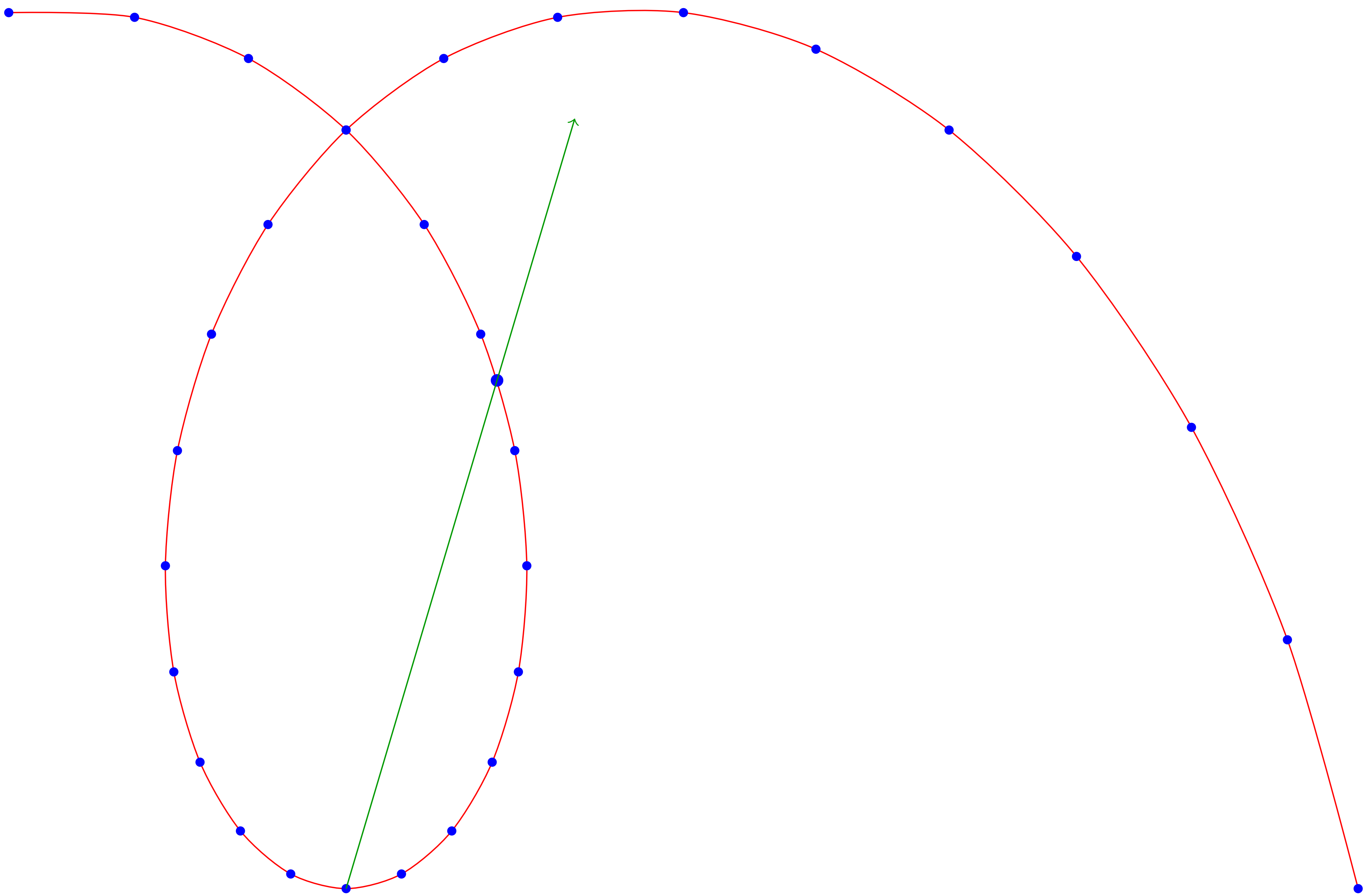
Der Tangentenvektor V



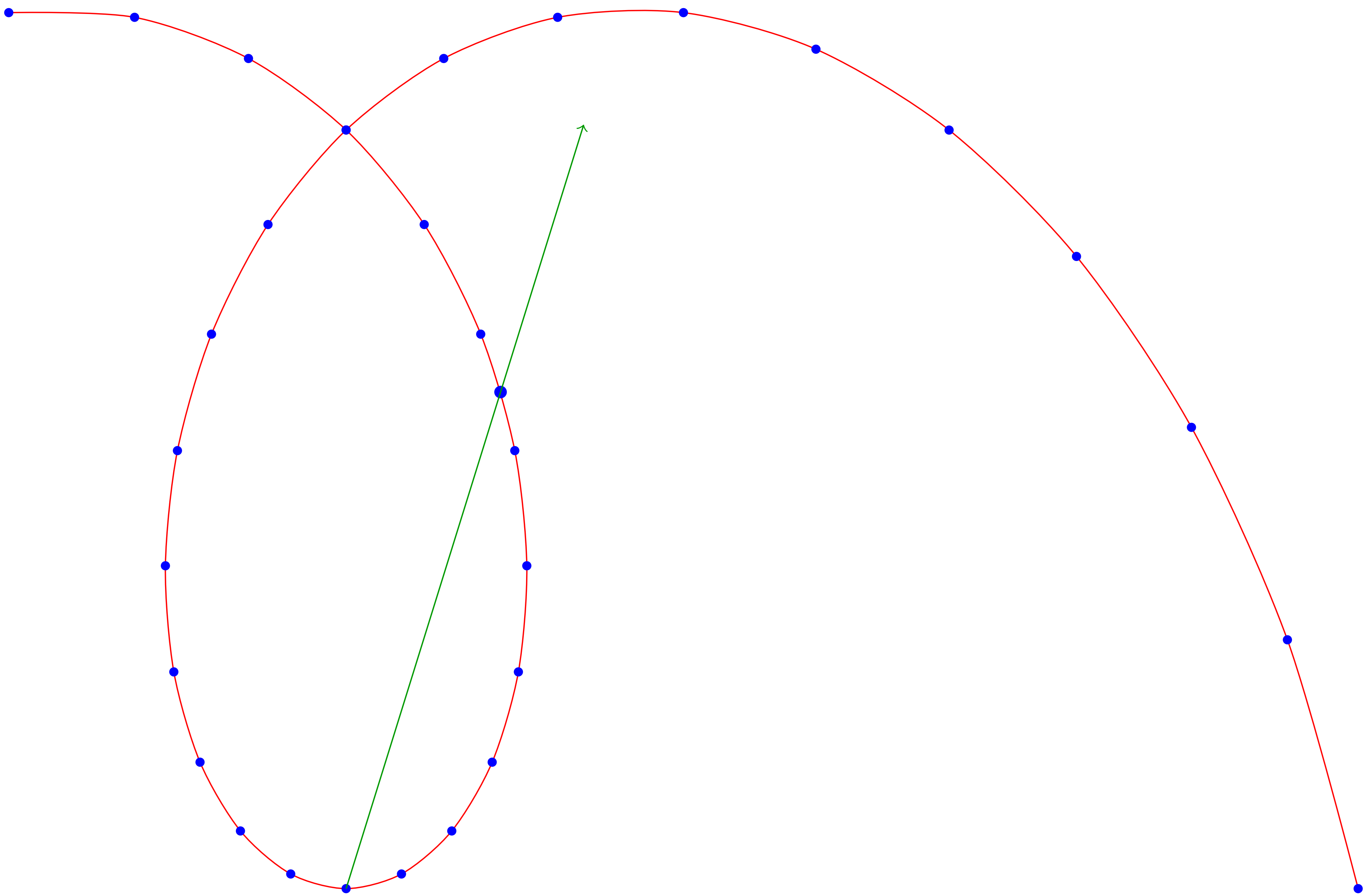
Der Tangentenvektor V



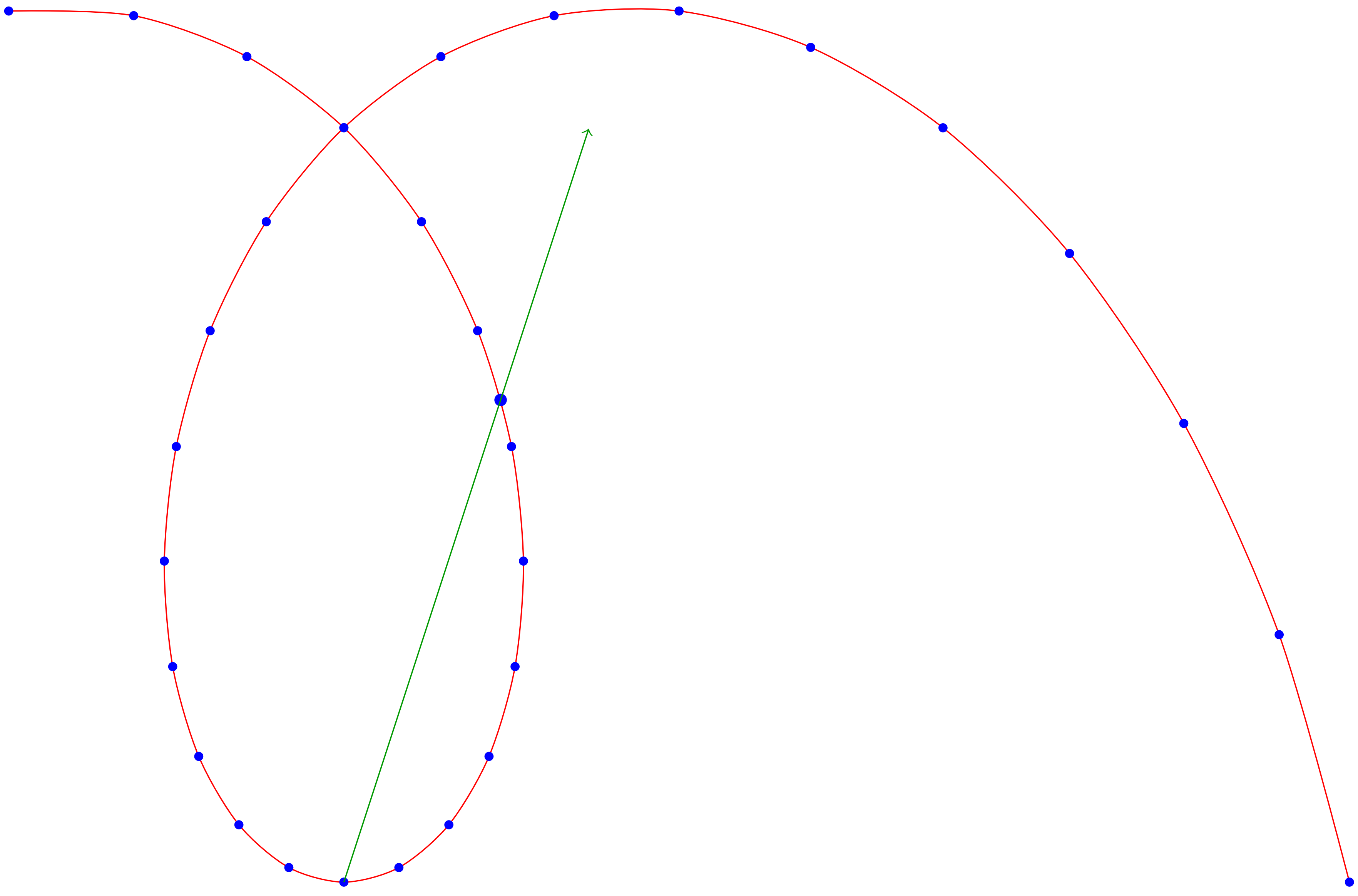
Der Tangentenvektor V



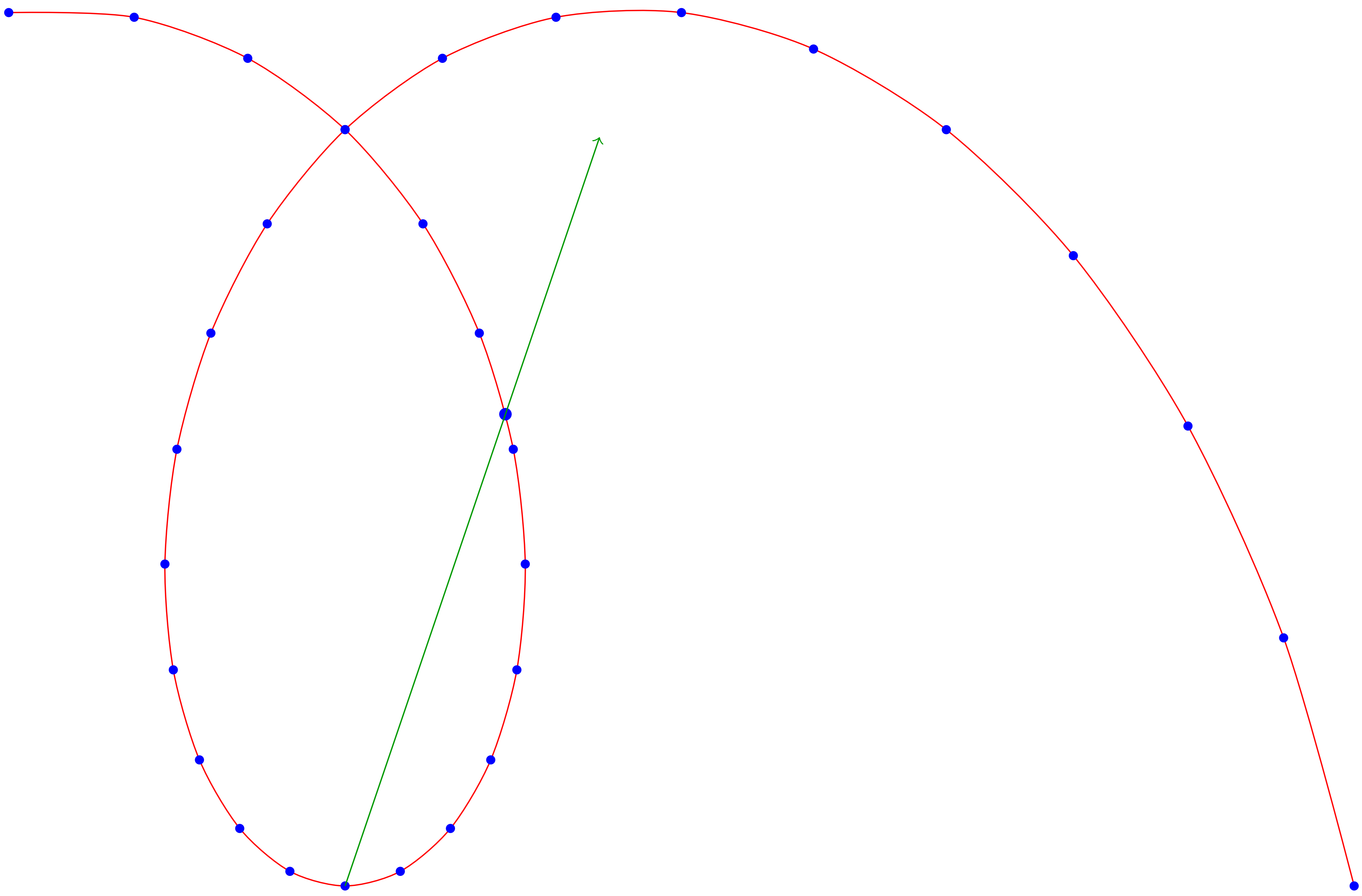
Der Tangentenvektor V



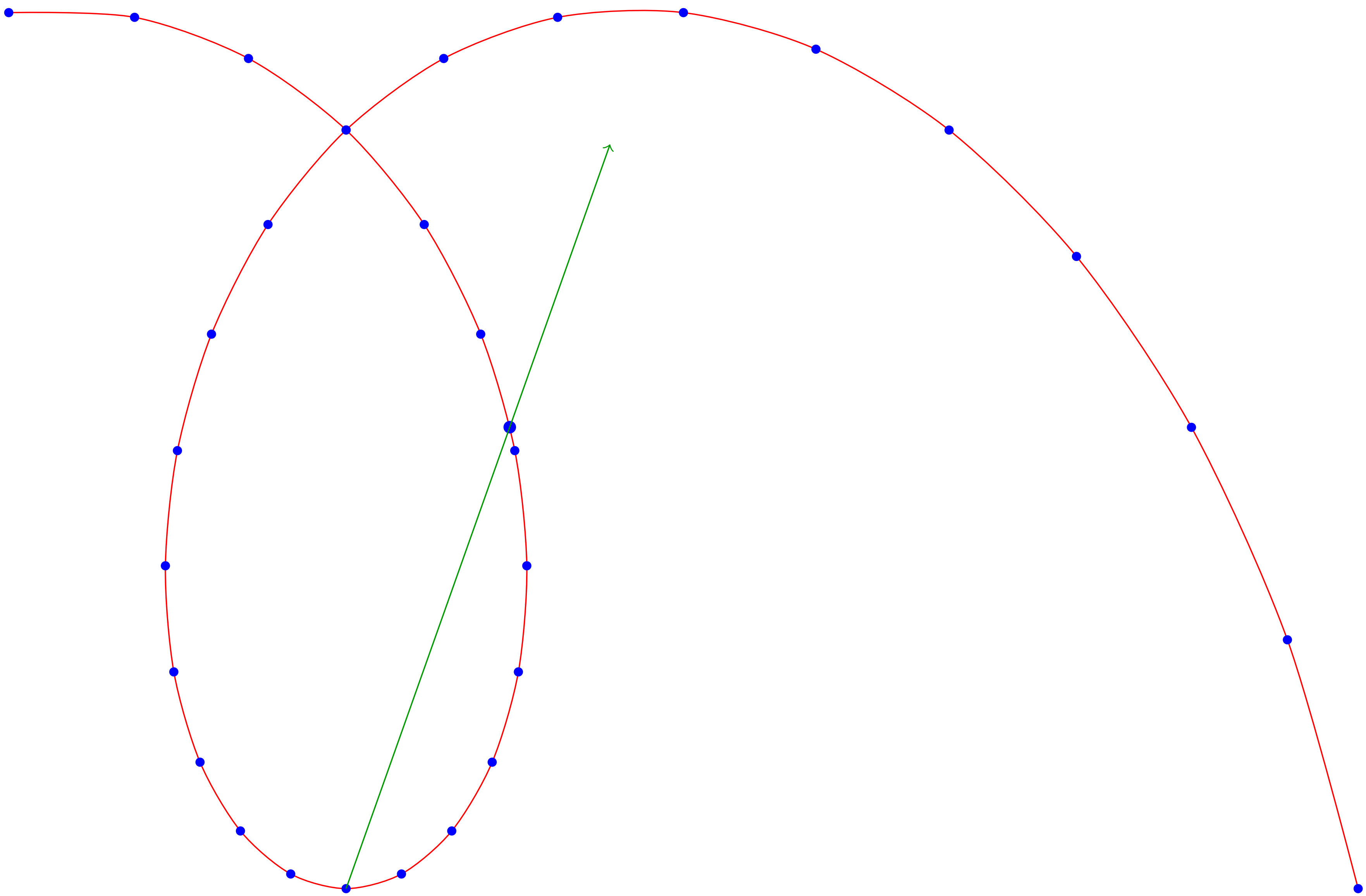
Der Tangentenvektor V



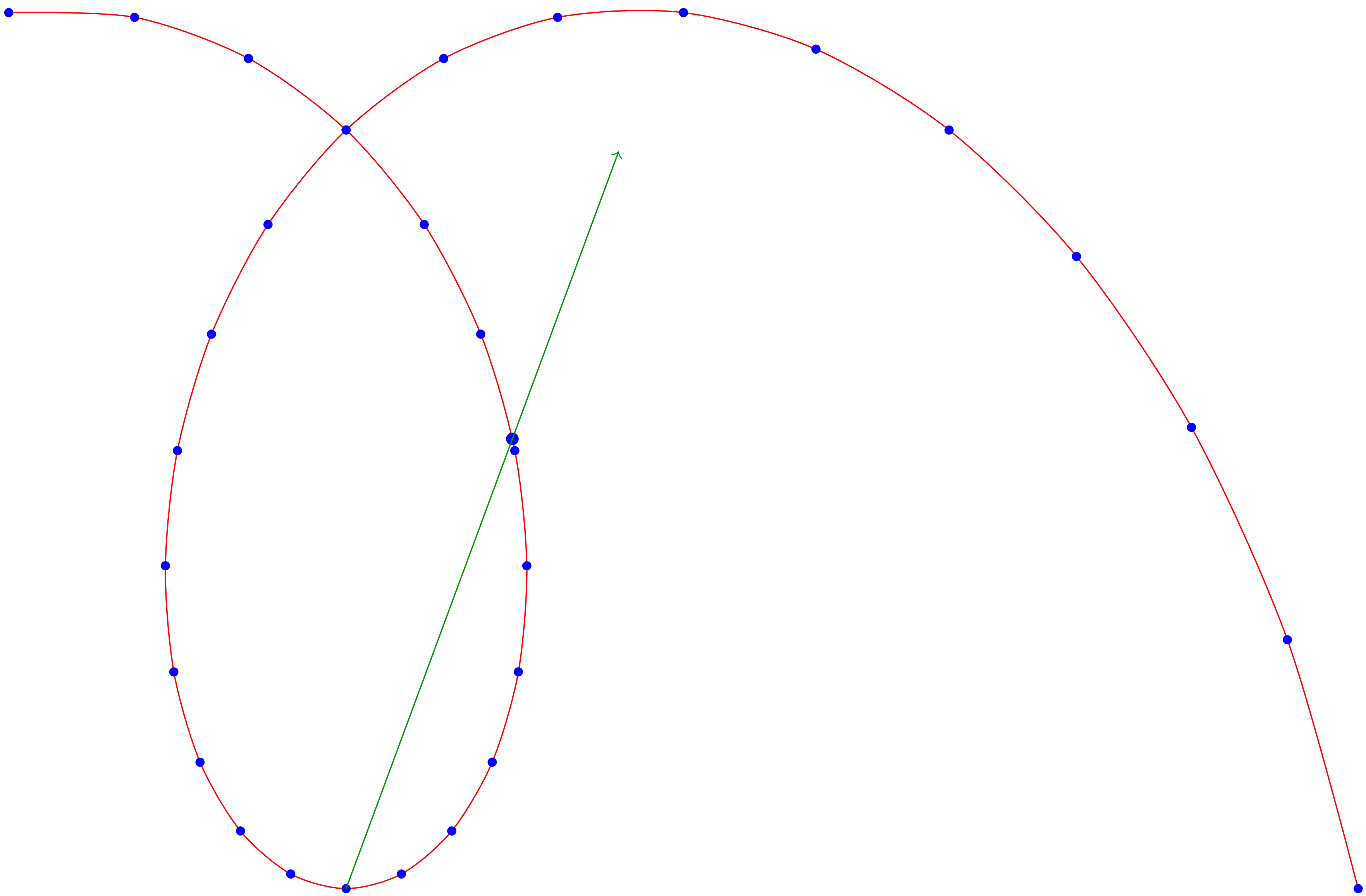
Der Tangentenvektor V



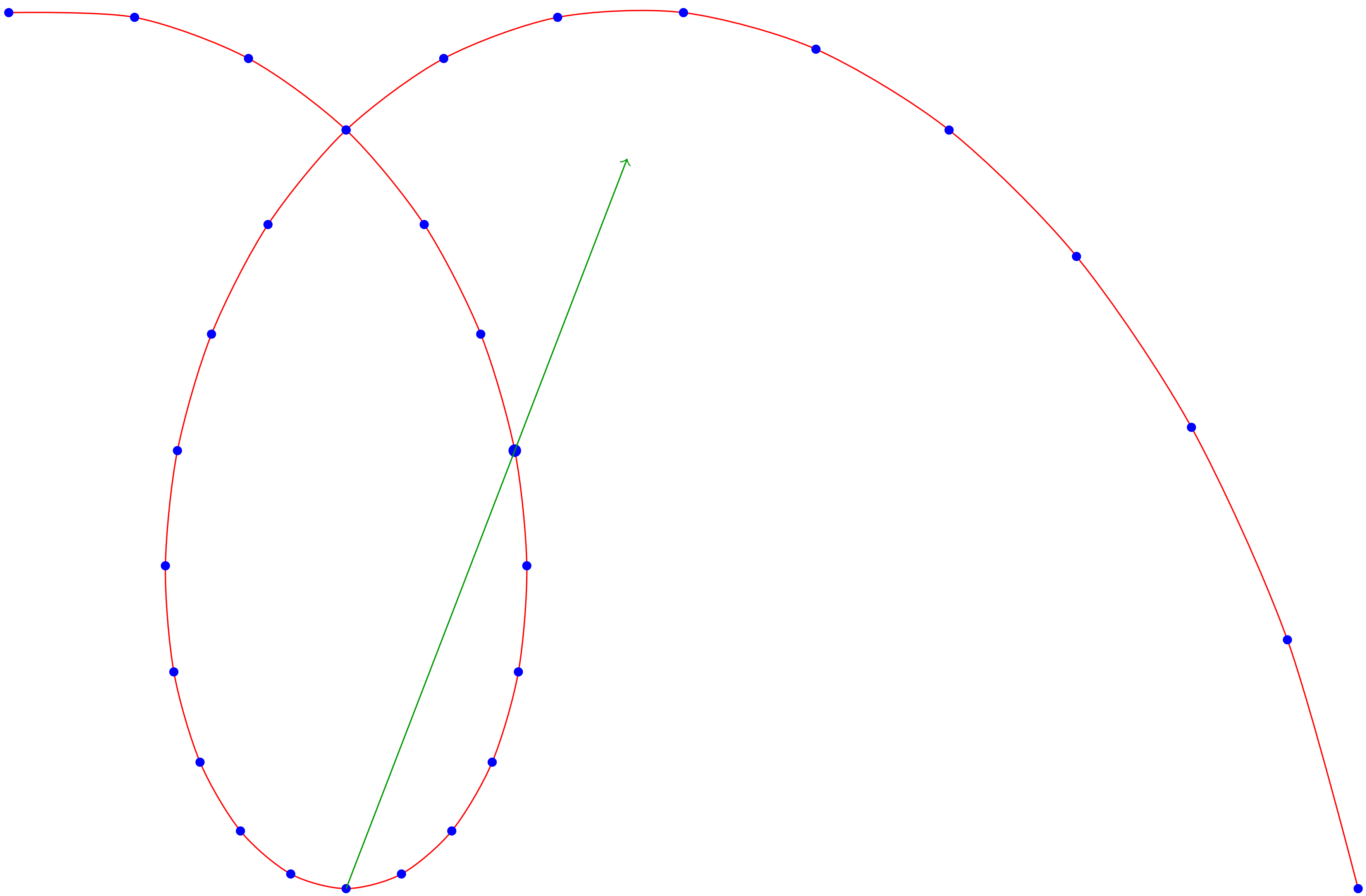
Der Tangentenvektor V



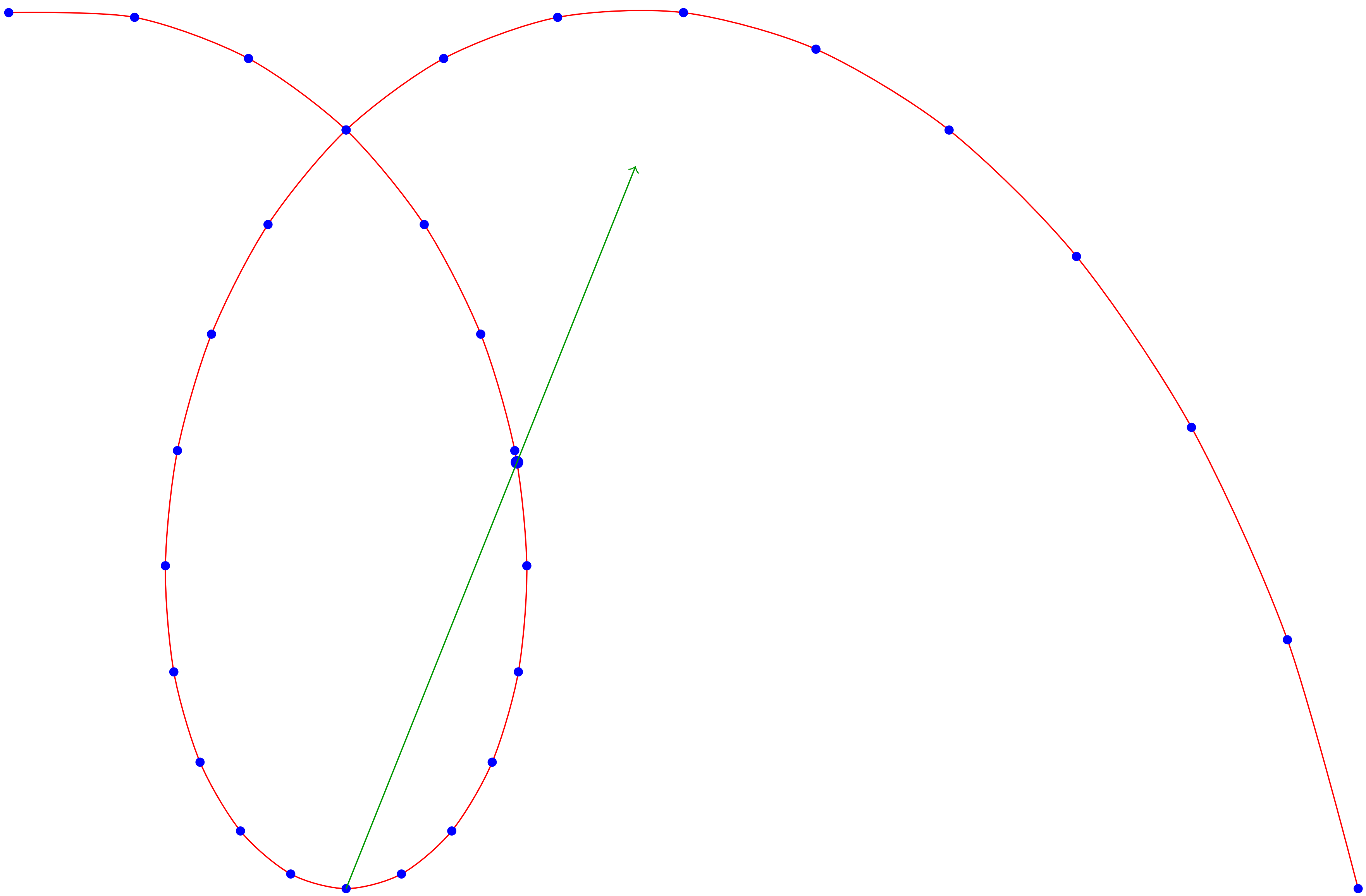
Der Tangentenvektor V



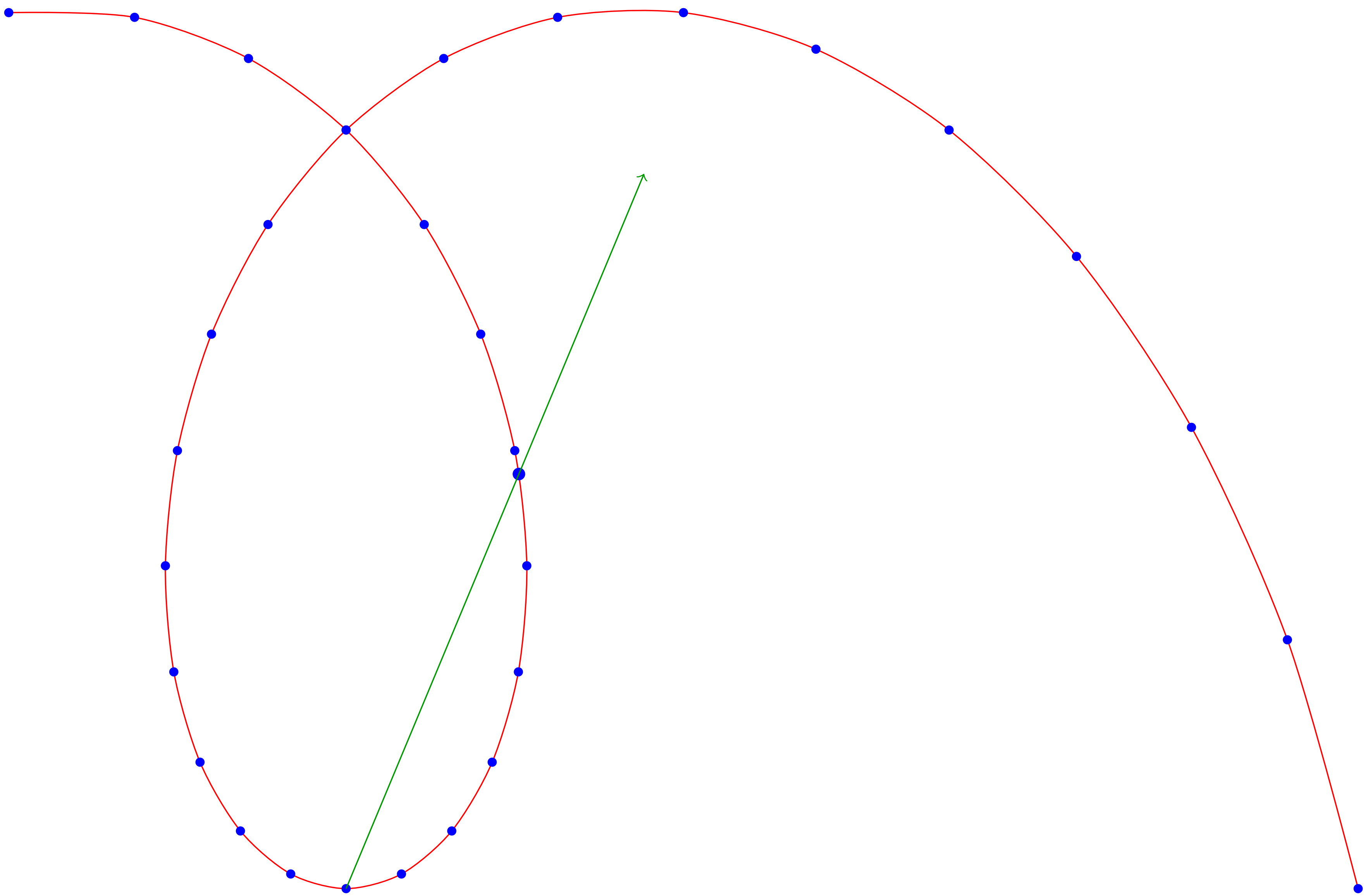
Der Tangentenvektor V



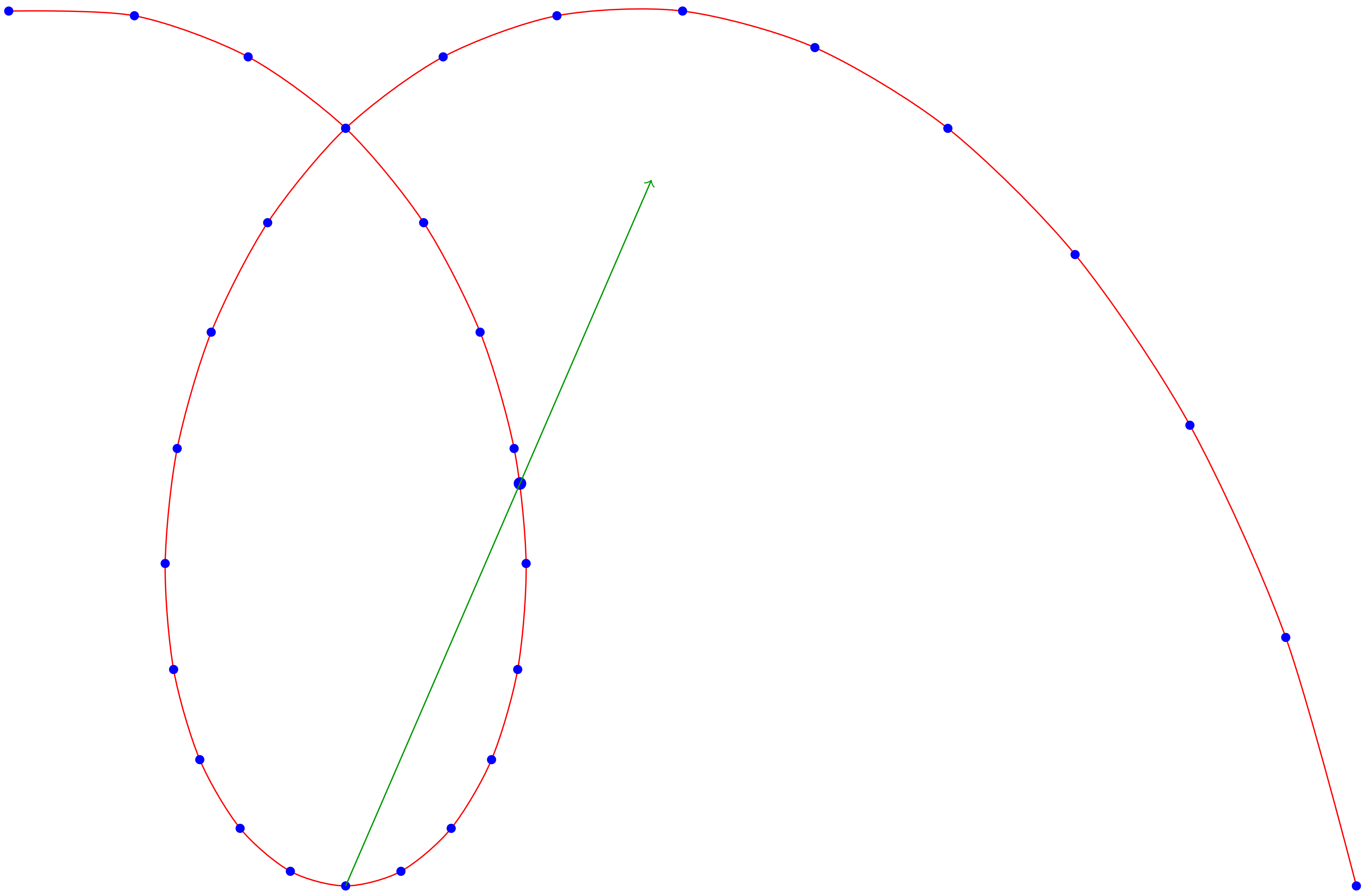
Der Tangentenvektor V



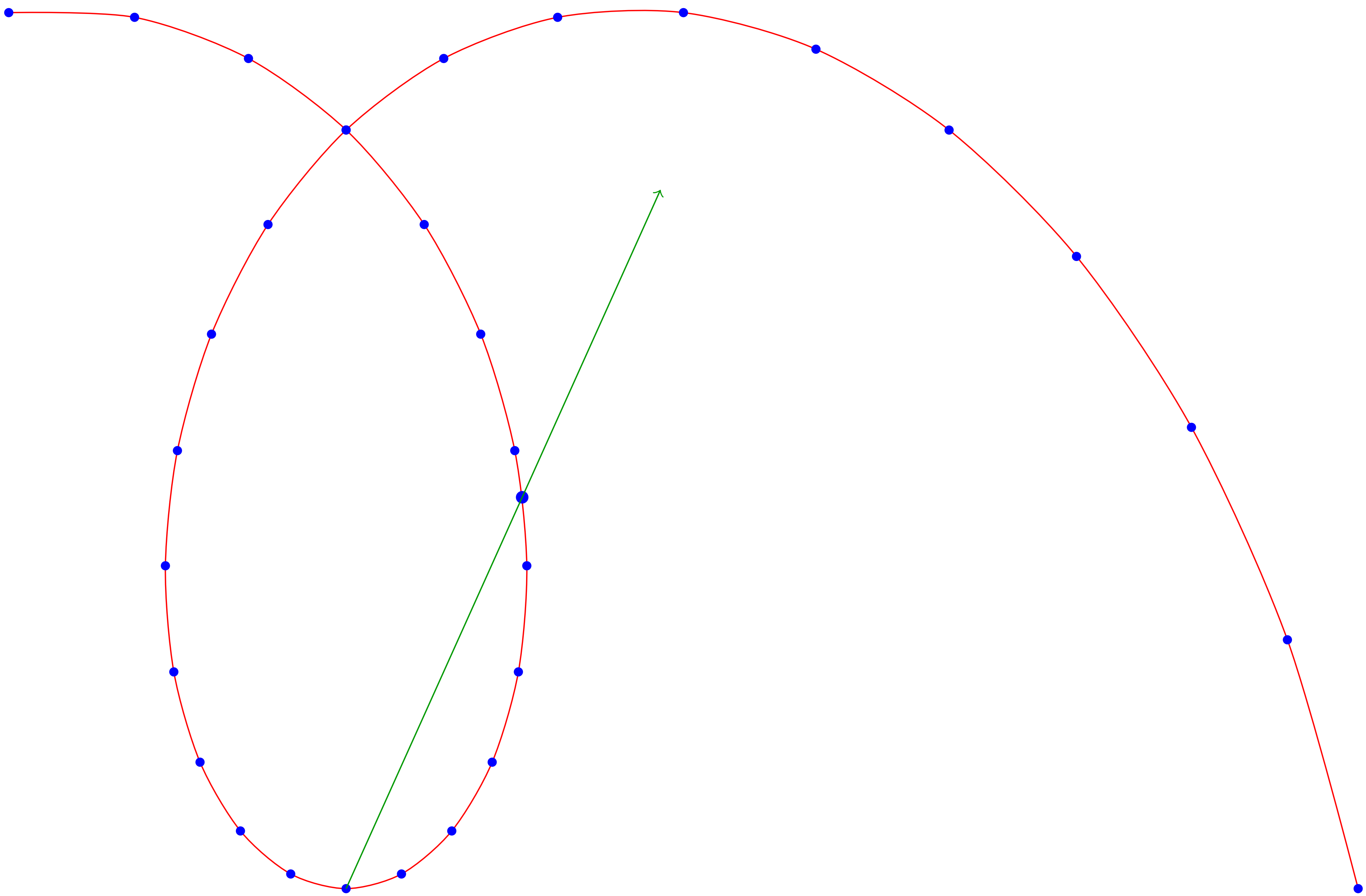
Der Tangentenvektor V



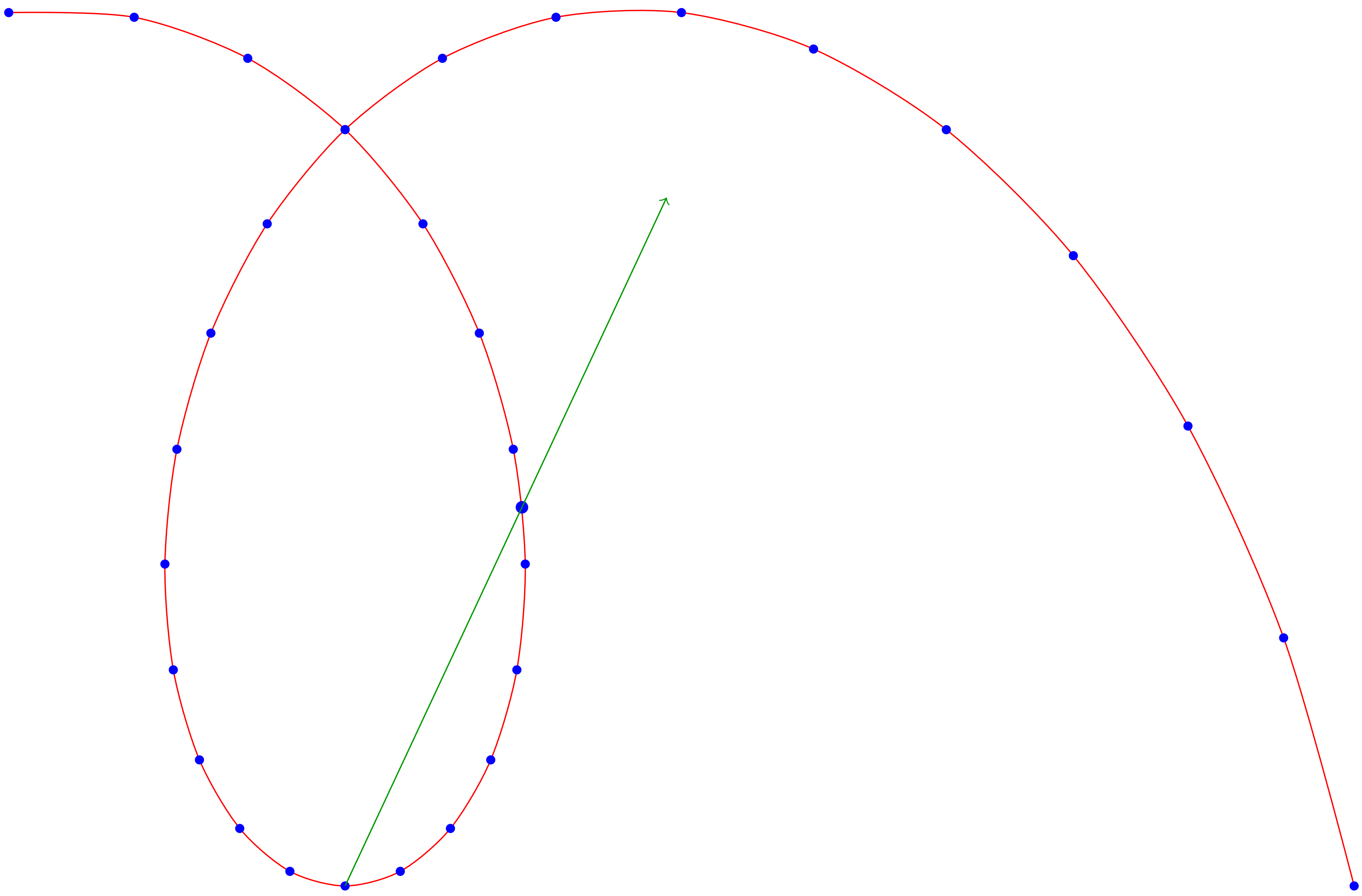
Der Tangentenvektor V



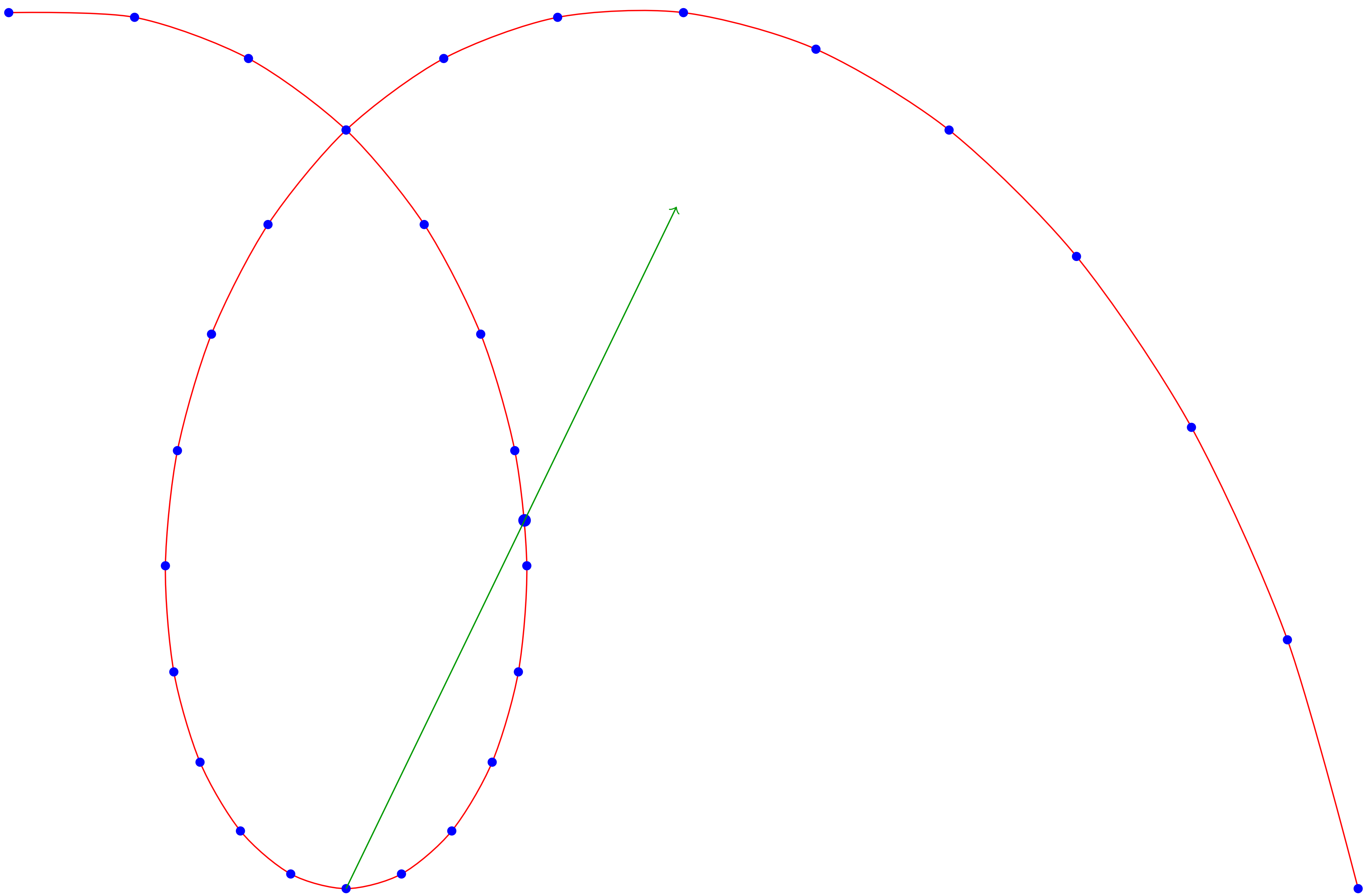
Der Tangentenvektor V



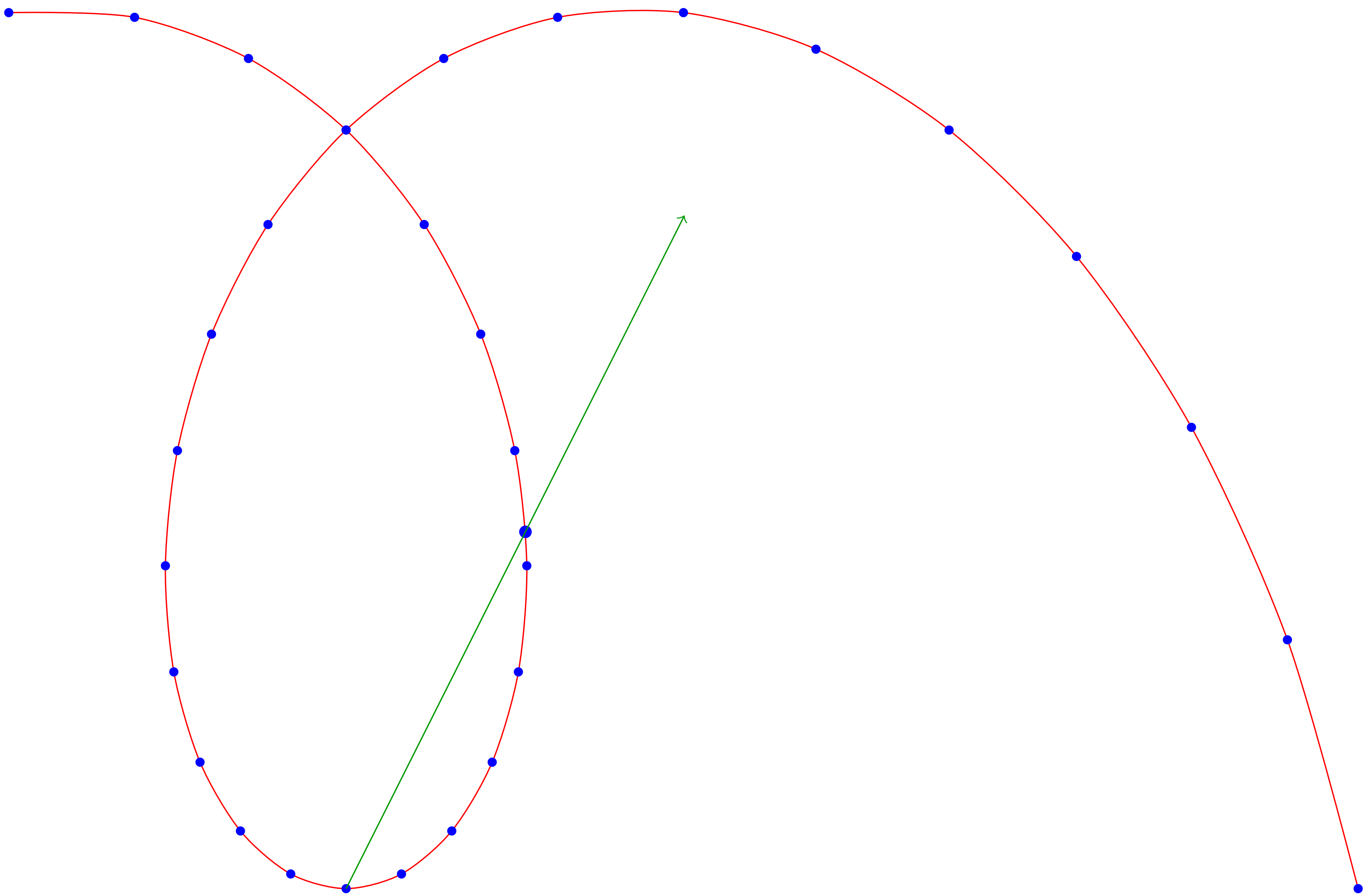
Der Tangentenvektor V



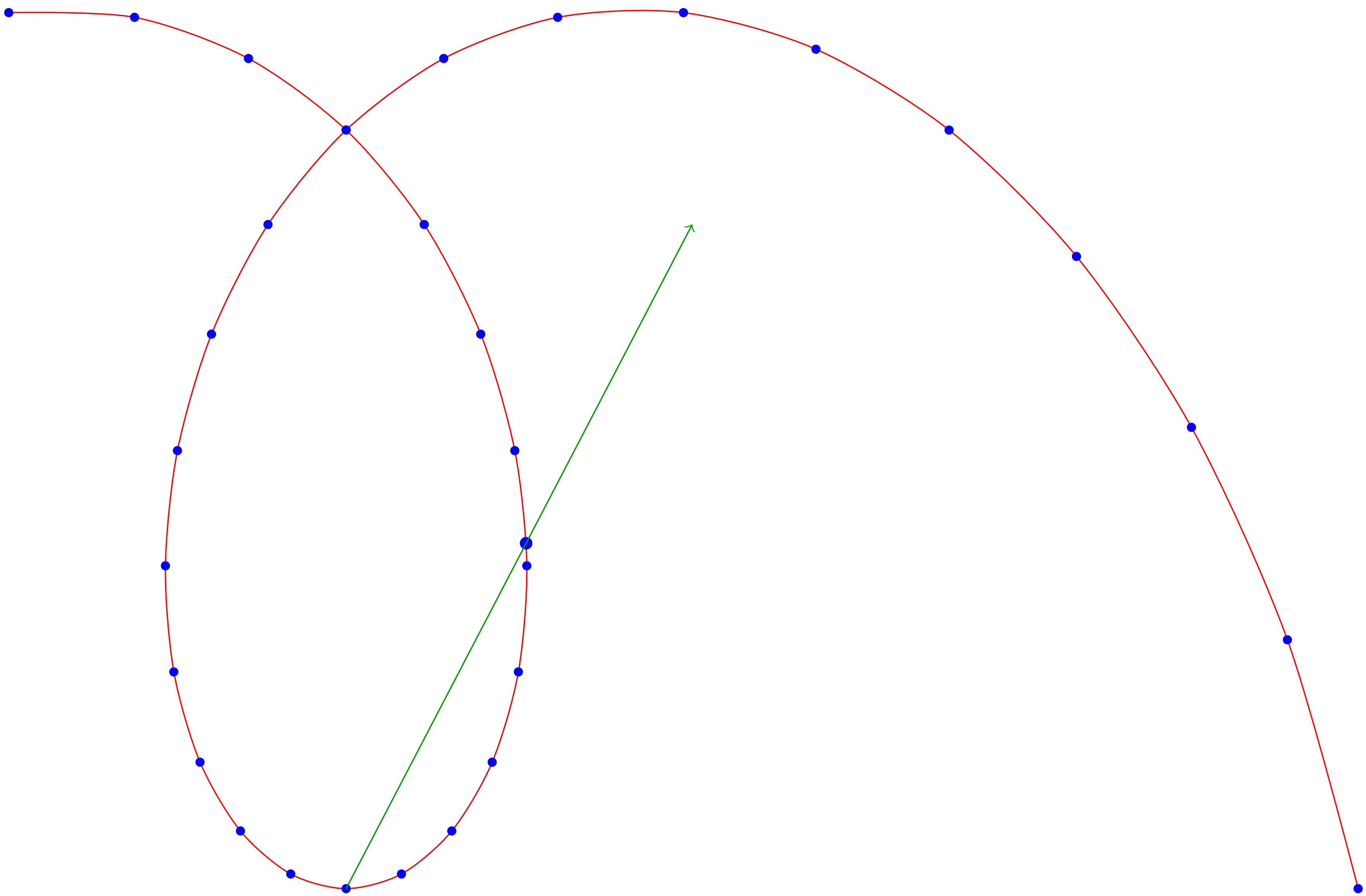
Der Tangentenvektor V



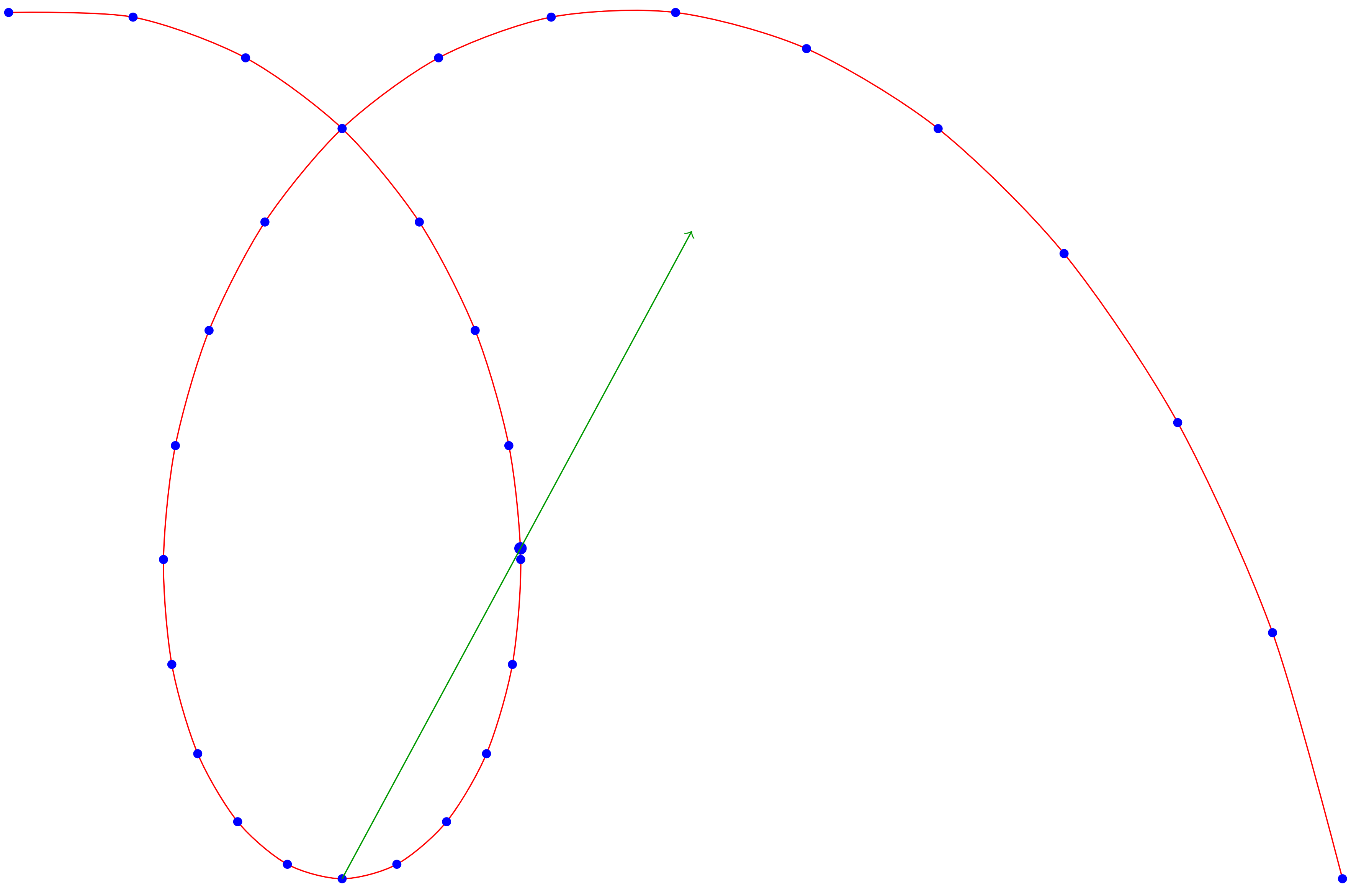
Der Tangentenvektor V



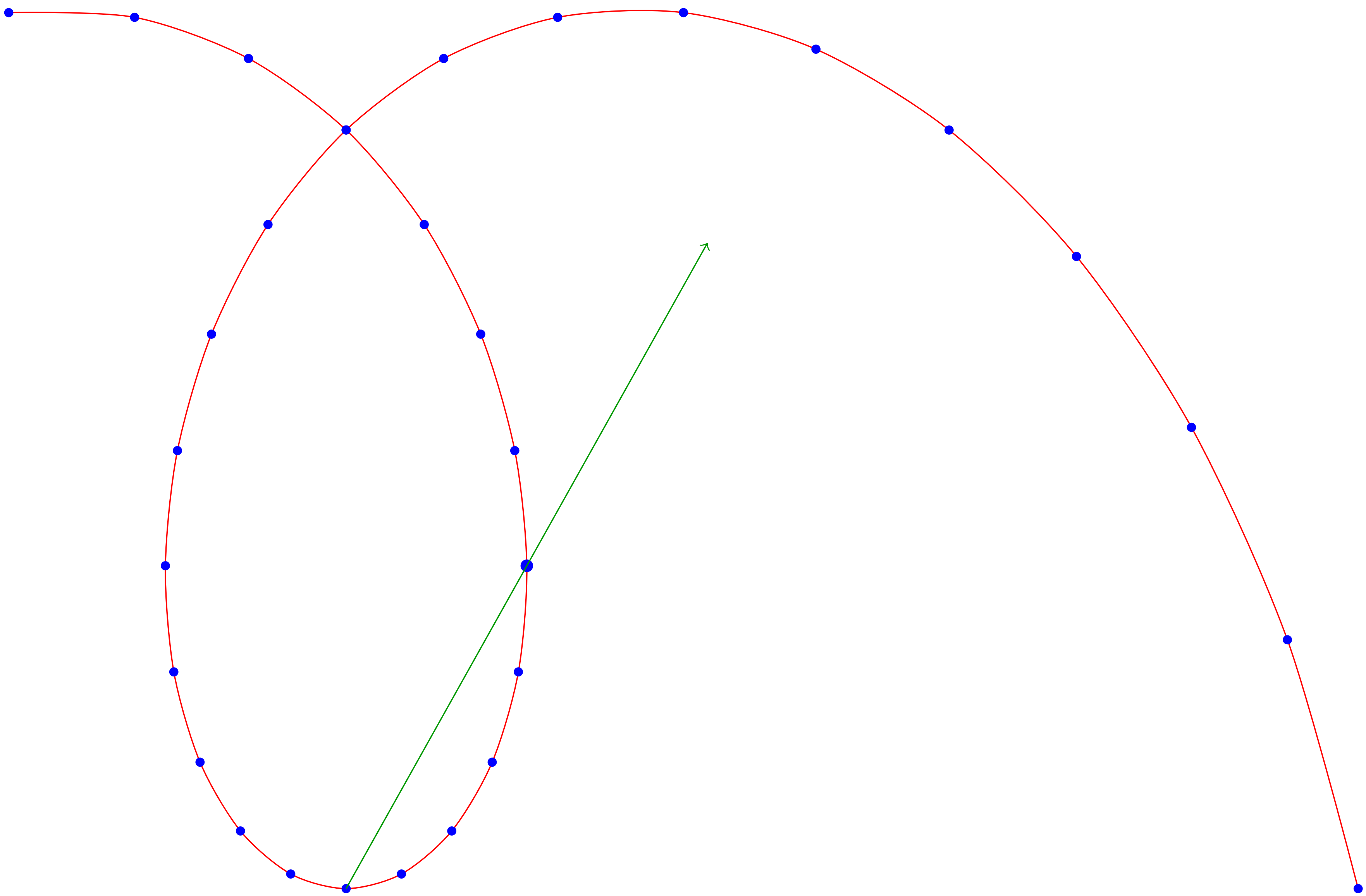
Der Tangentenvektor V



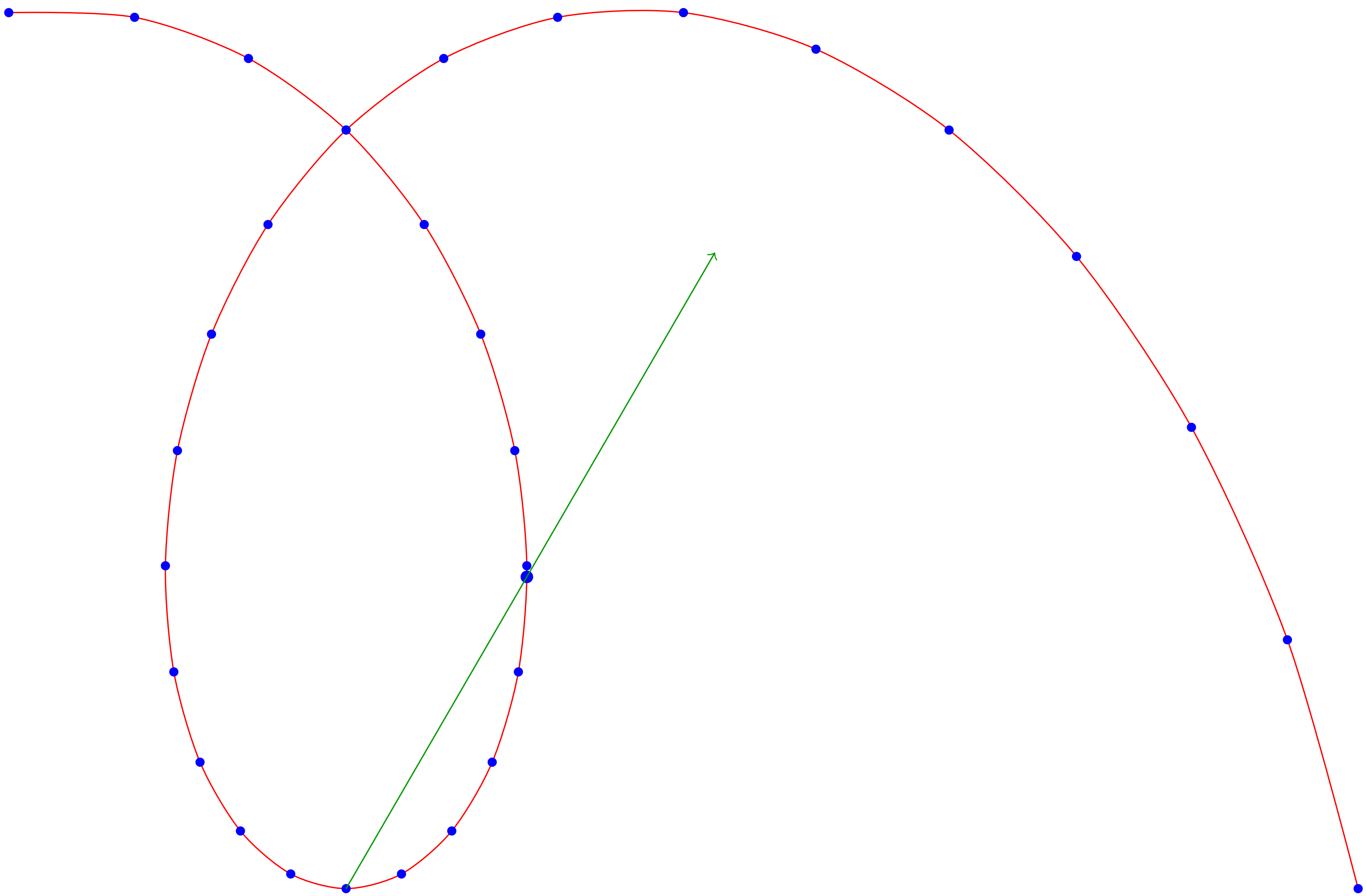
Der Tangentenvektor V



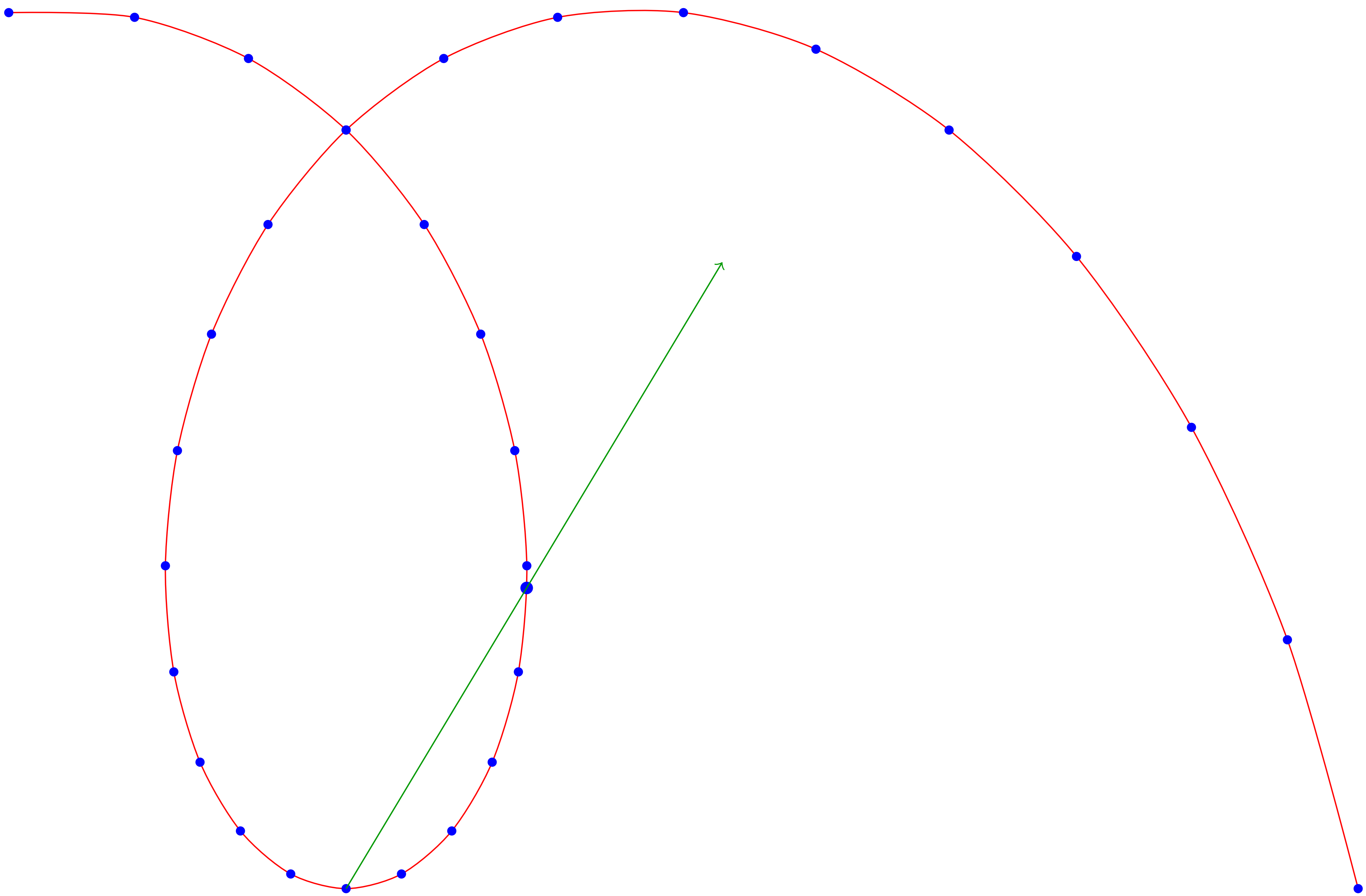
Der Tangentenvektor V



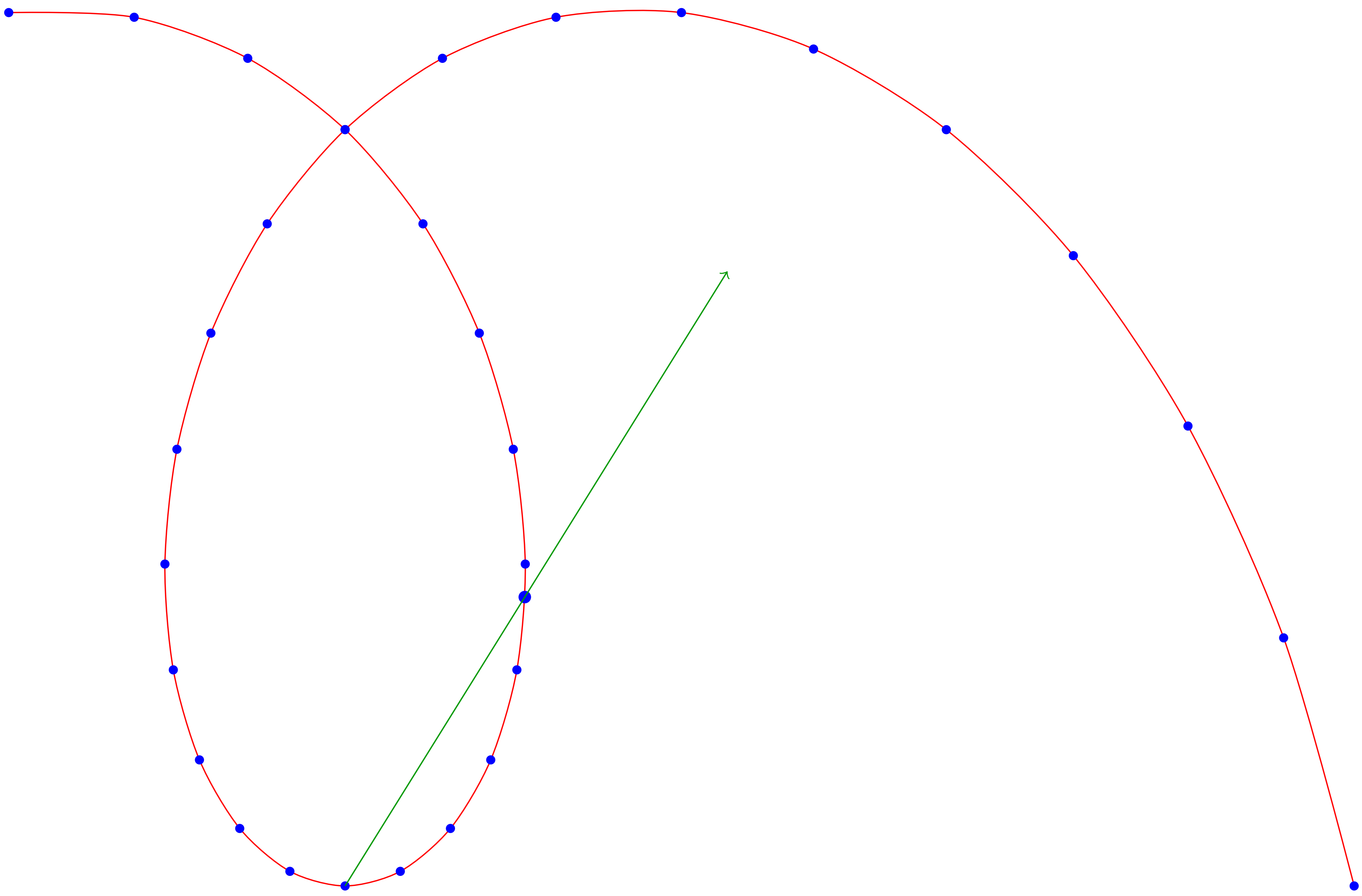
Der Tangentenvektor V



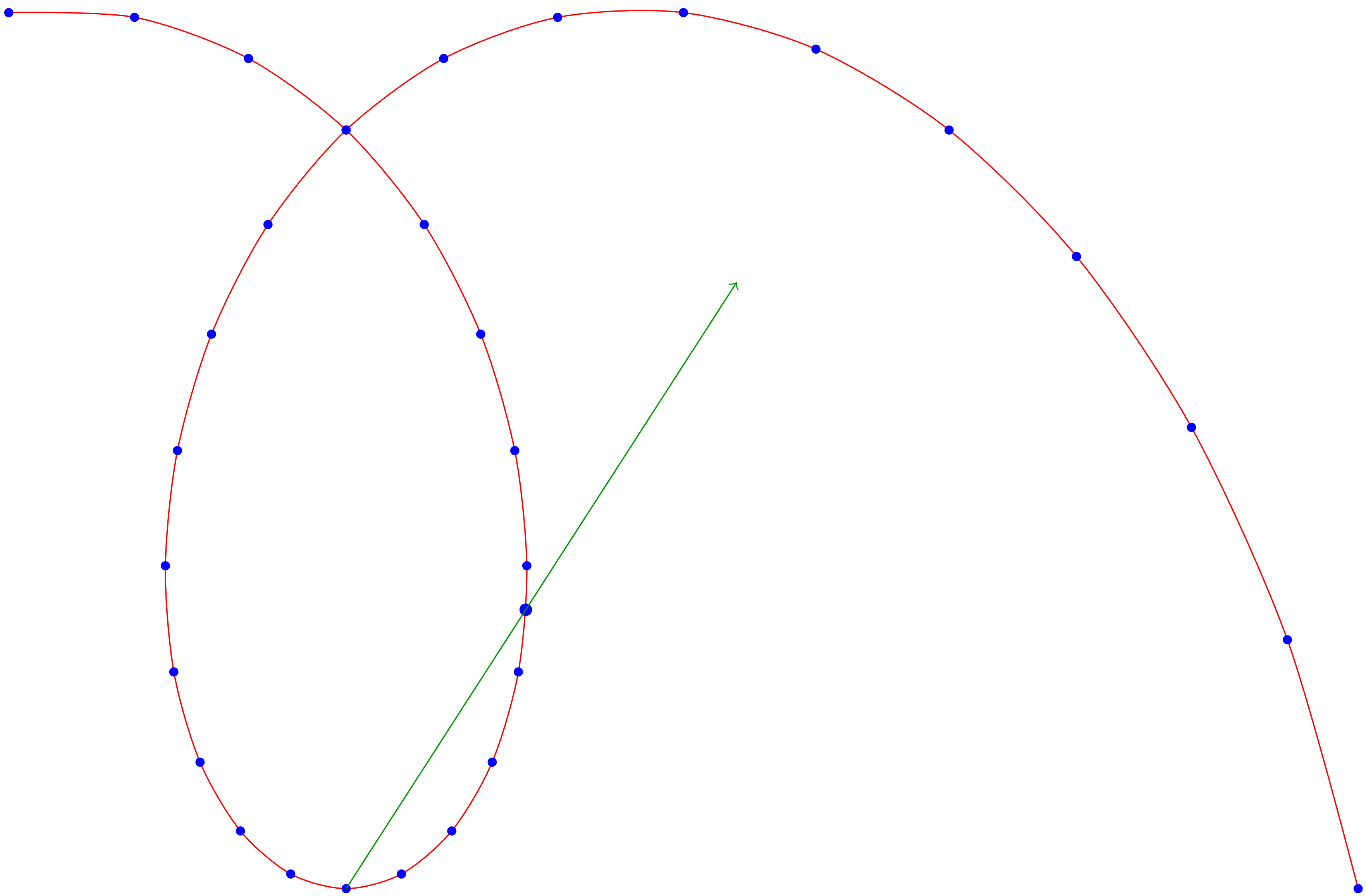
Der Tangentenvektor V



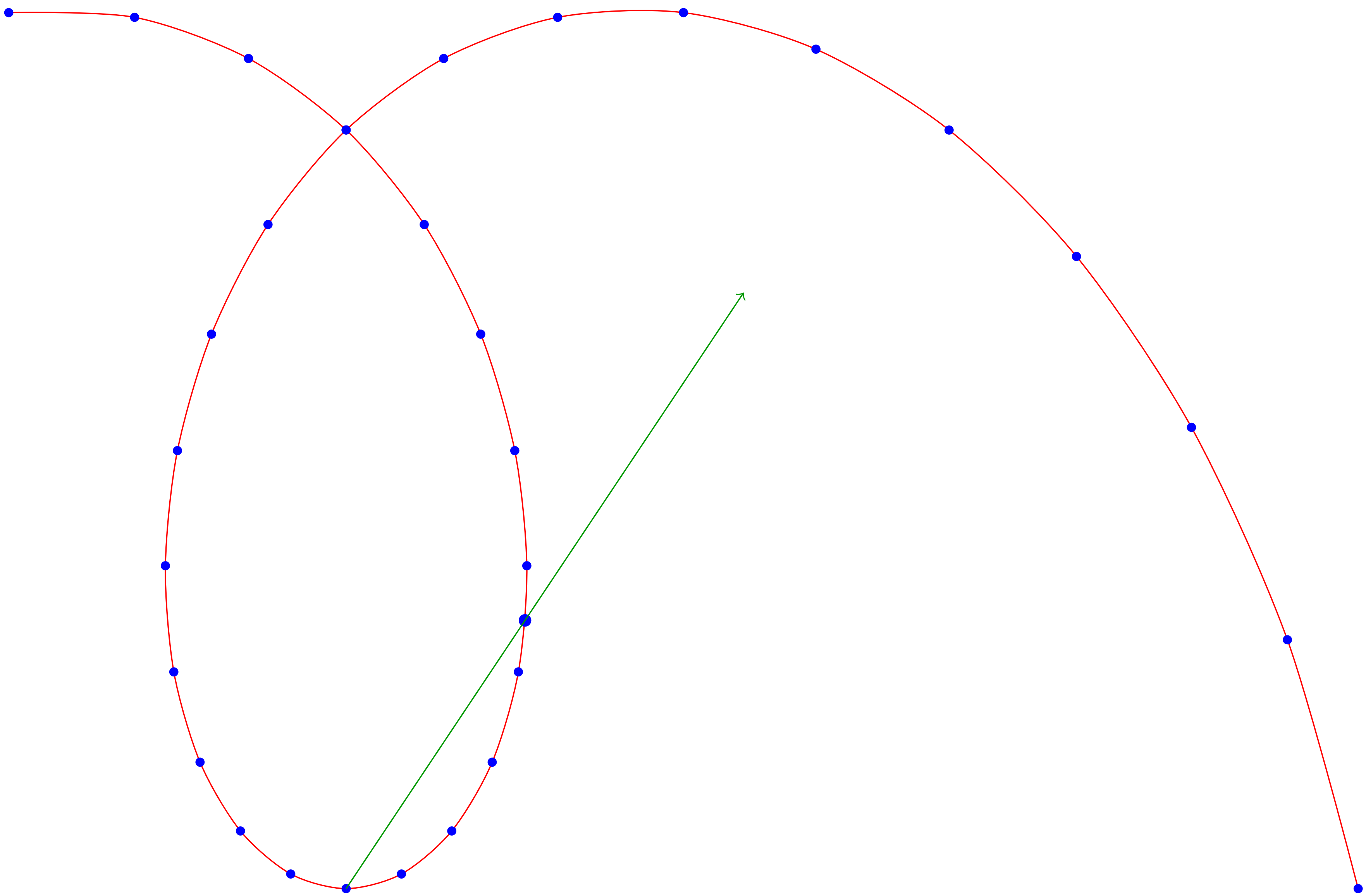
Der Tangentenvektor V



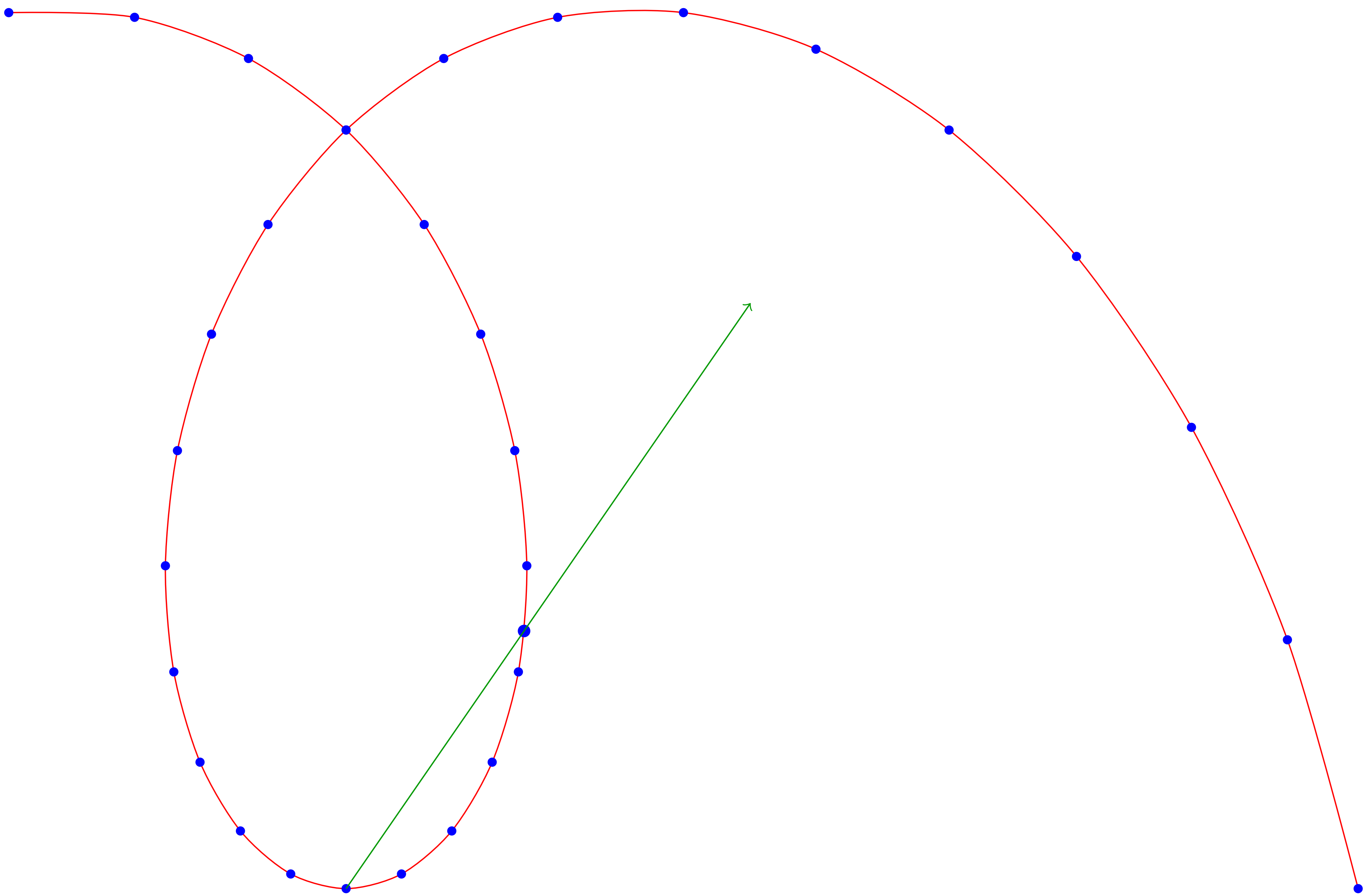
Der Tangentenvektor V



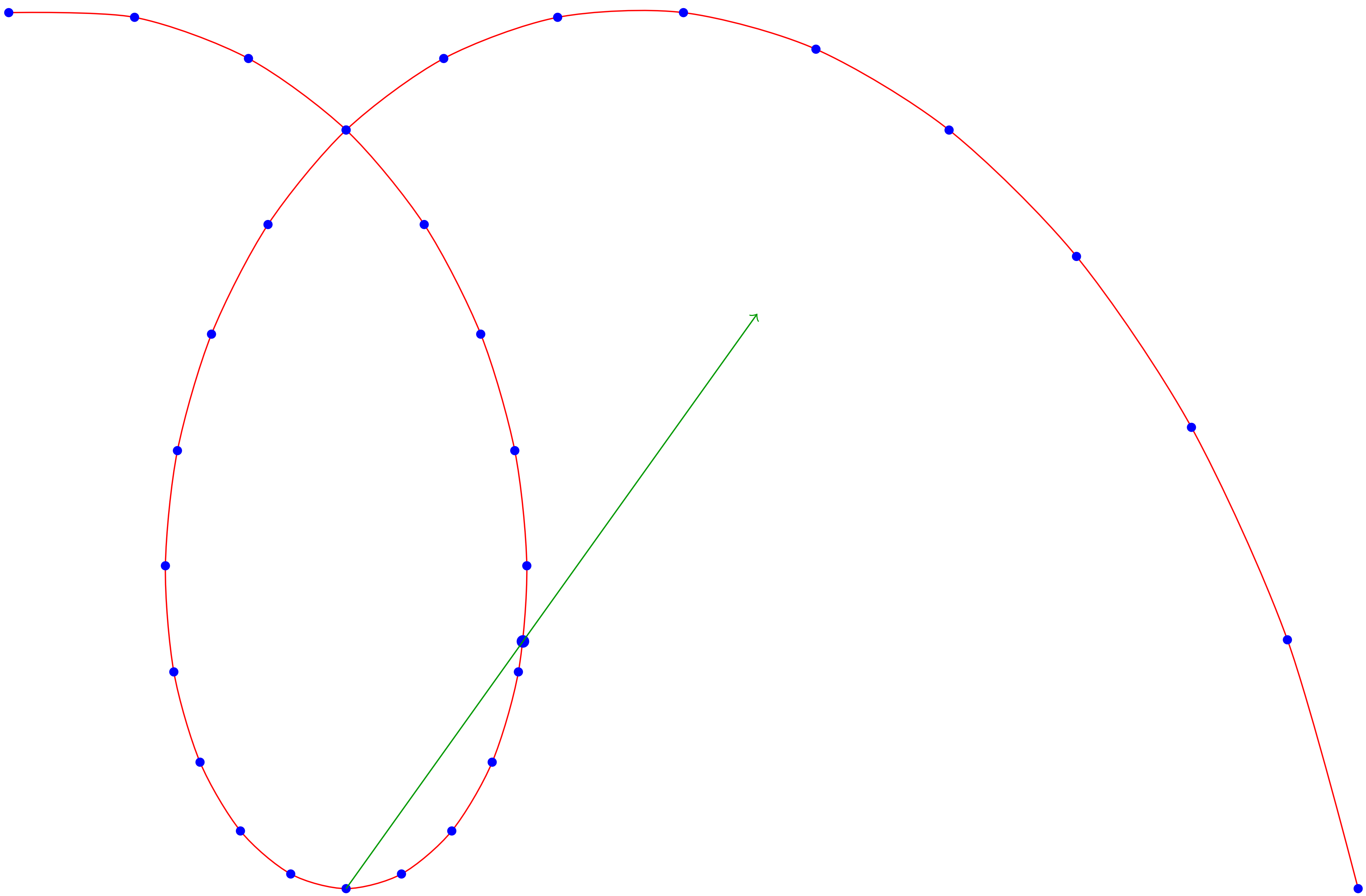
Der Tangentenvektor V



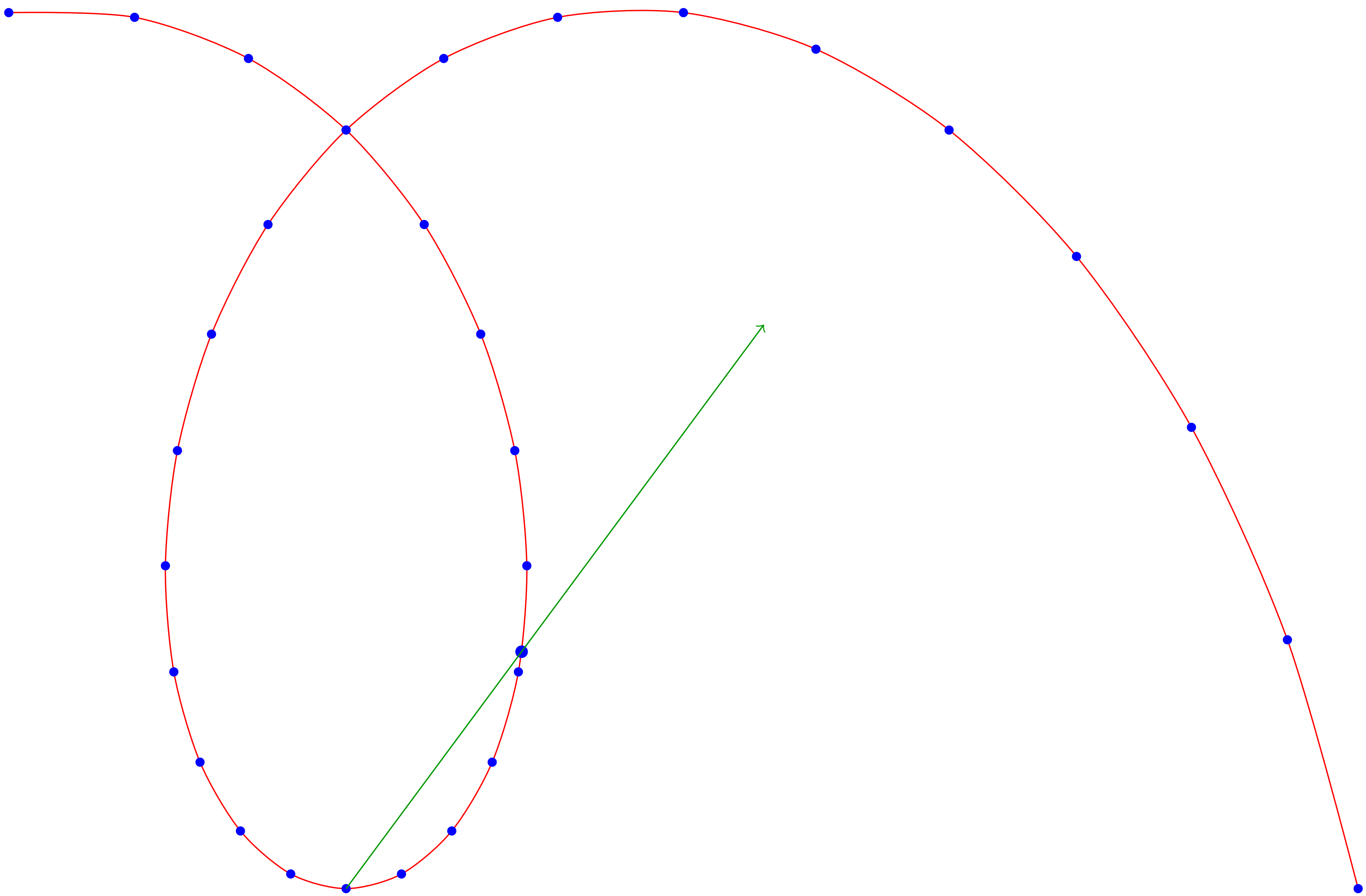
Der Tangentenvektor V



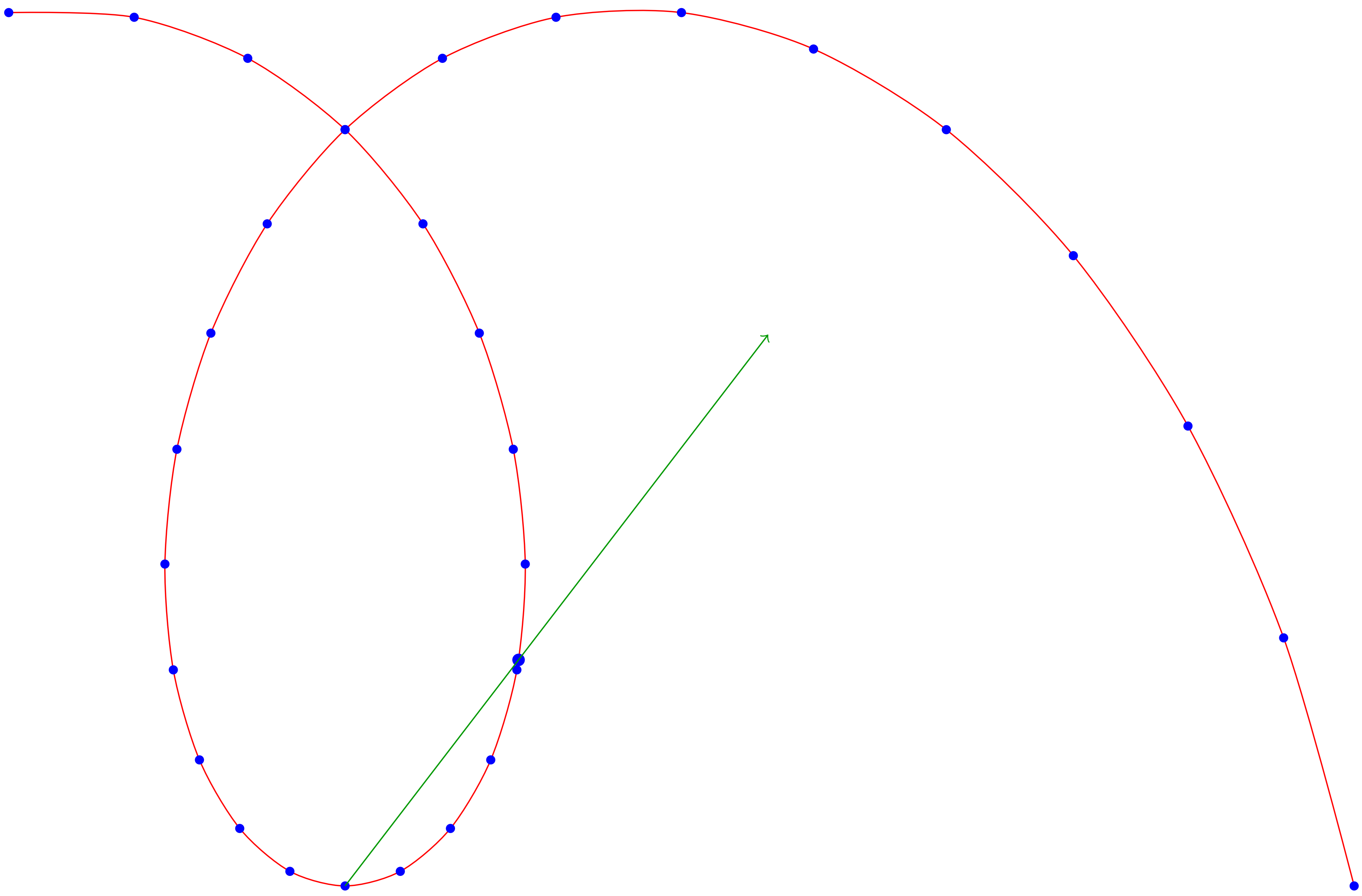
Der Tangentenvektor V



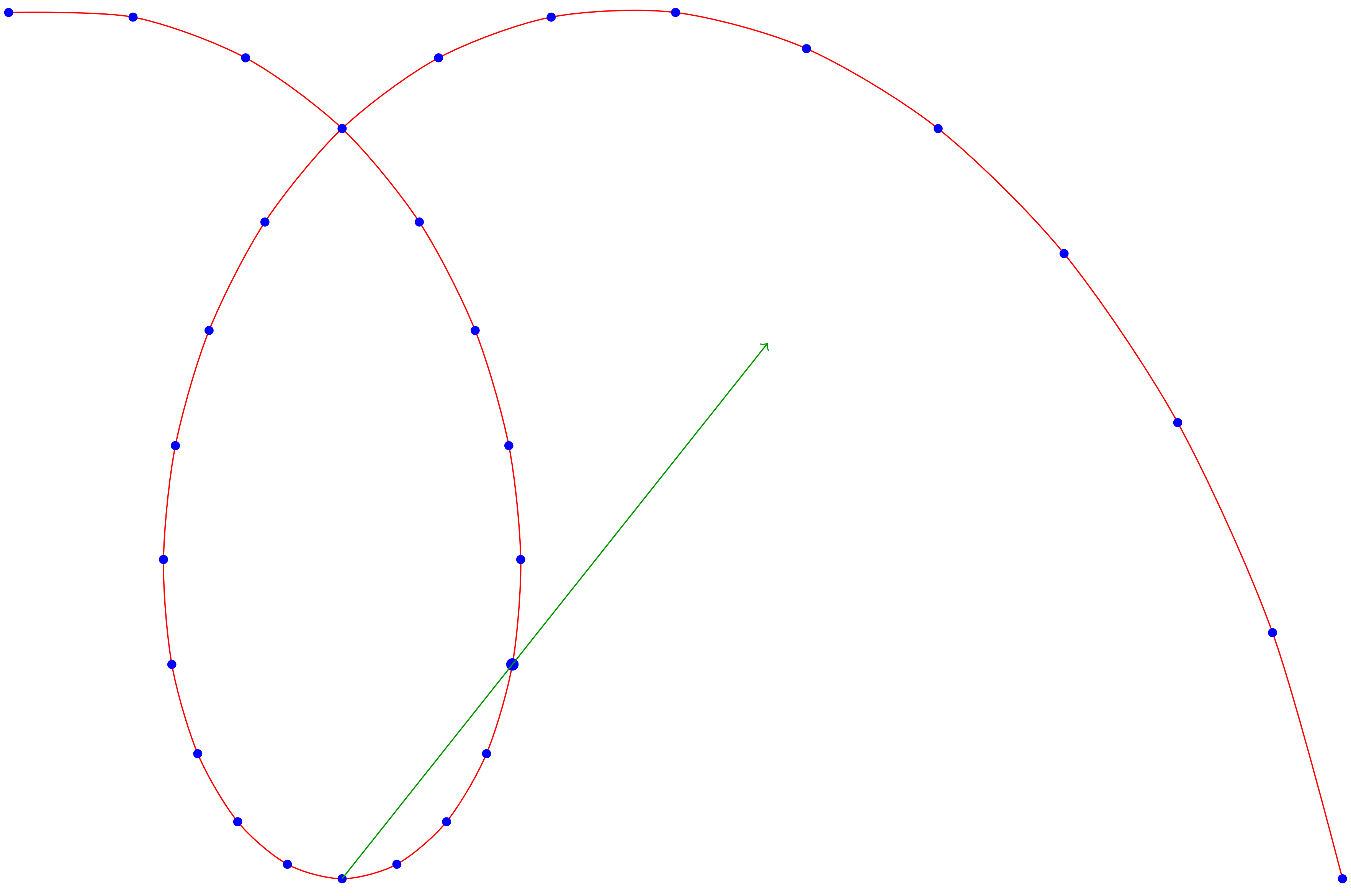
Der Tangentenvektor V



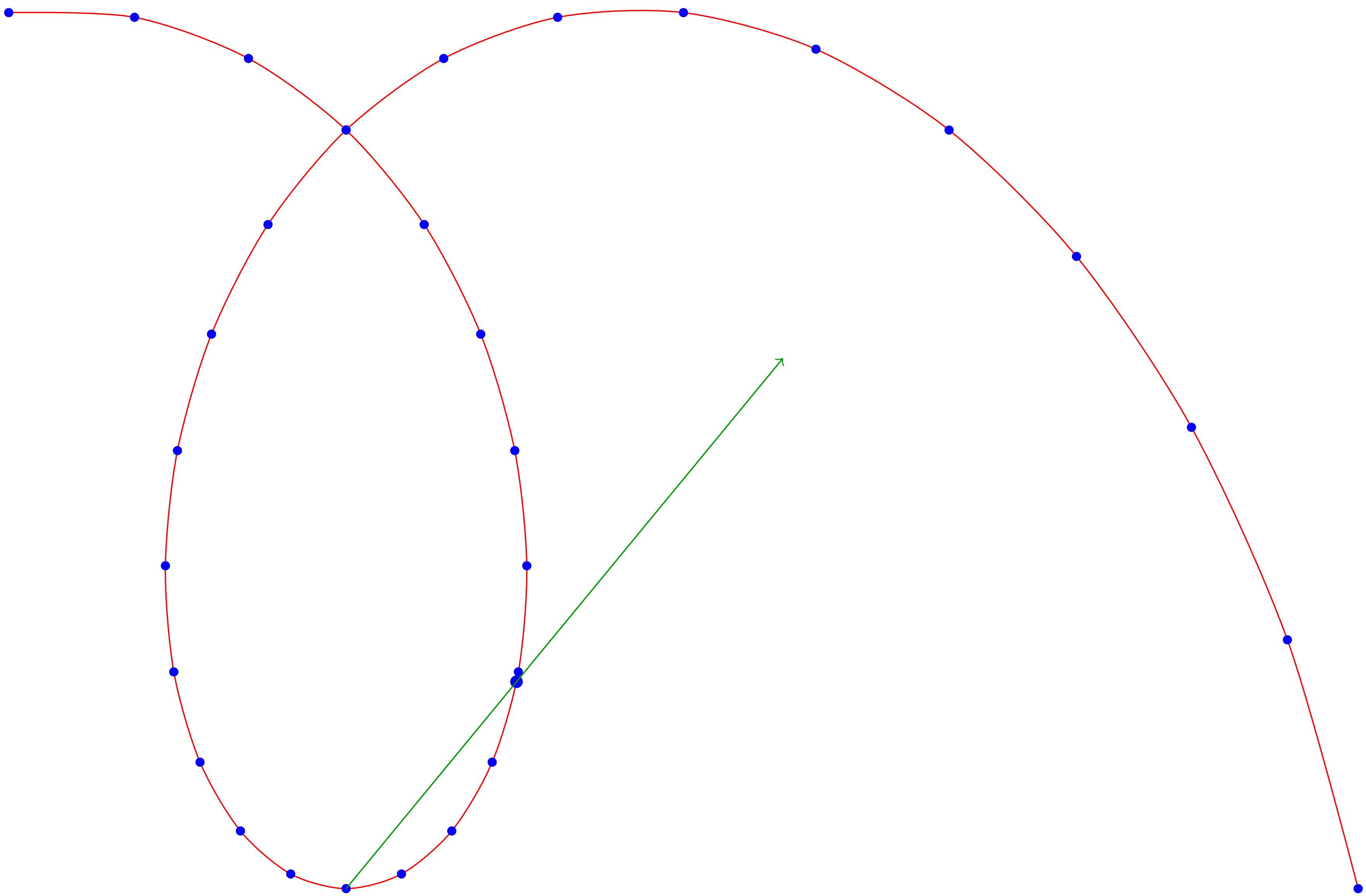
Der Tangentenvektor V



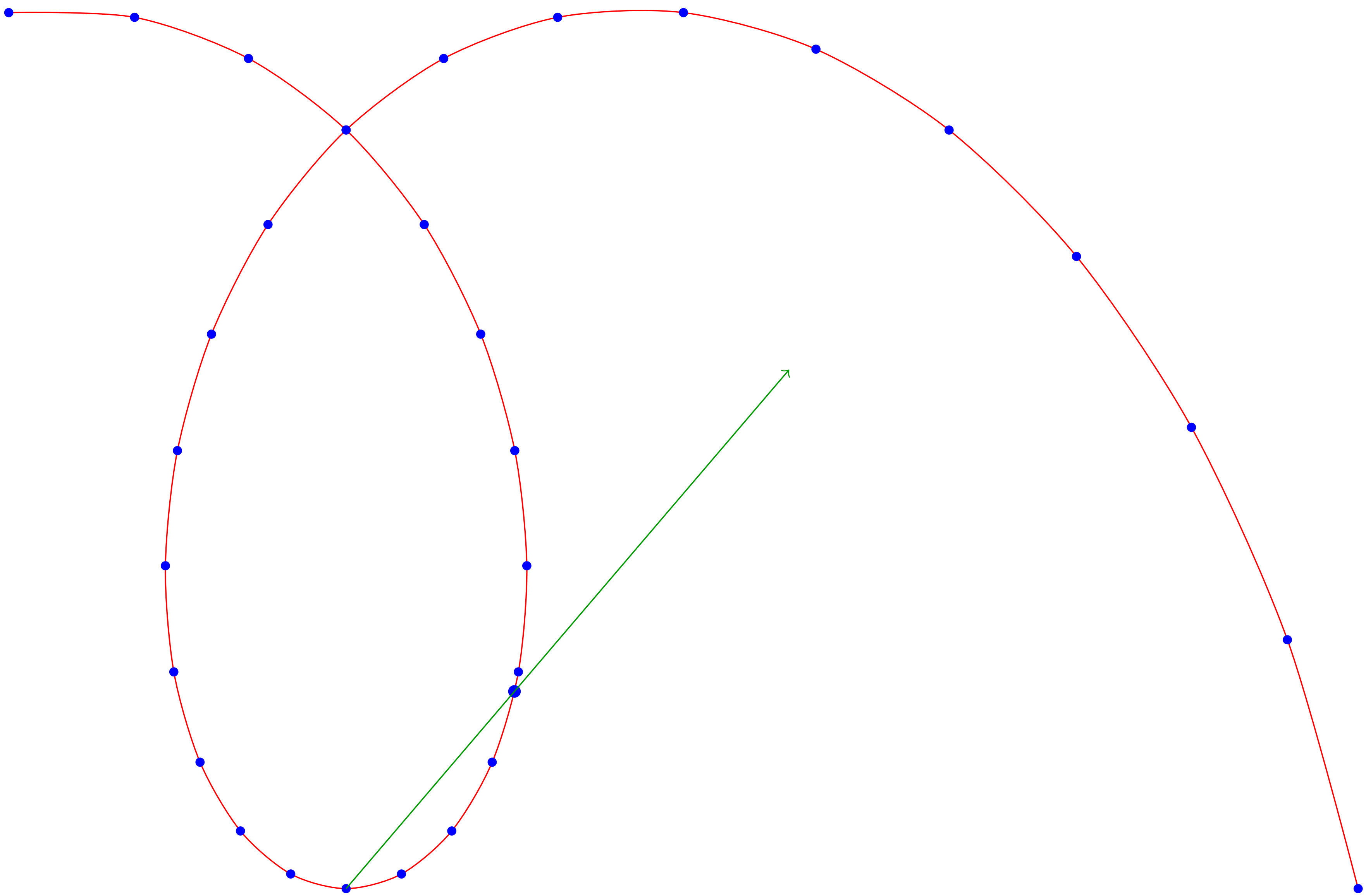
Der Tangentenvektor V



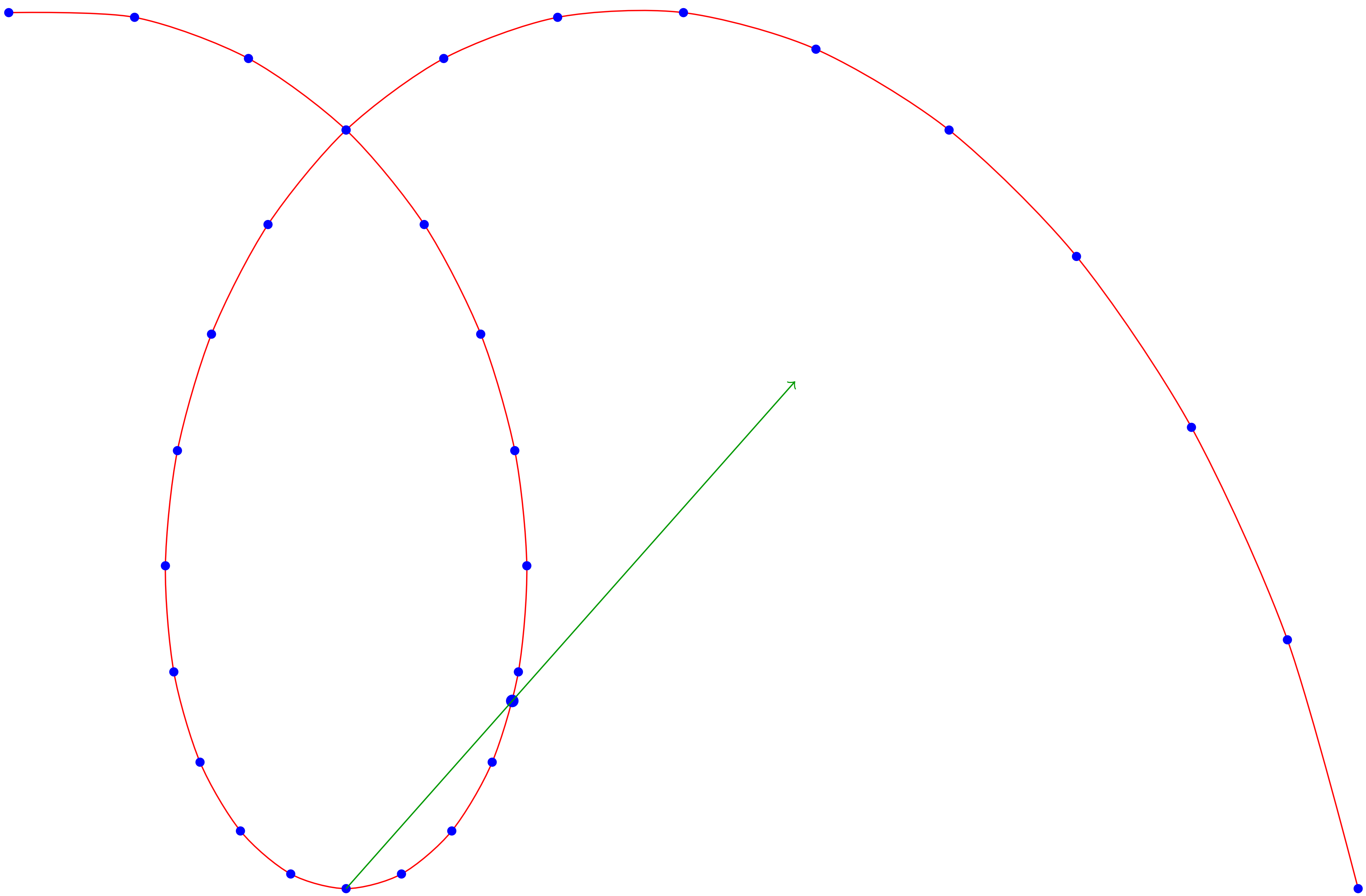
Der Tangentenvektor V



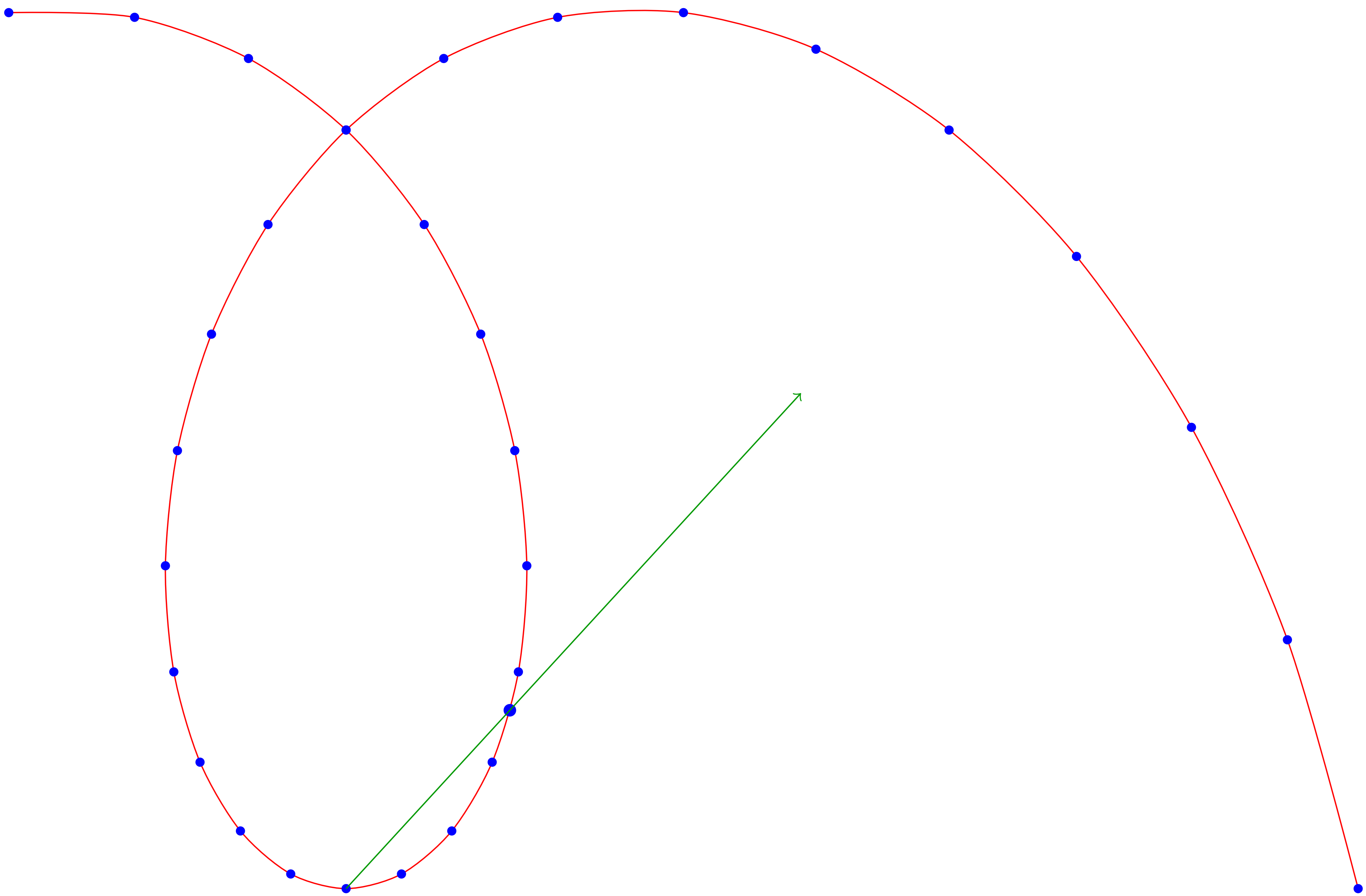
Der Tangentenvektor V



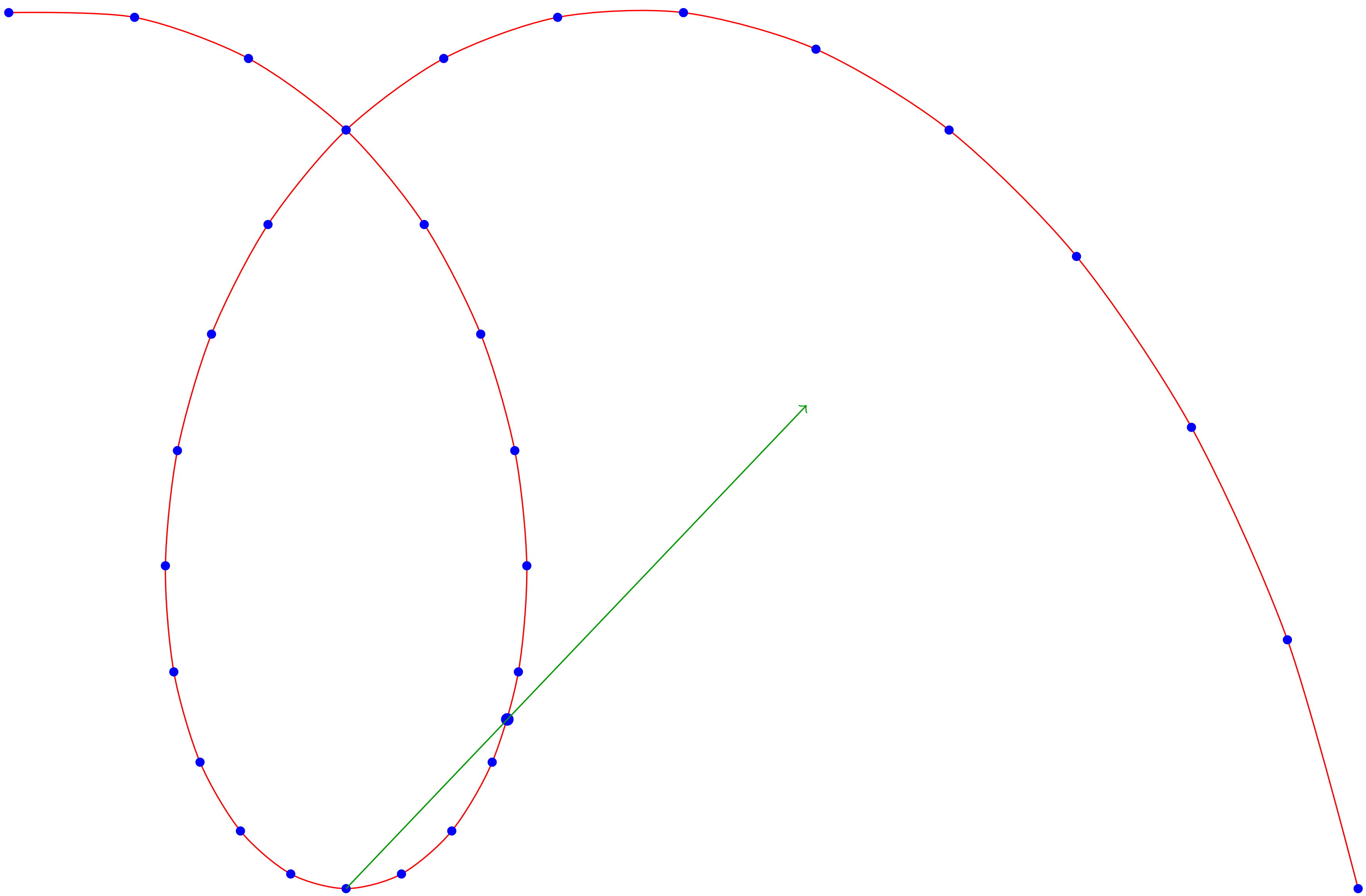
Der Tangentenvektor V



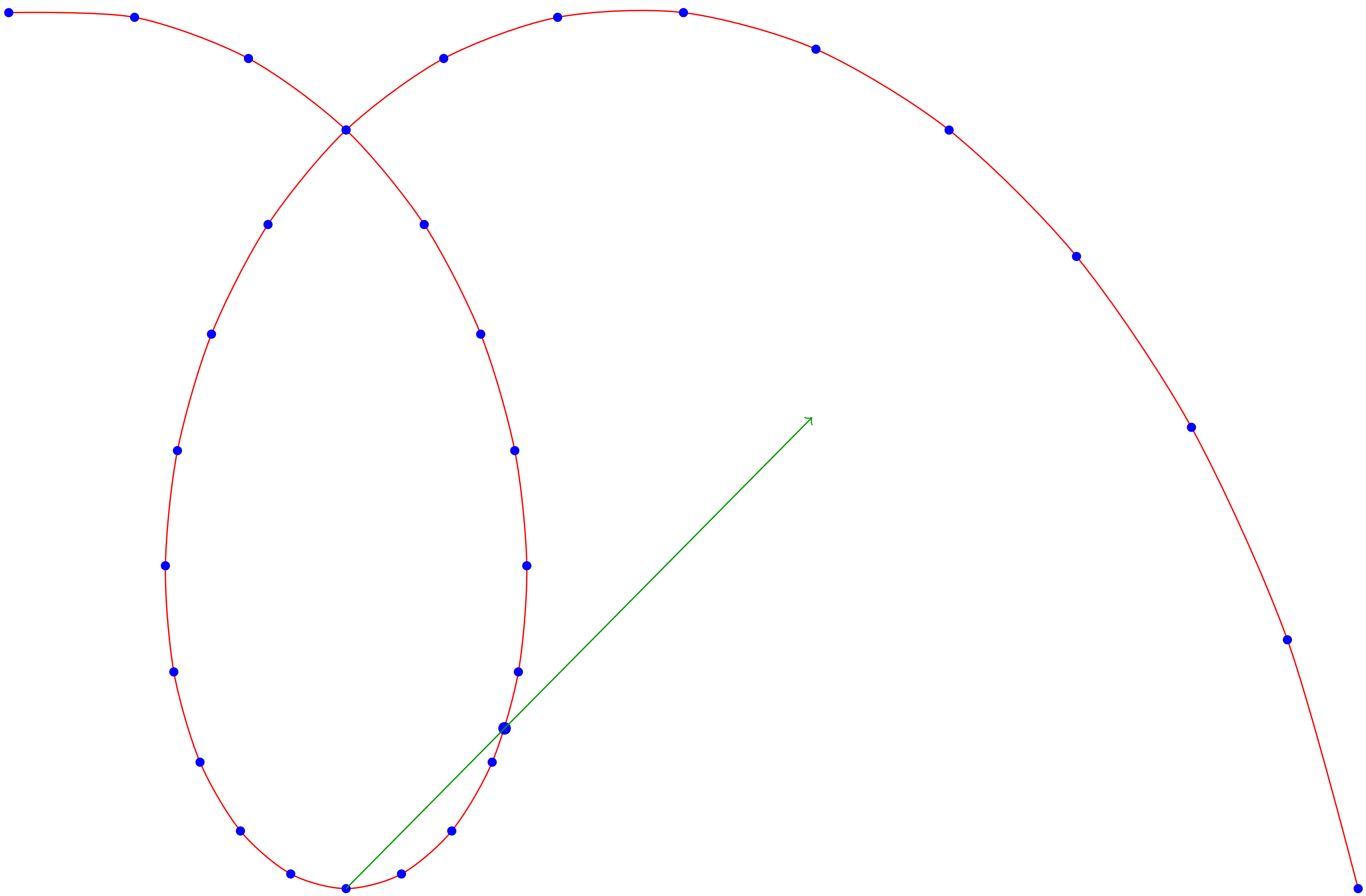
Der Tangentenvektor V



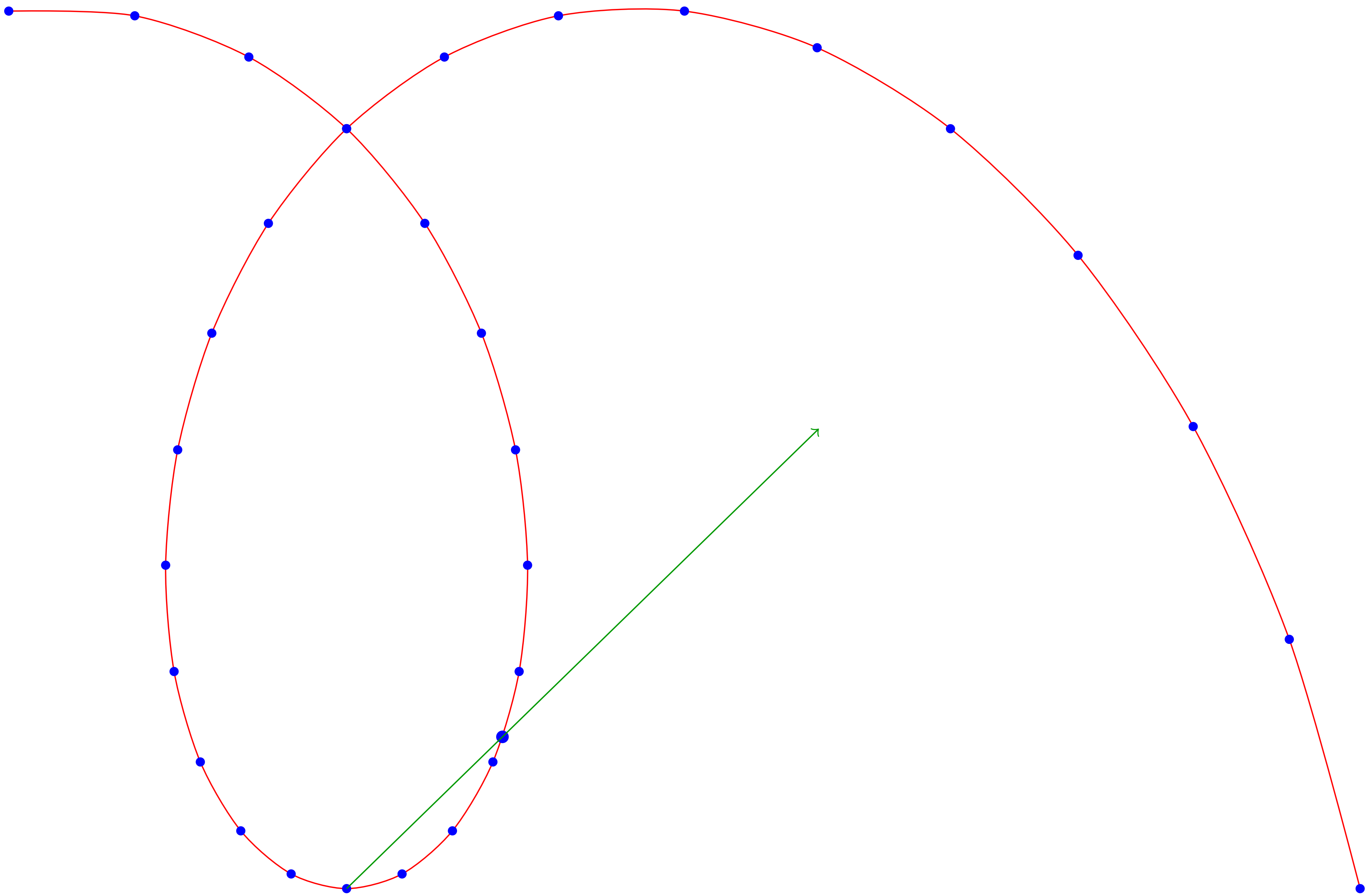
Der Tangentenvektor V



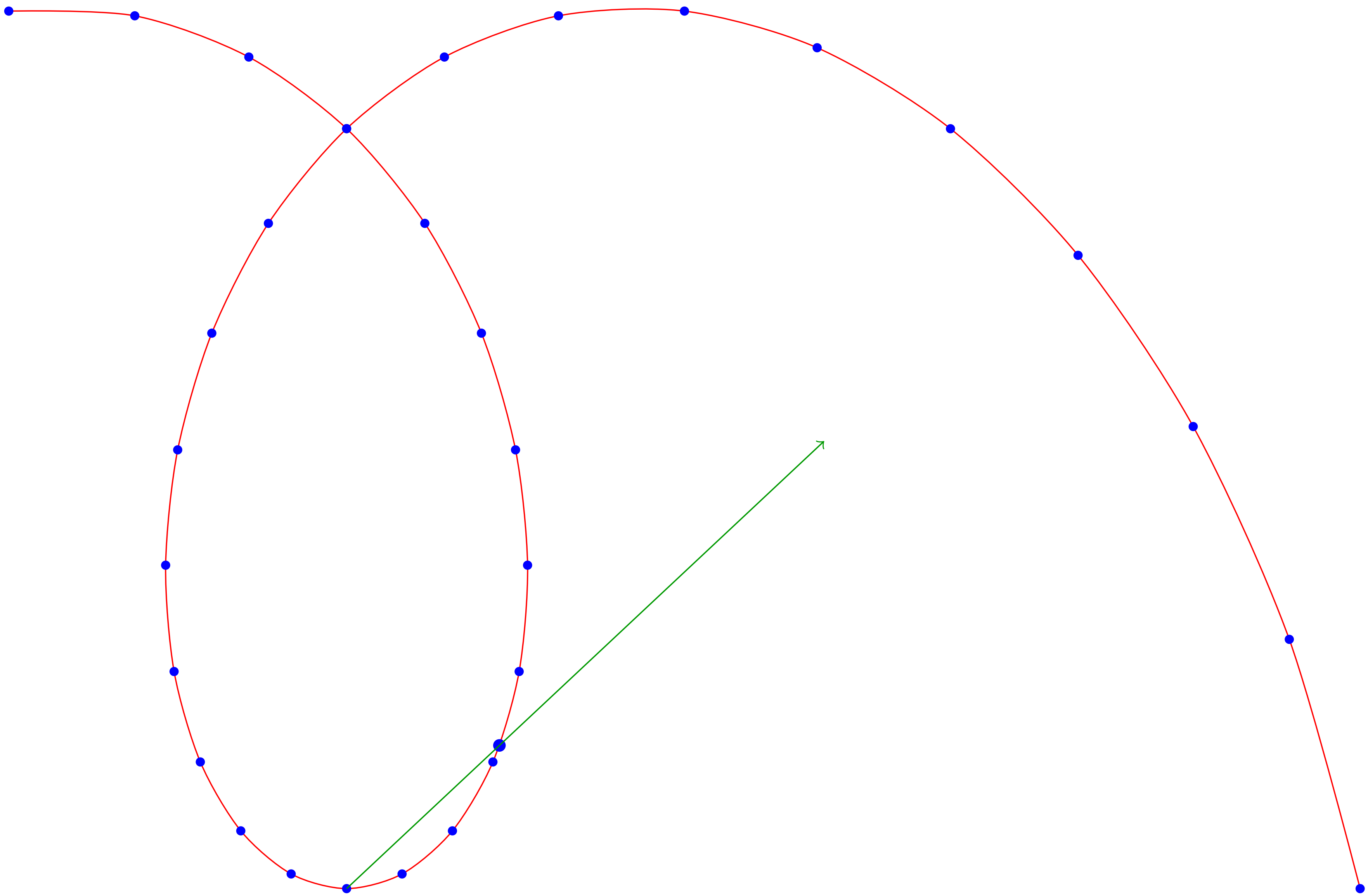
Der Tangentenvektor V



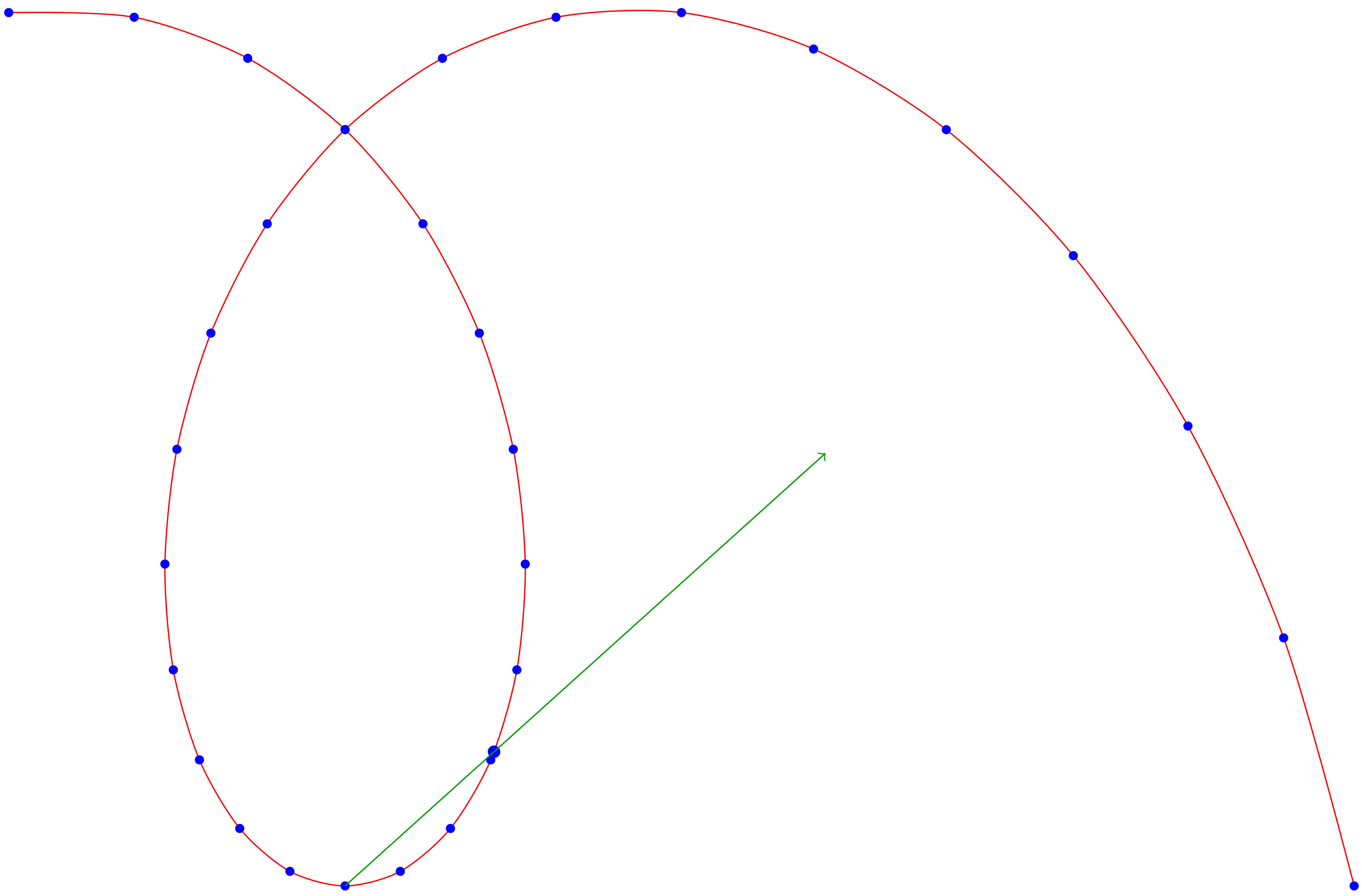
Der Tangentenvektor V



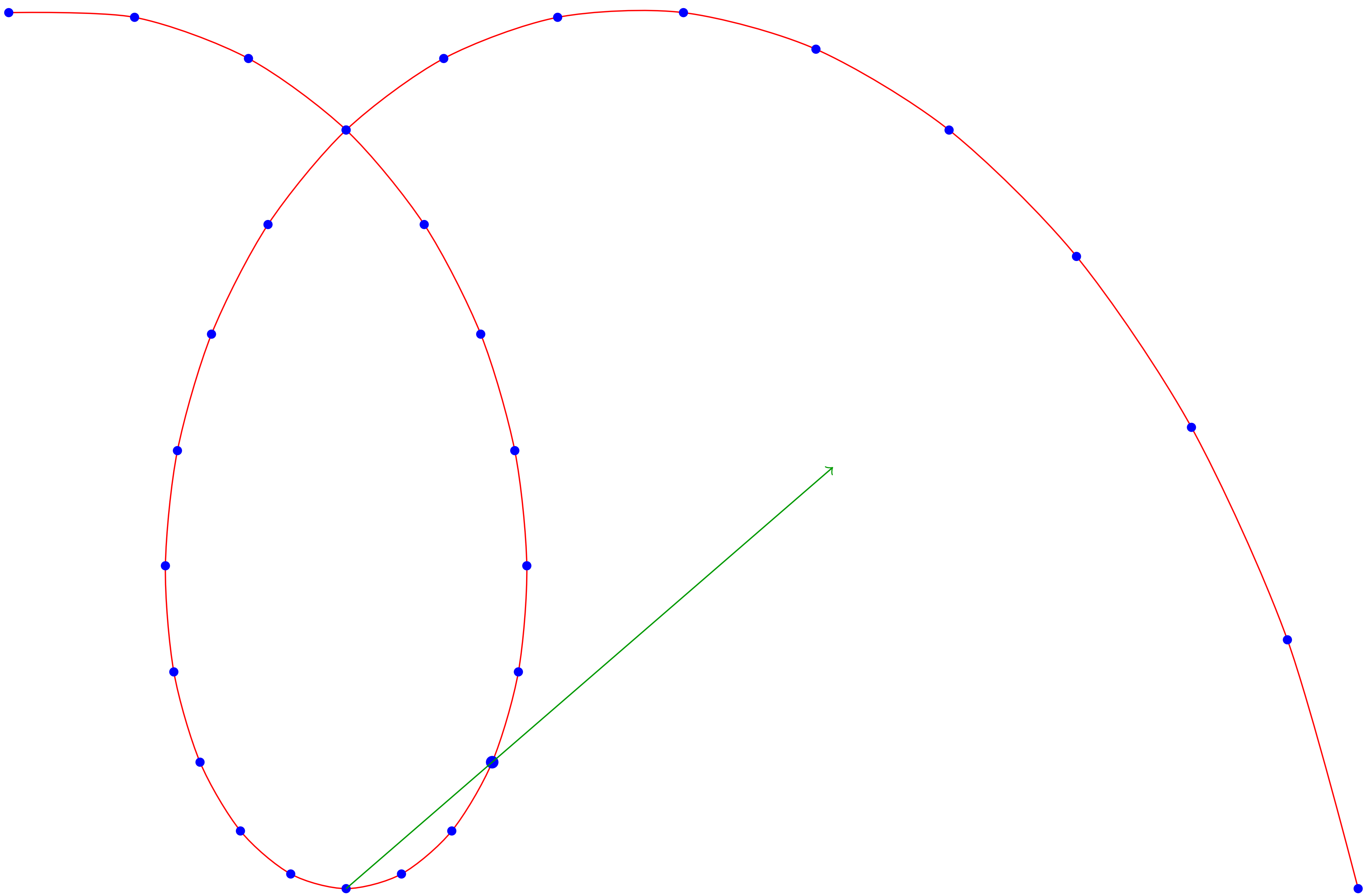
Der Tangentenvektor V



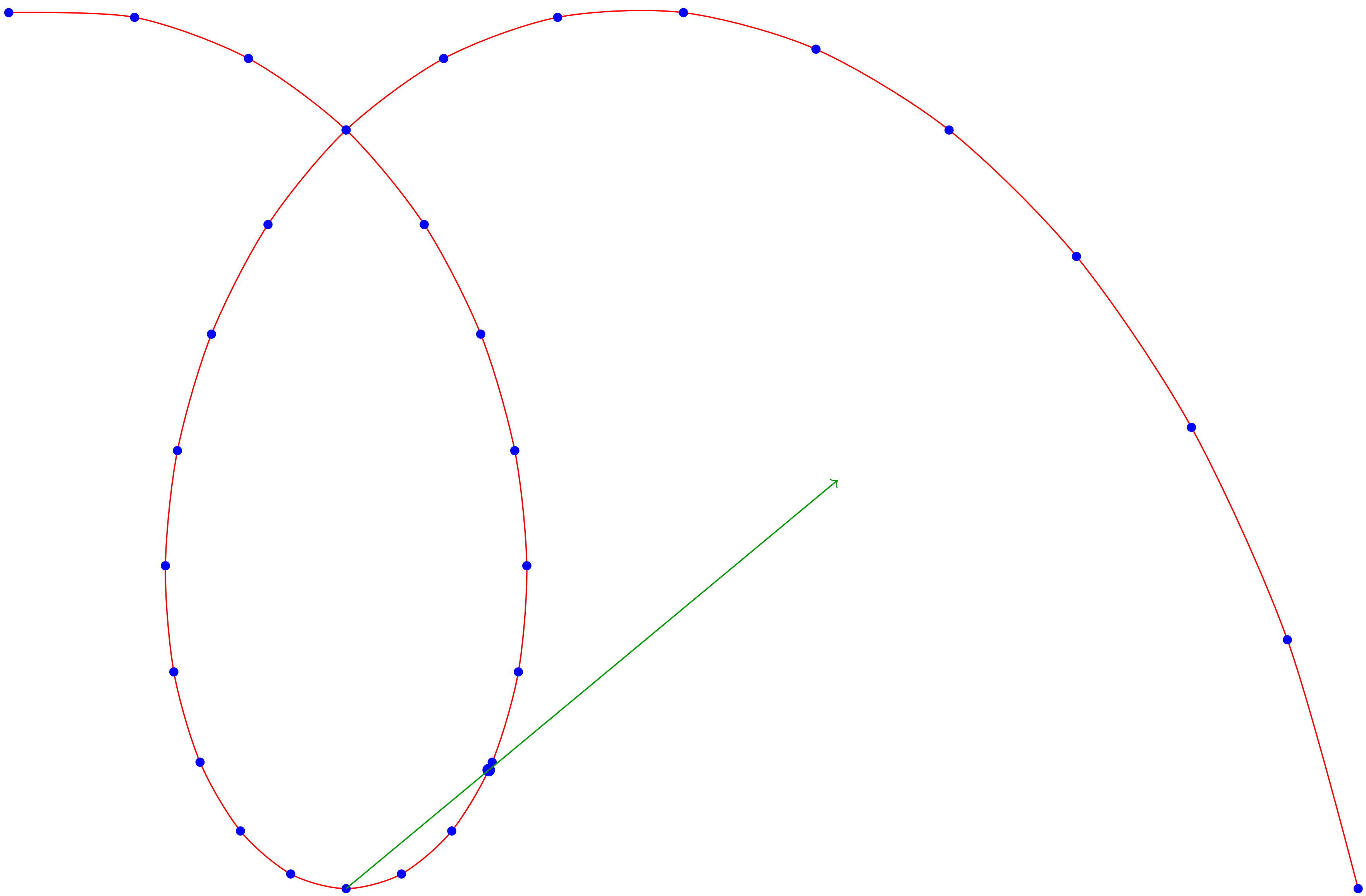
Der Tangentenvektor V



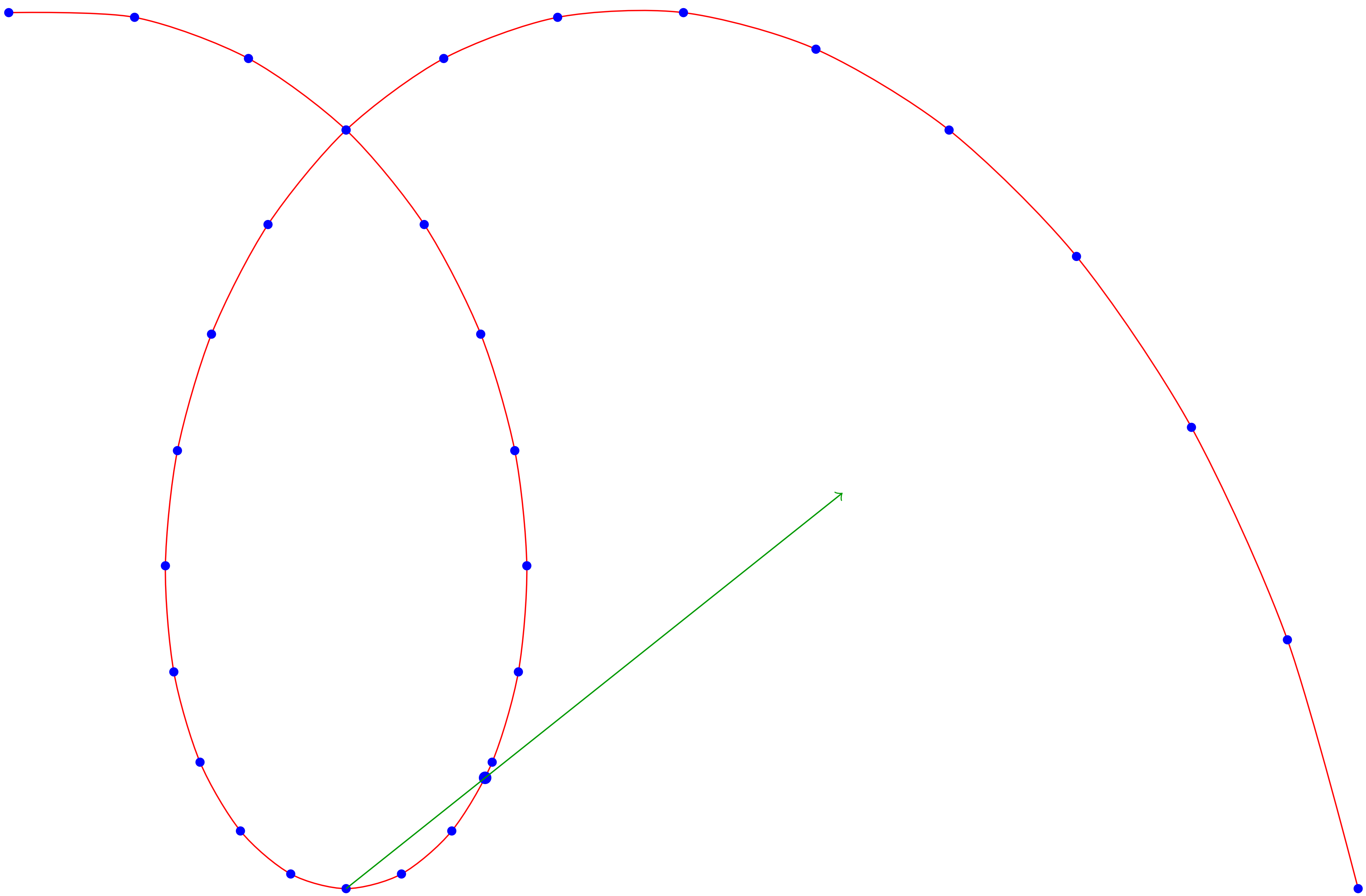
Der Tangentenvektor V



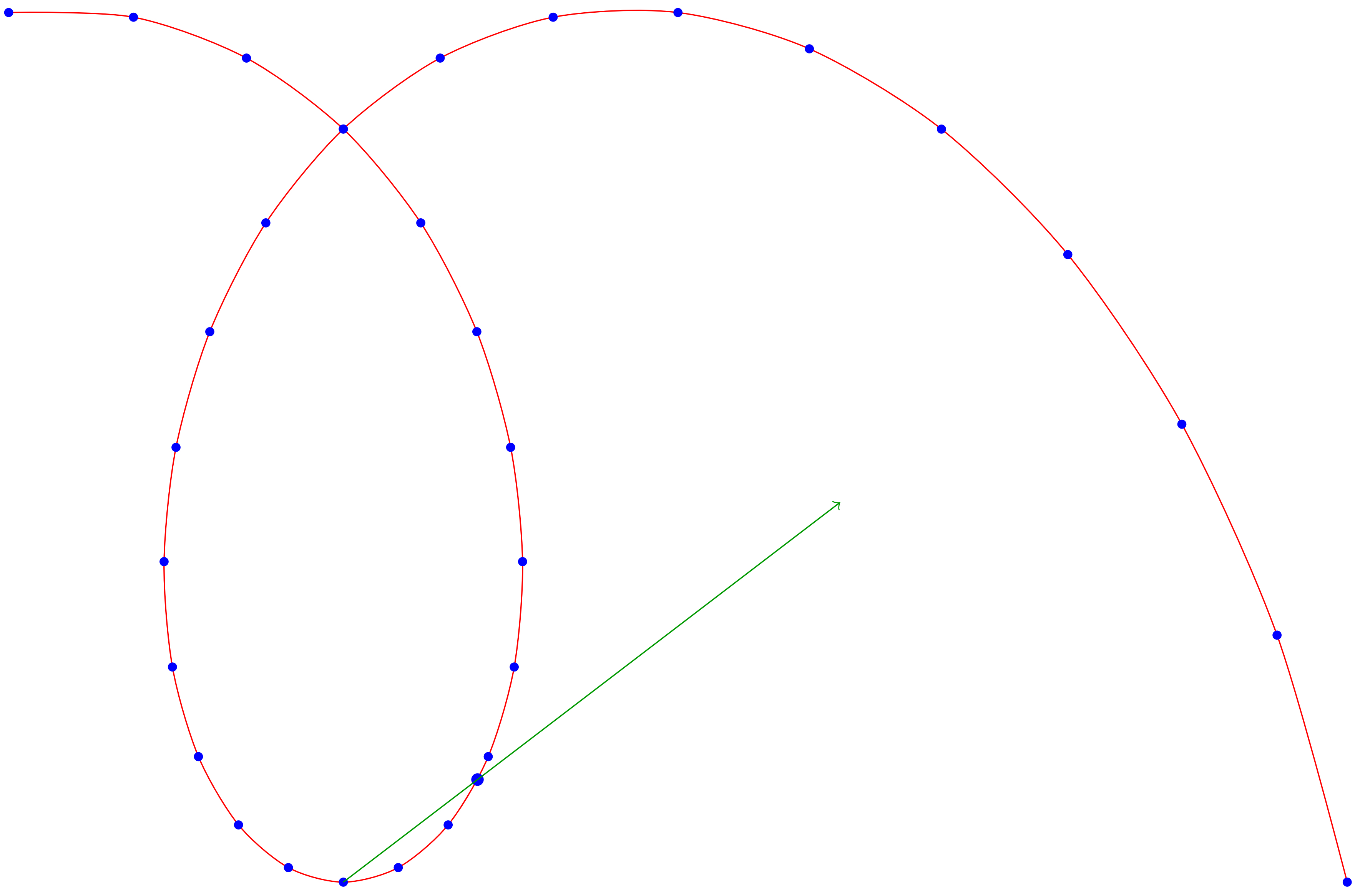
Der Tangentenvektor V



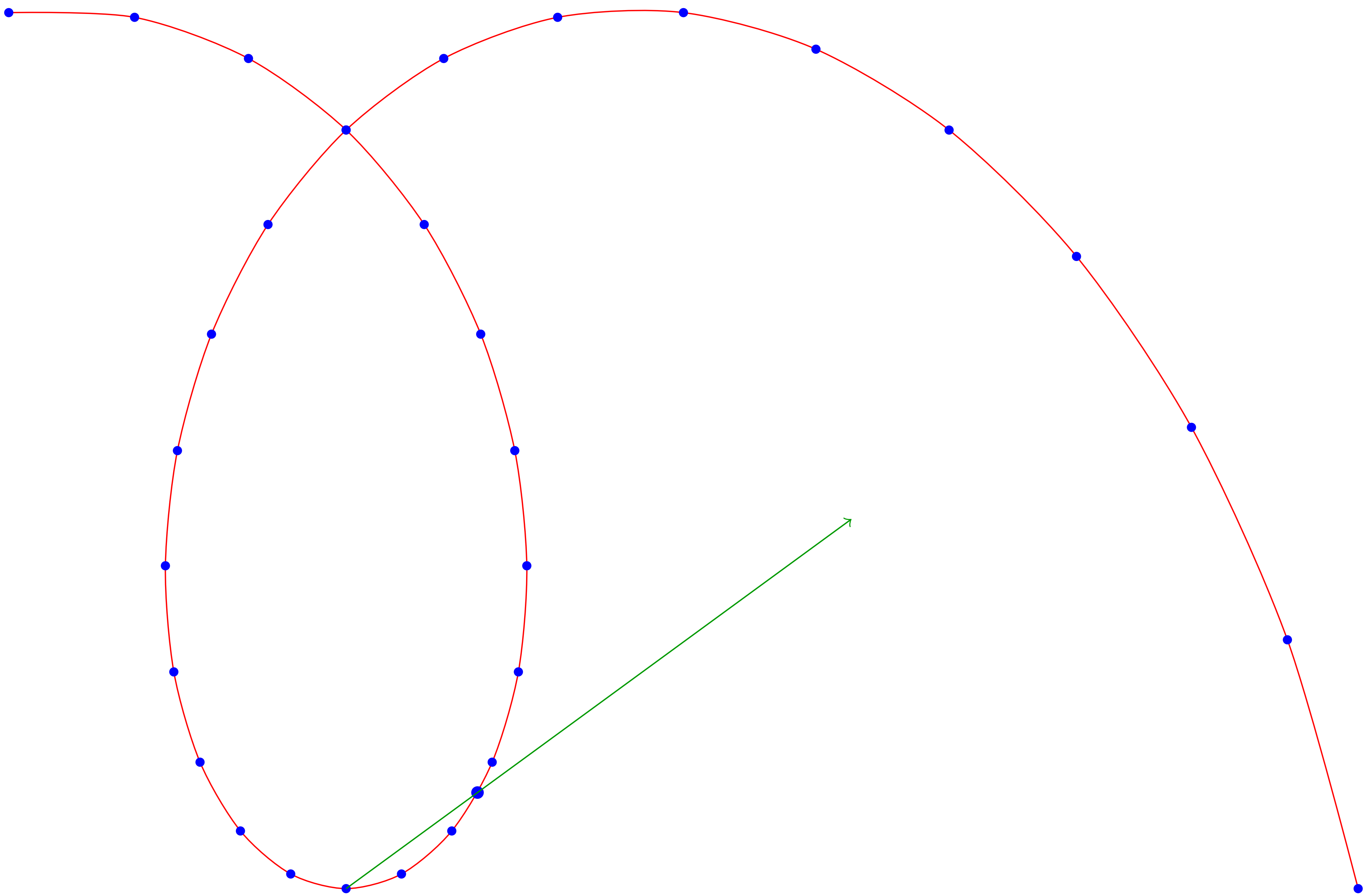
Der Tangentenvektor V



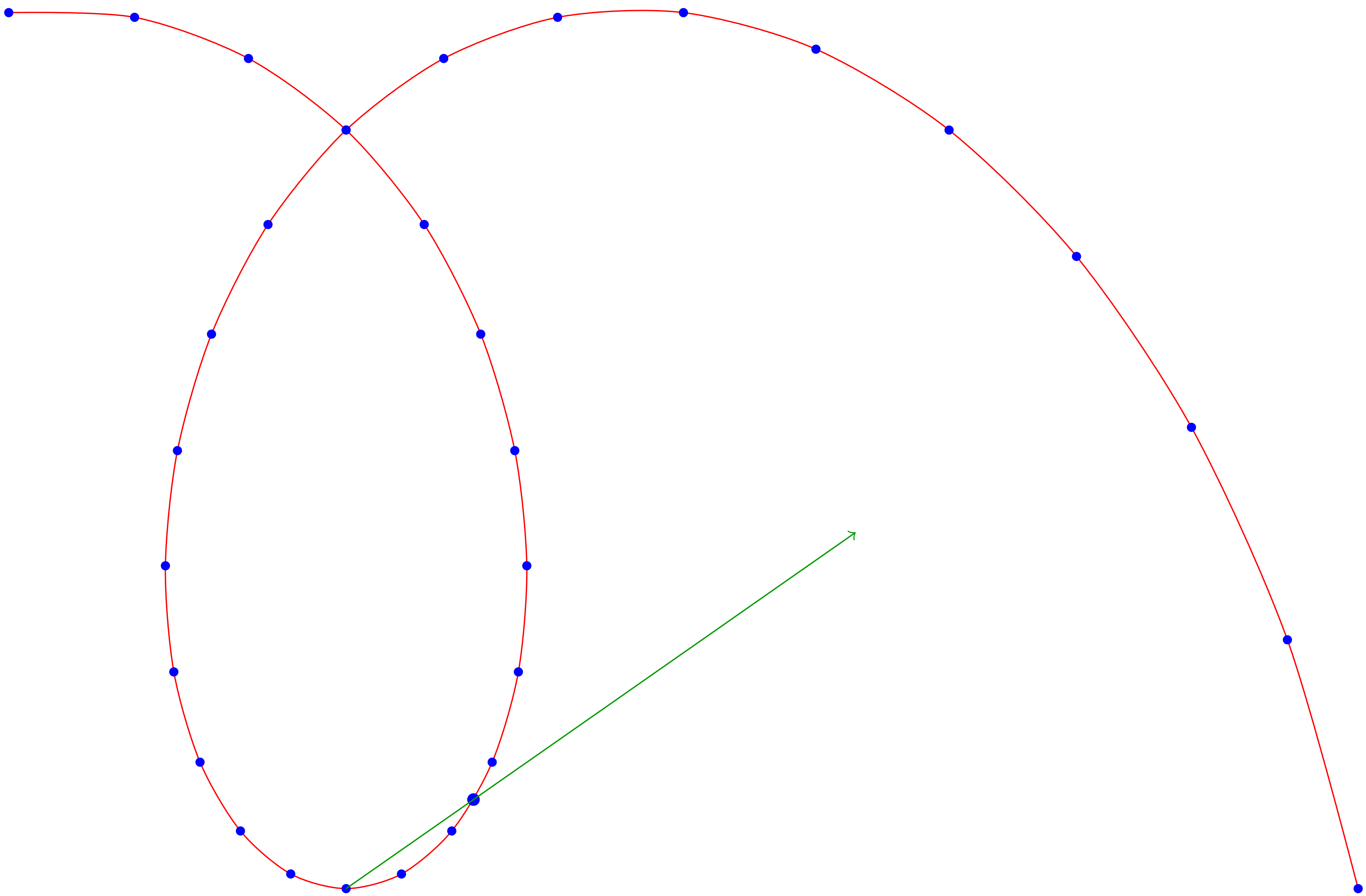
Der Tangentenvektor V



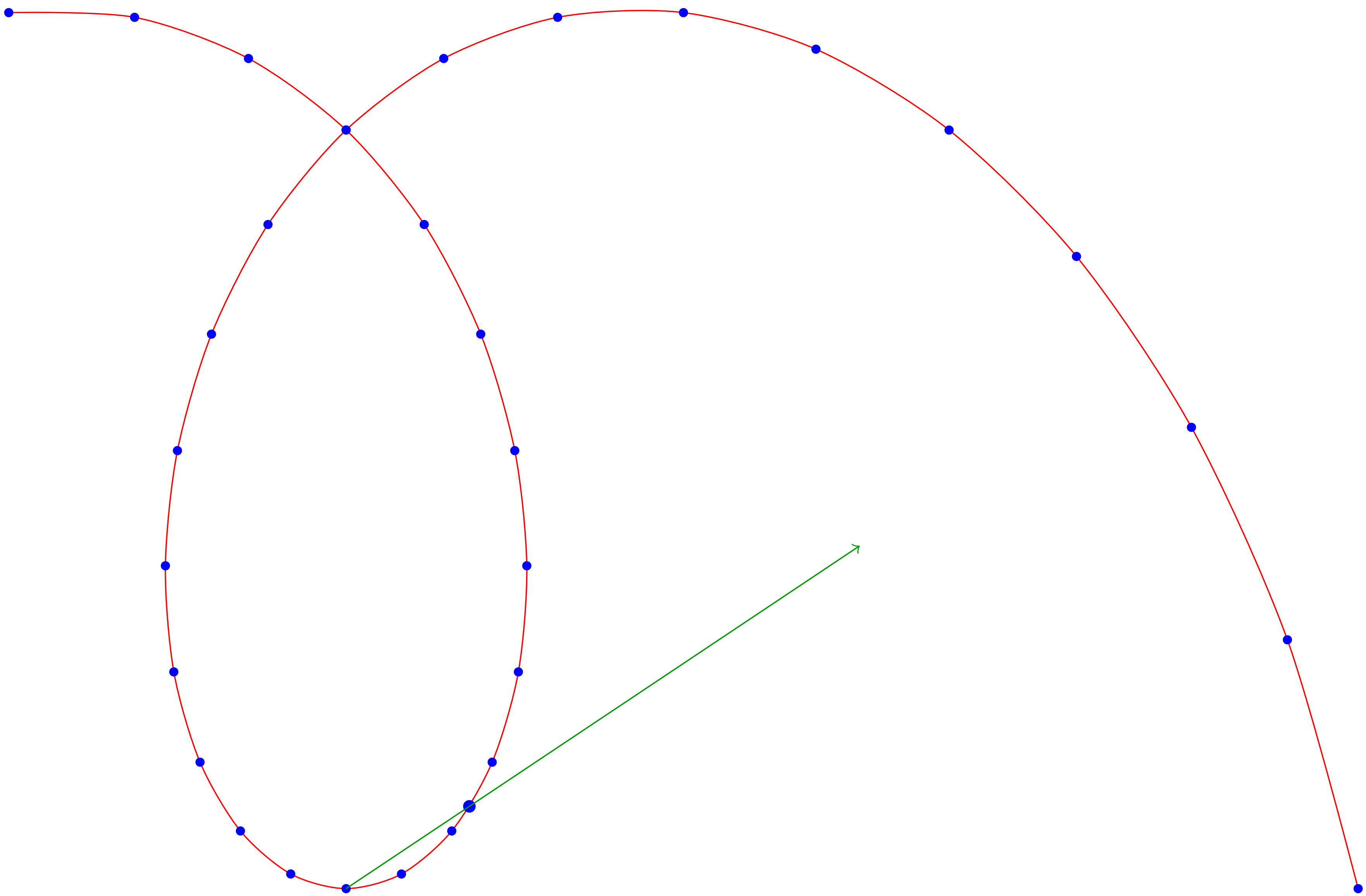
Der Tangentenvektor V



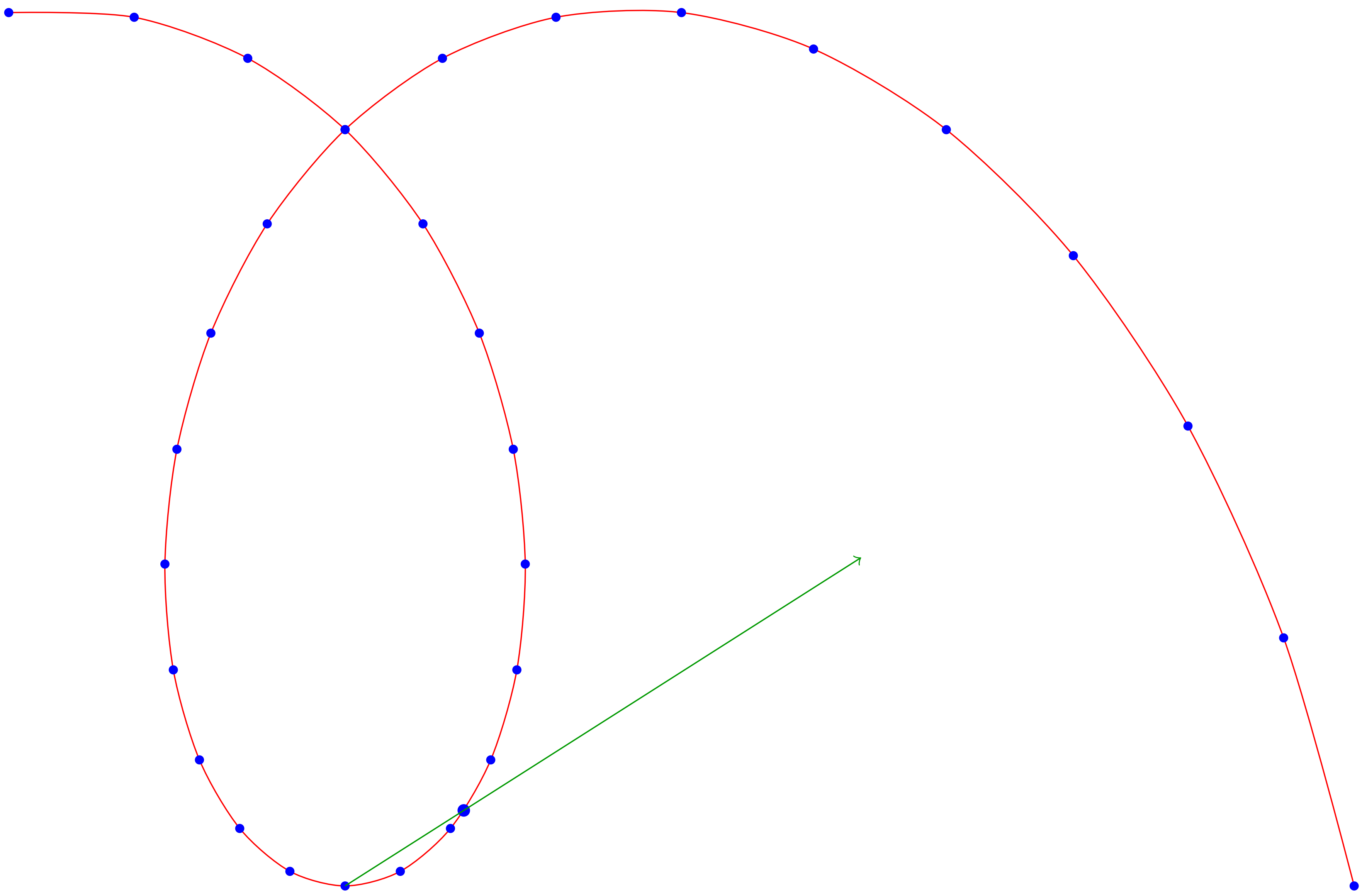
Der Tangentenvektor V



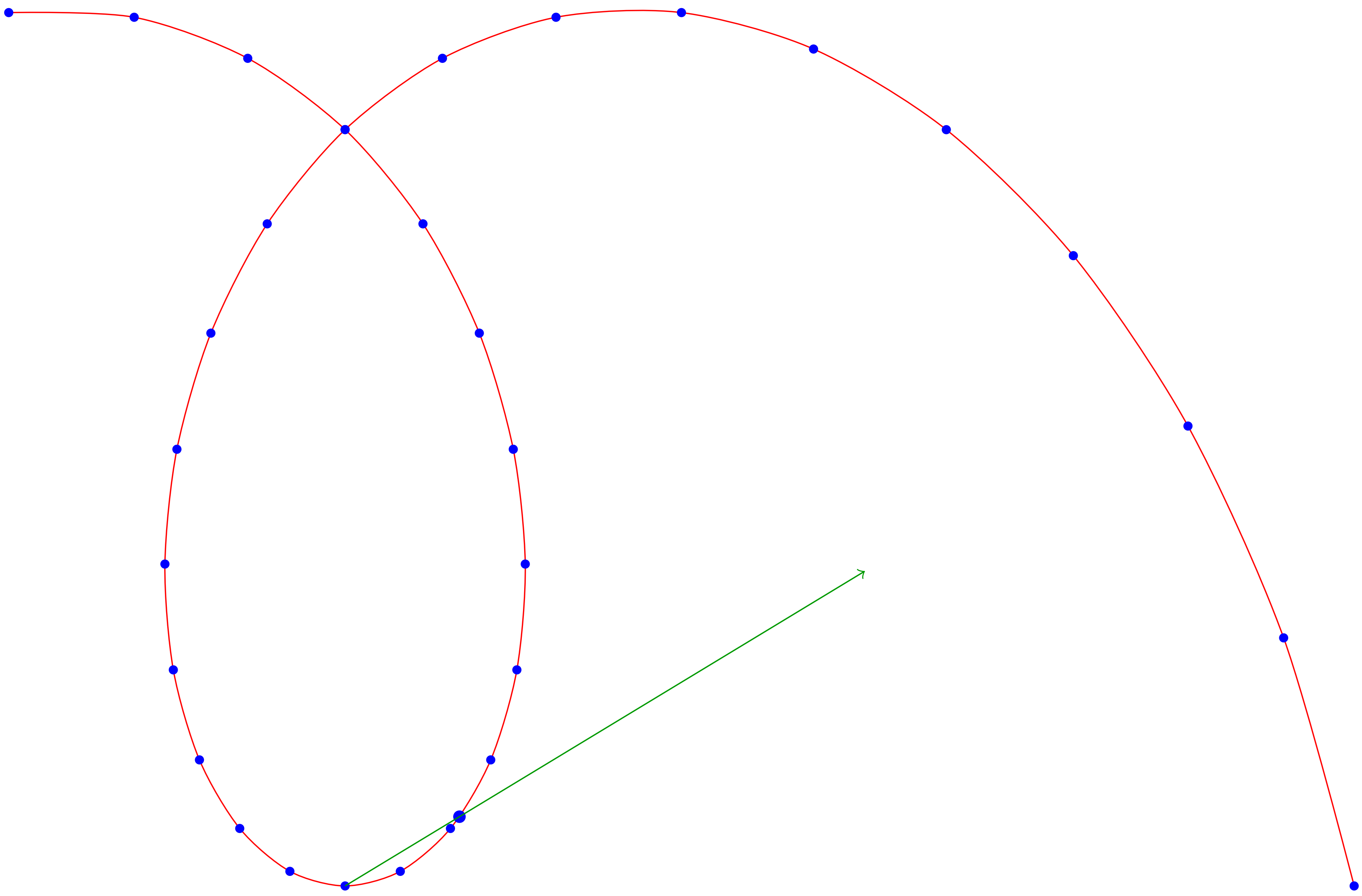
Der Tangentenvektor V



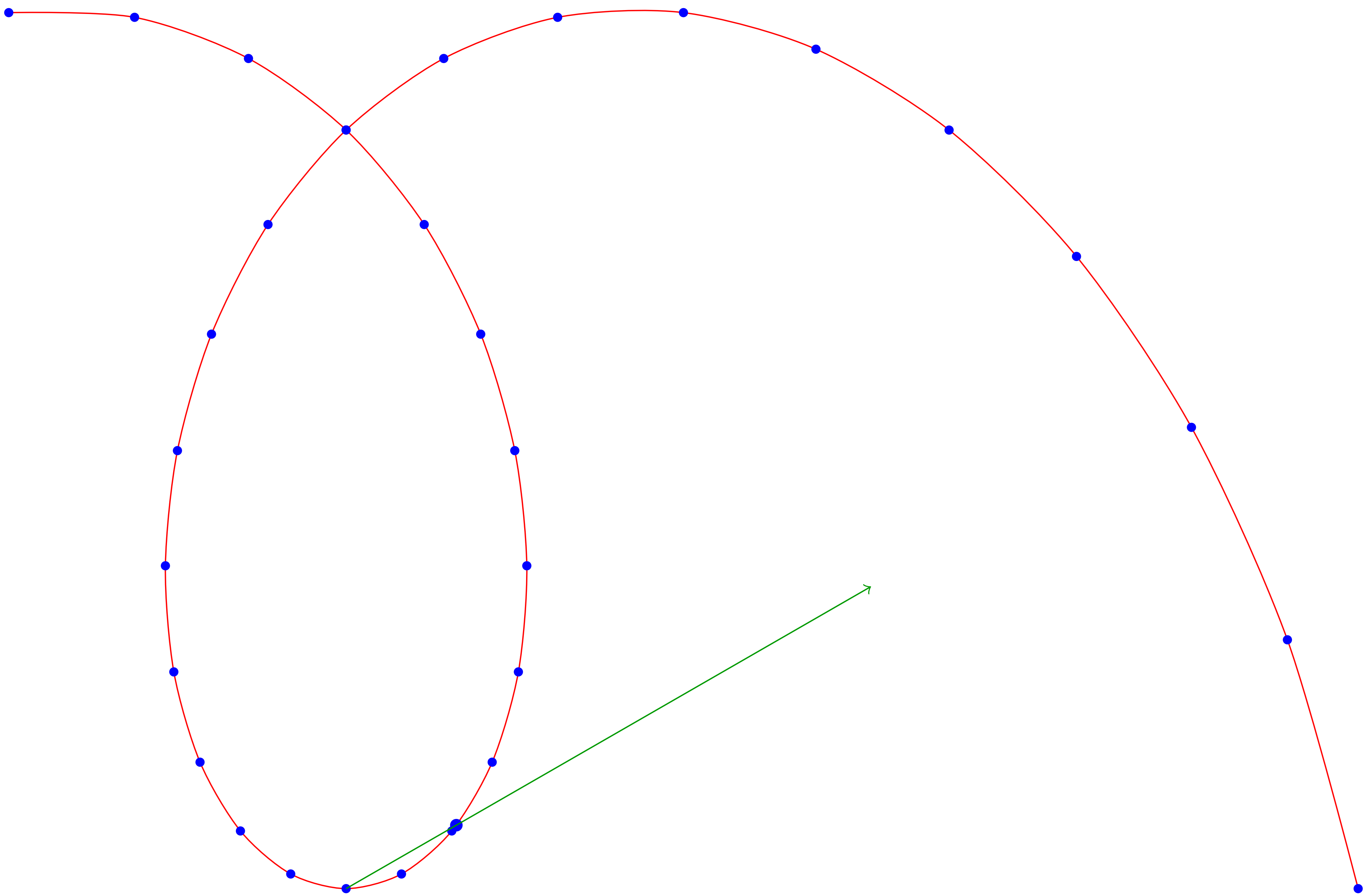
Der Tangentenvektor V



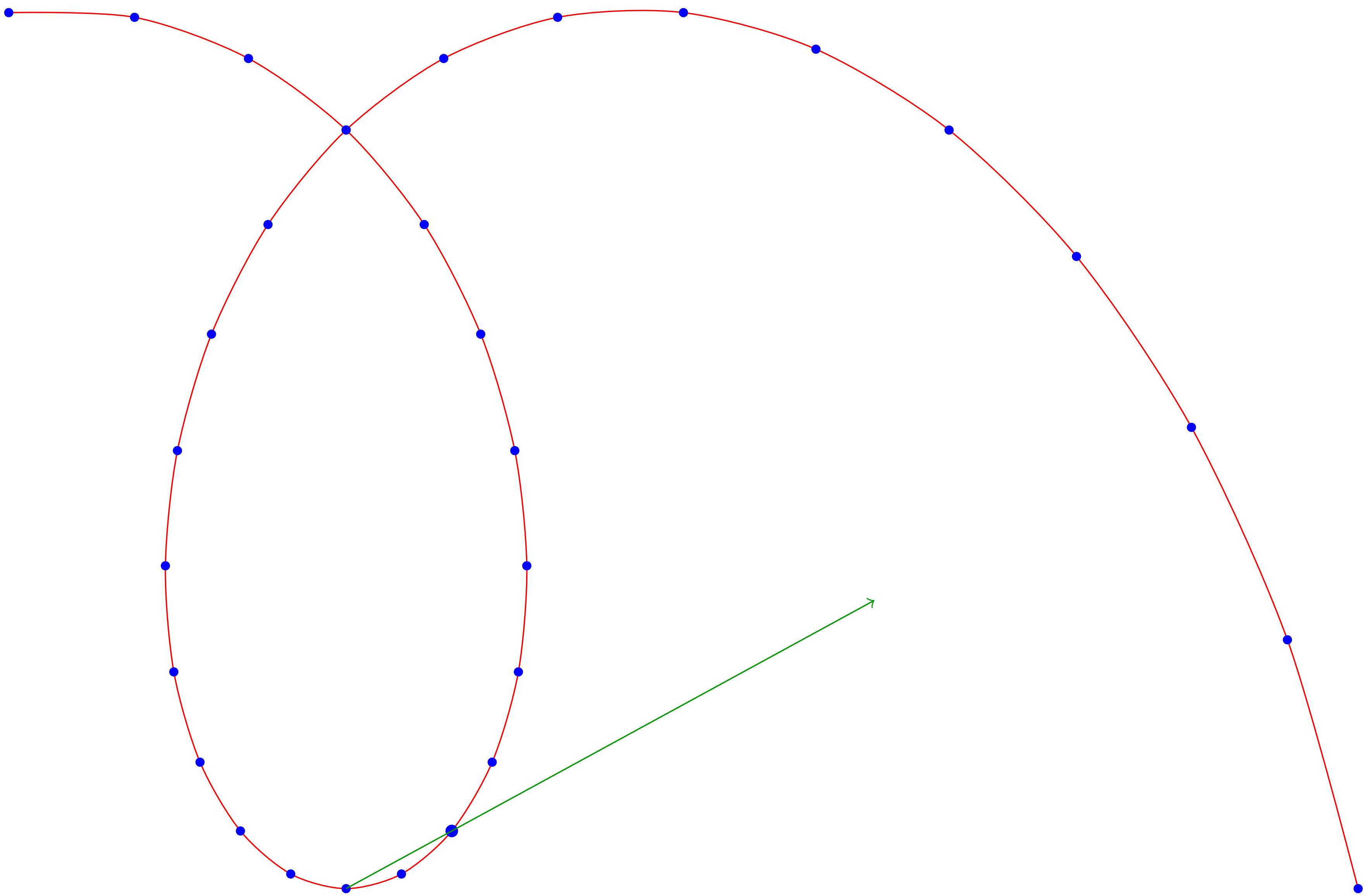
Der Tangentenvektor V



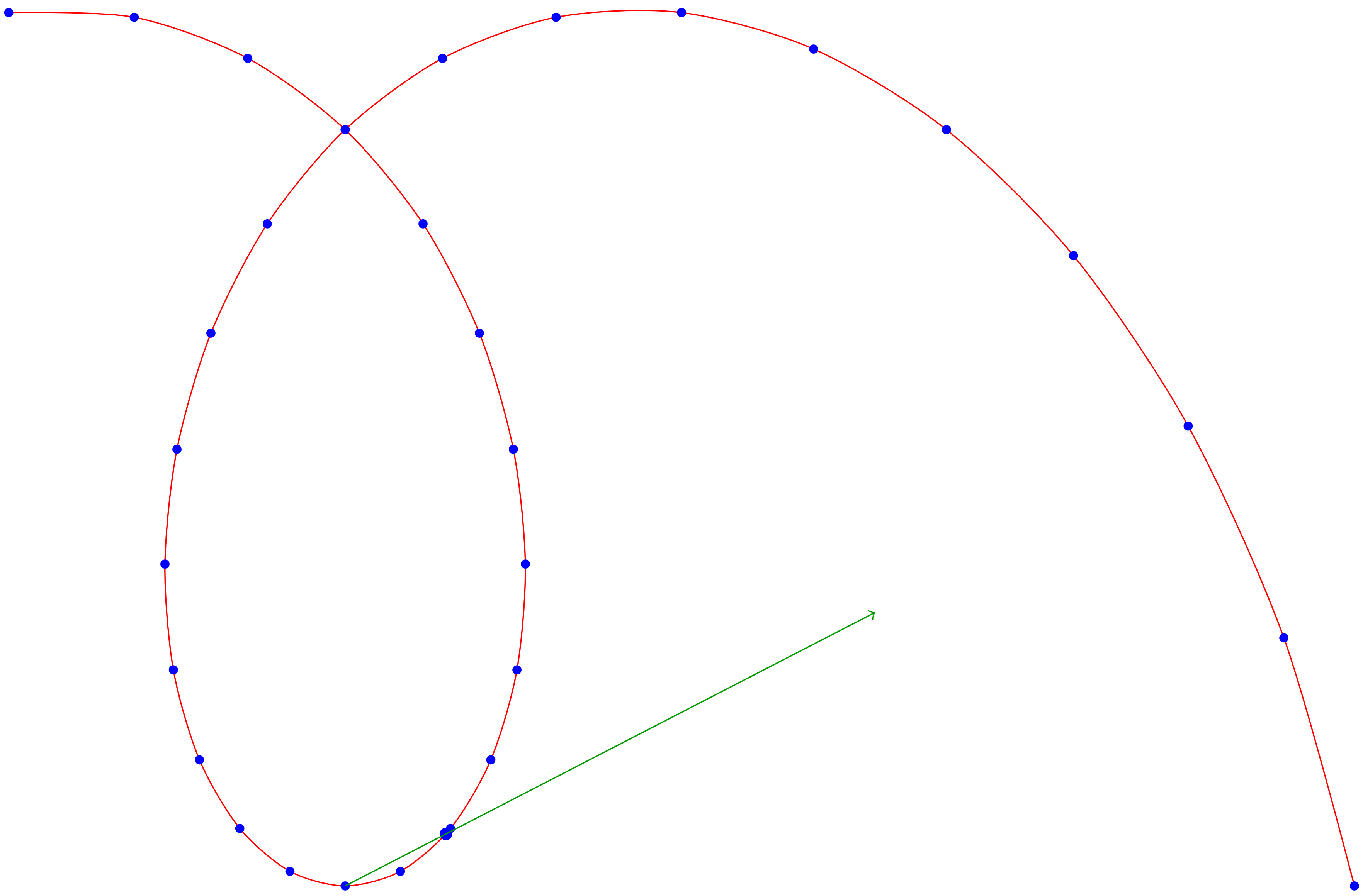
Der Tangentenvektor V



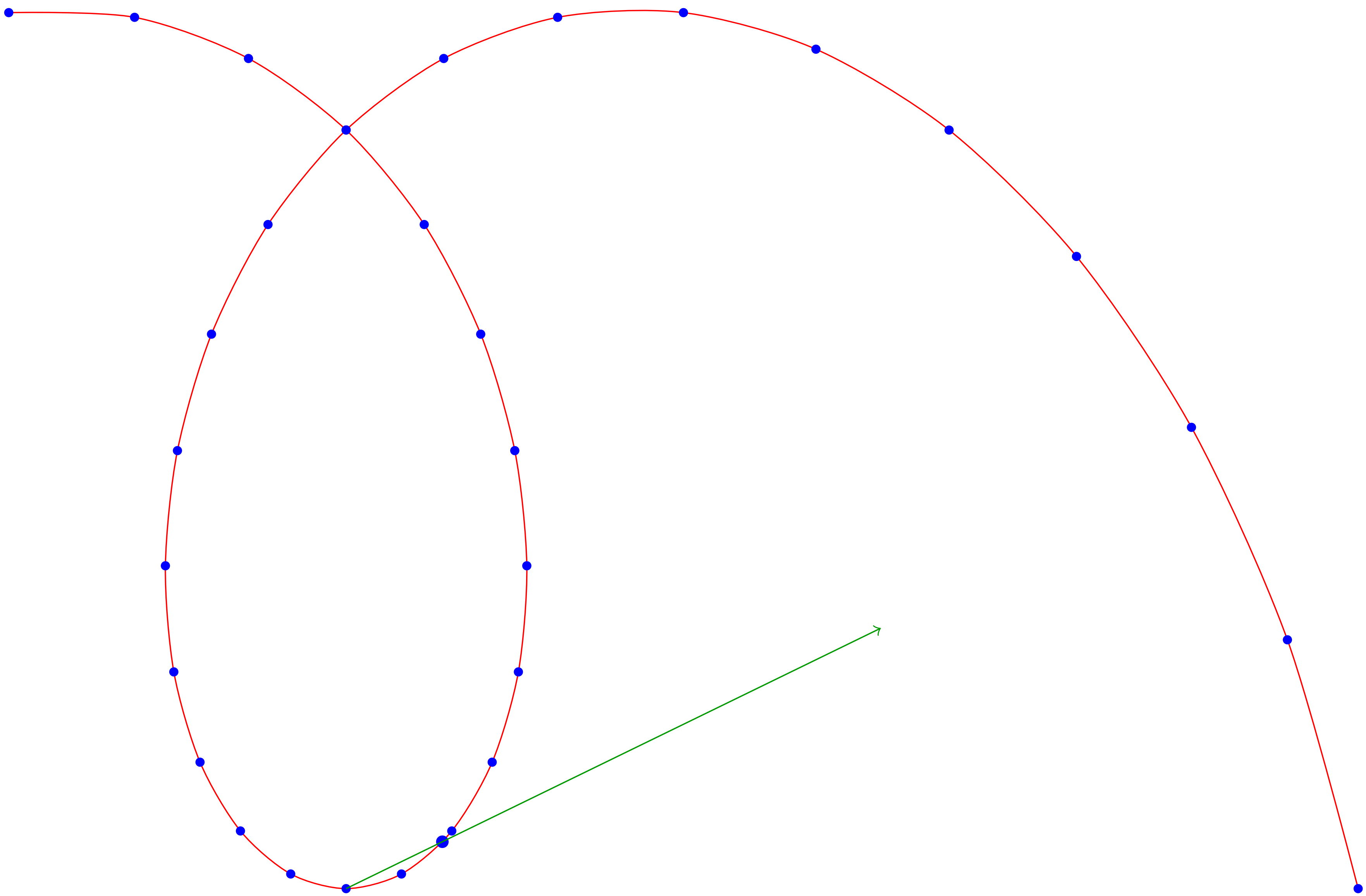
Der Tangentenvektor V



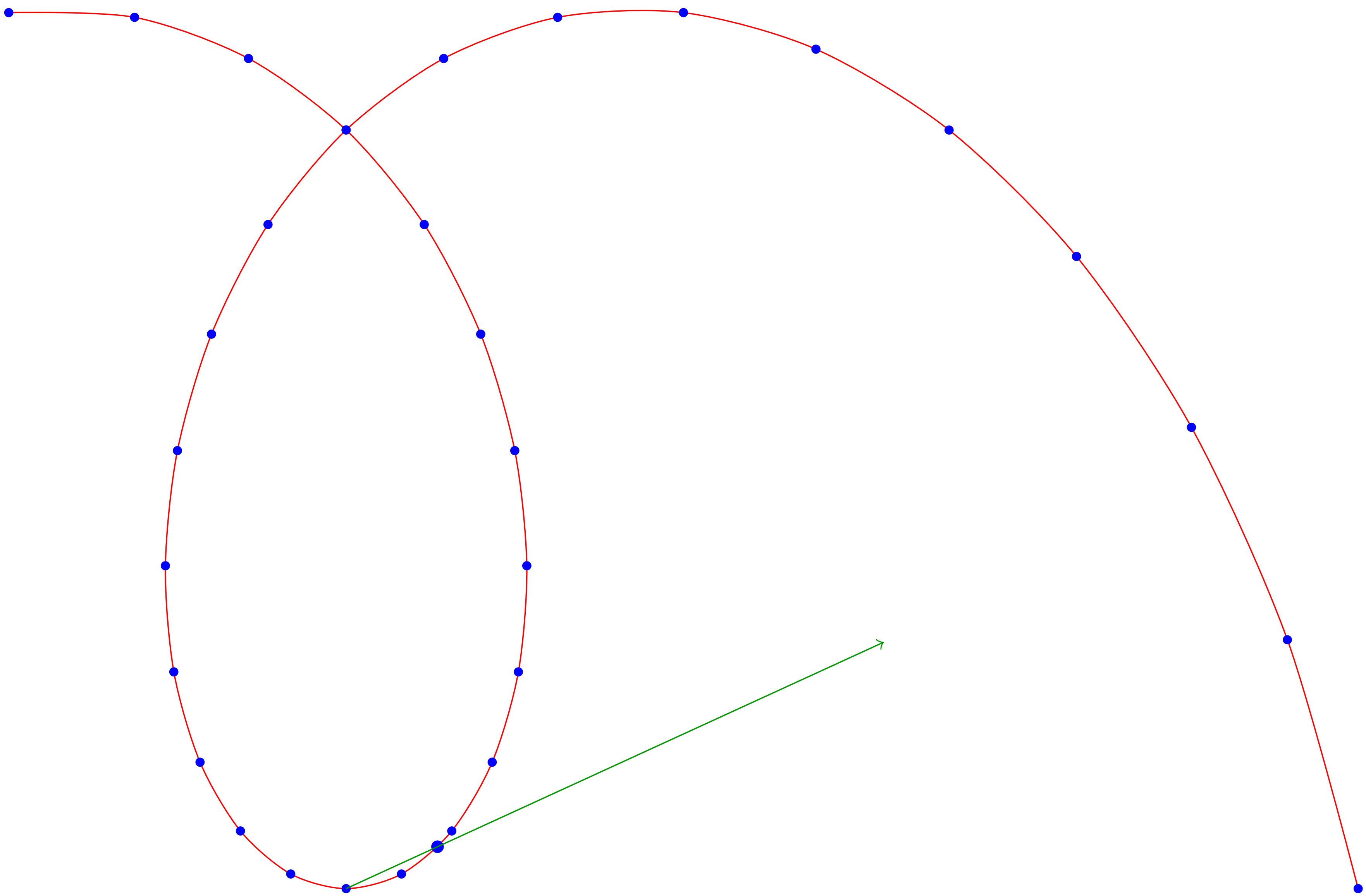
Der Tangentenvektor V



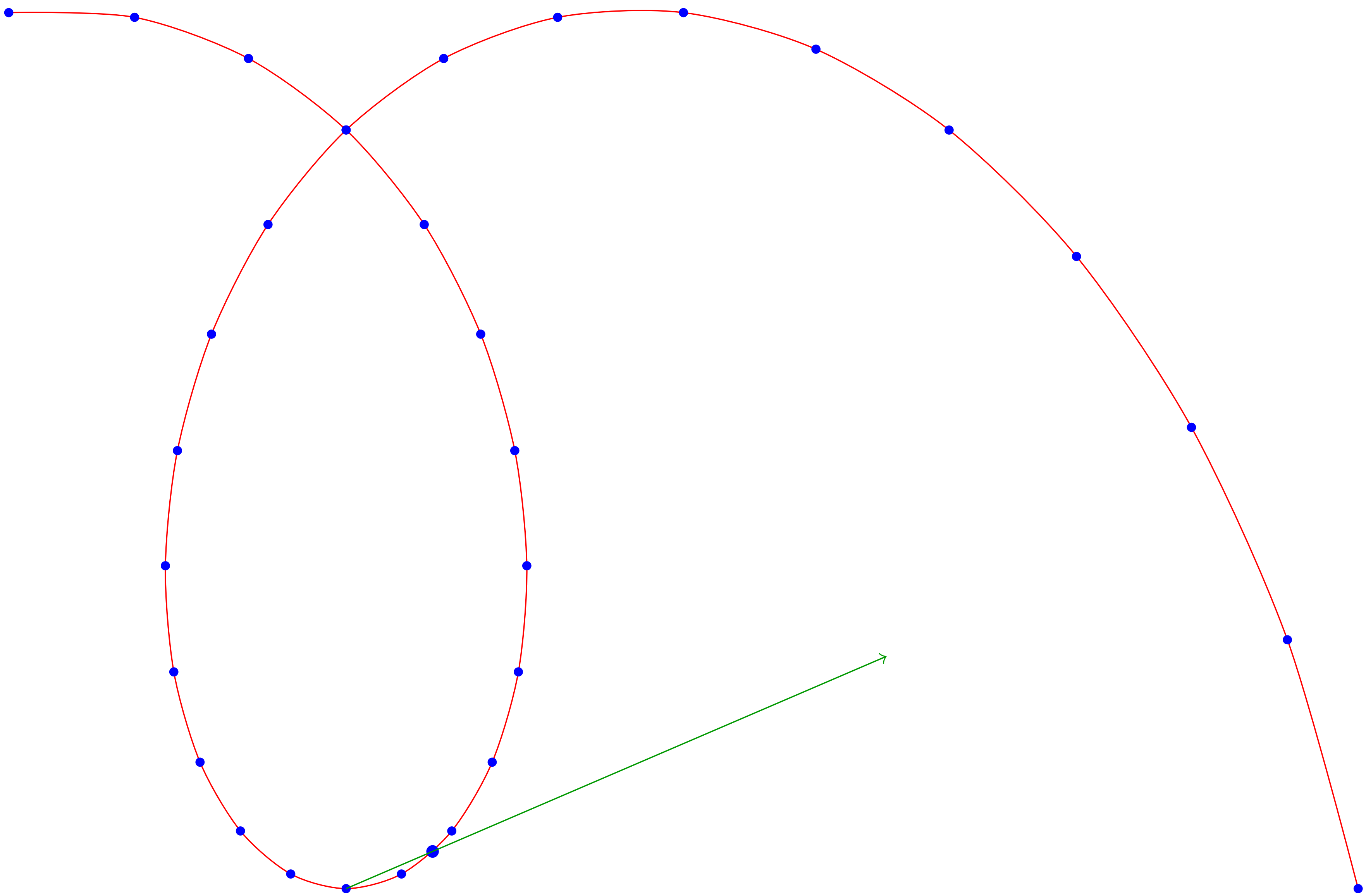
Der Tangentenvektor V



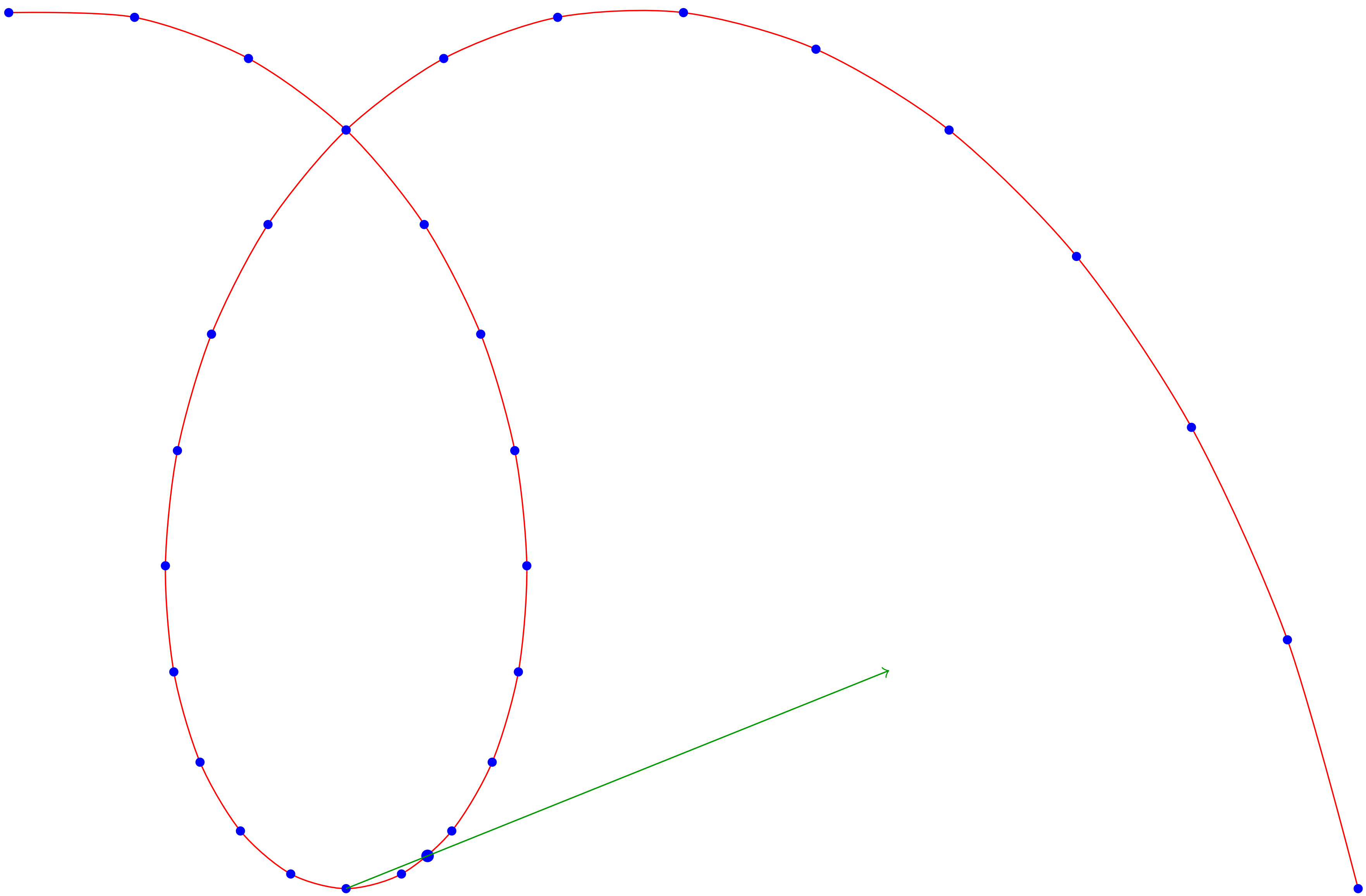
Der Tangentenvektor V



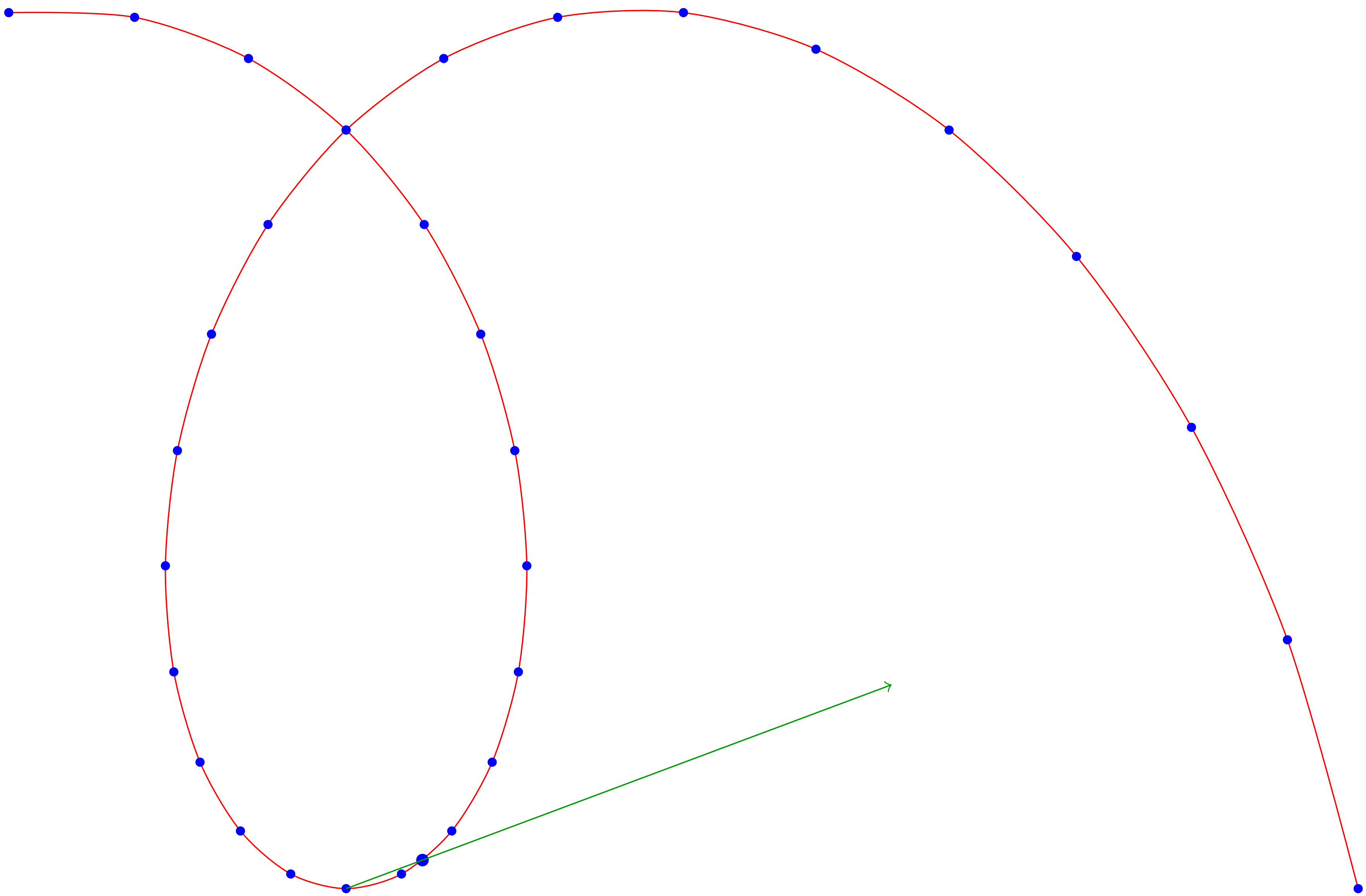
Der Tangentenvektor V



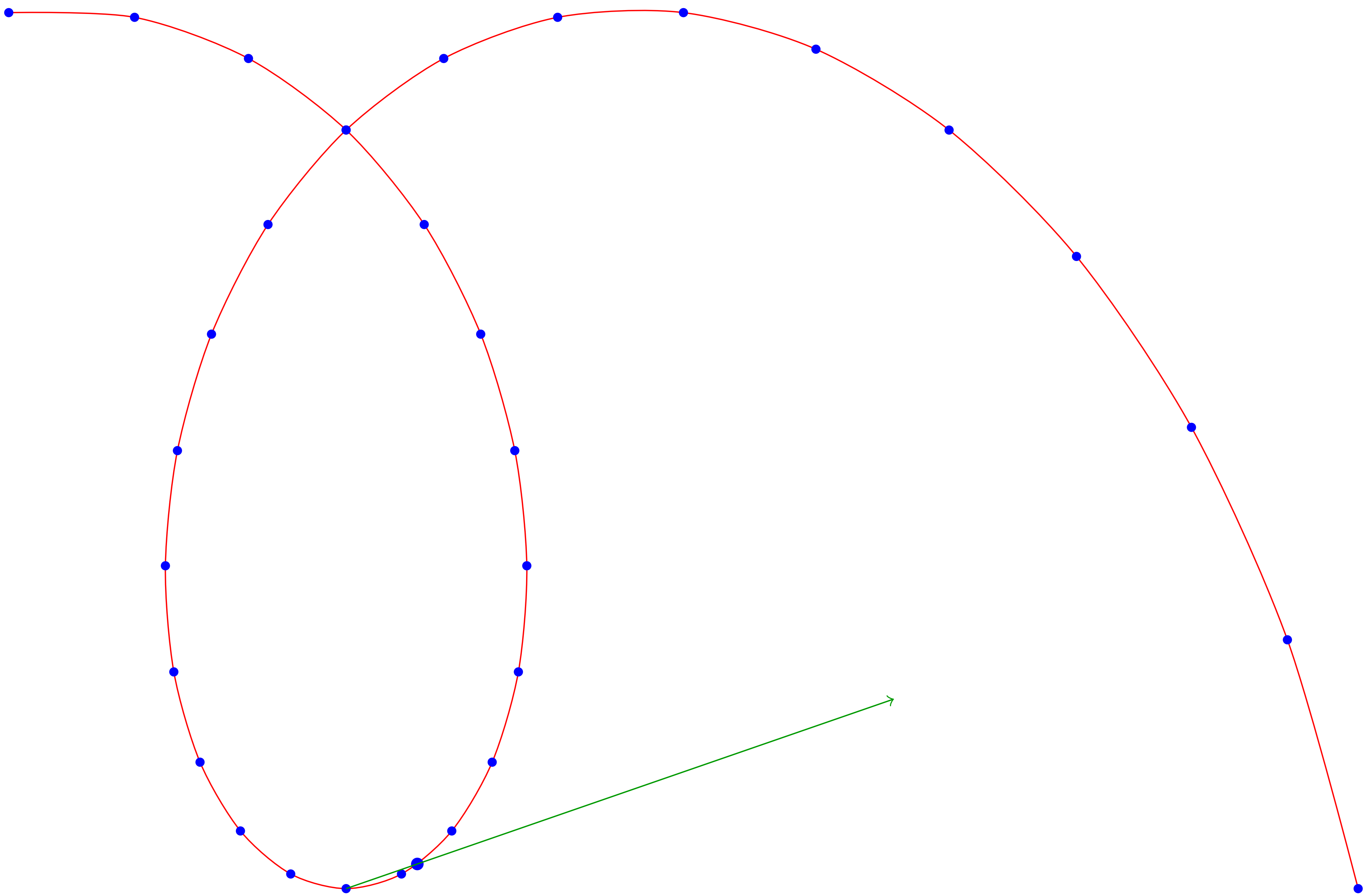
Der Tangentenvektor V



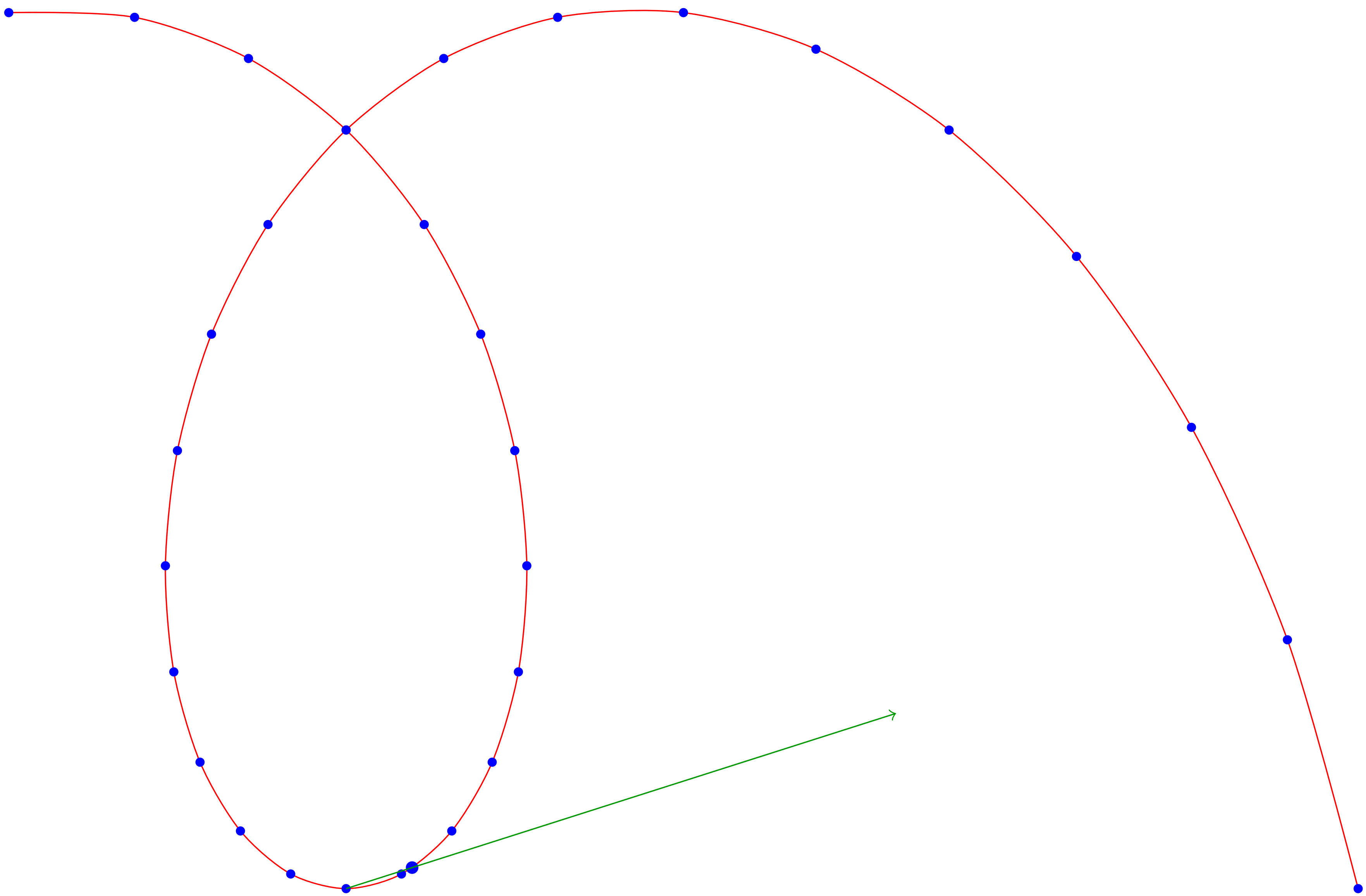
Der Tangentenvektor V



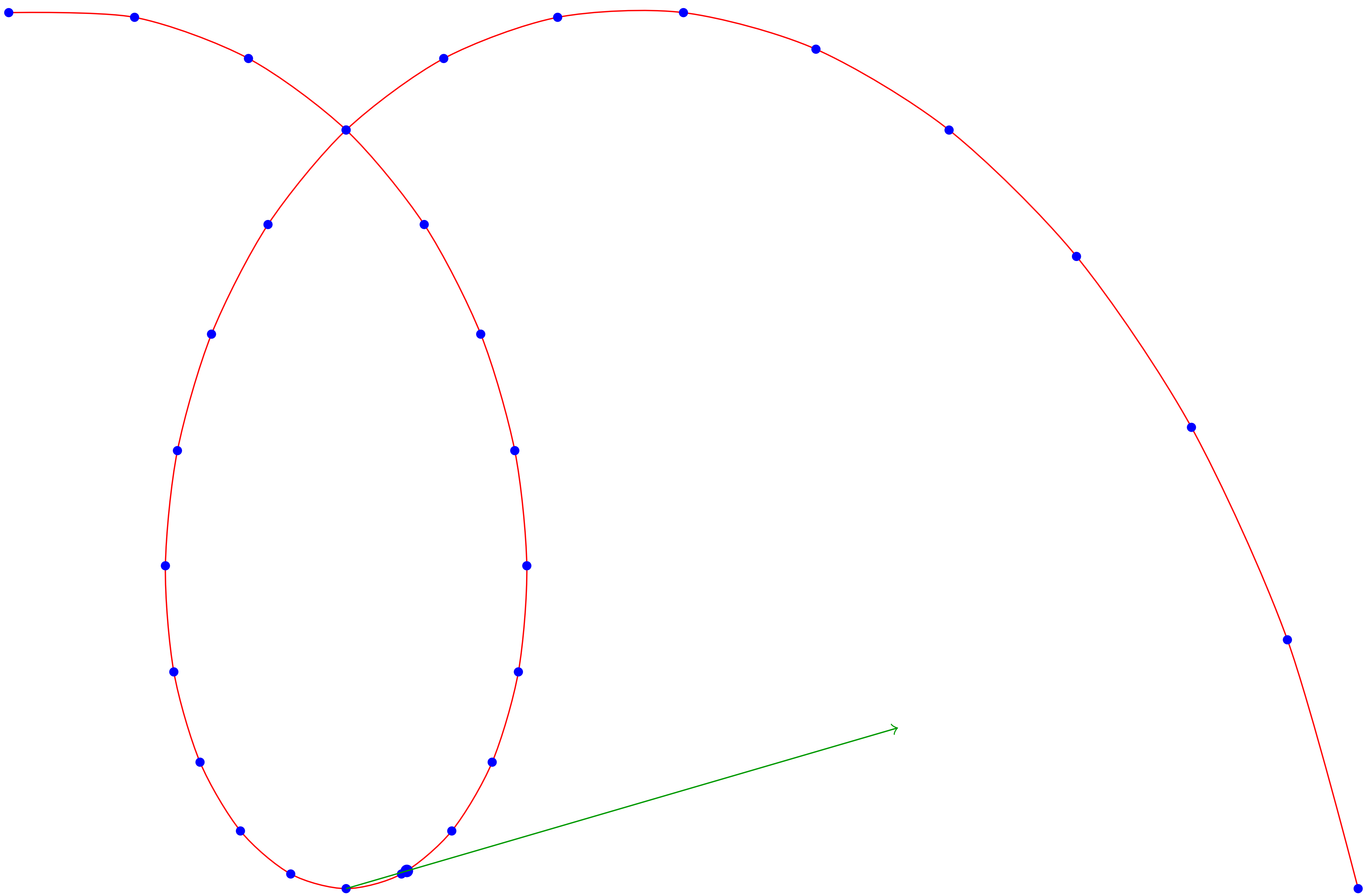
Der Tangentenvektor V



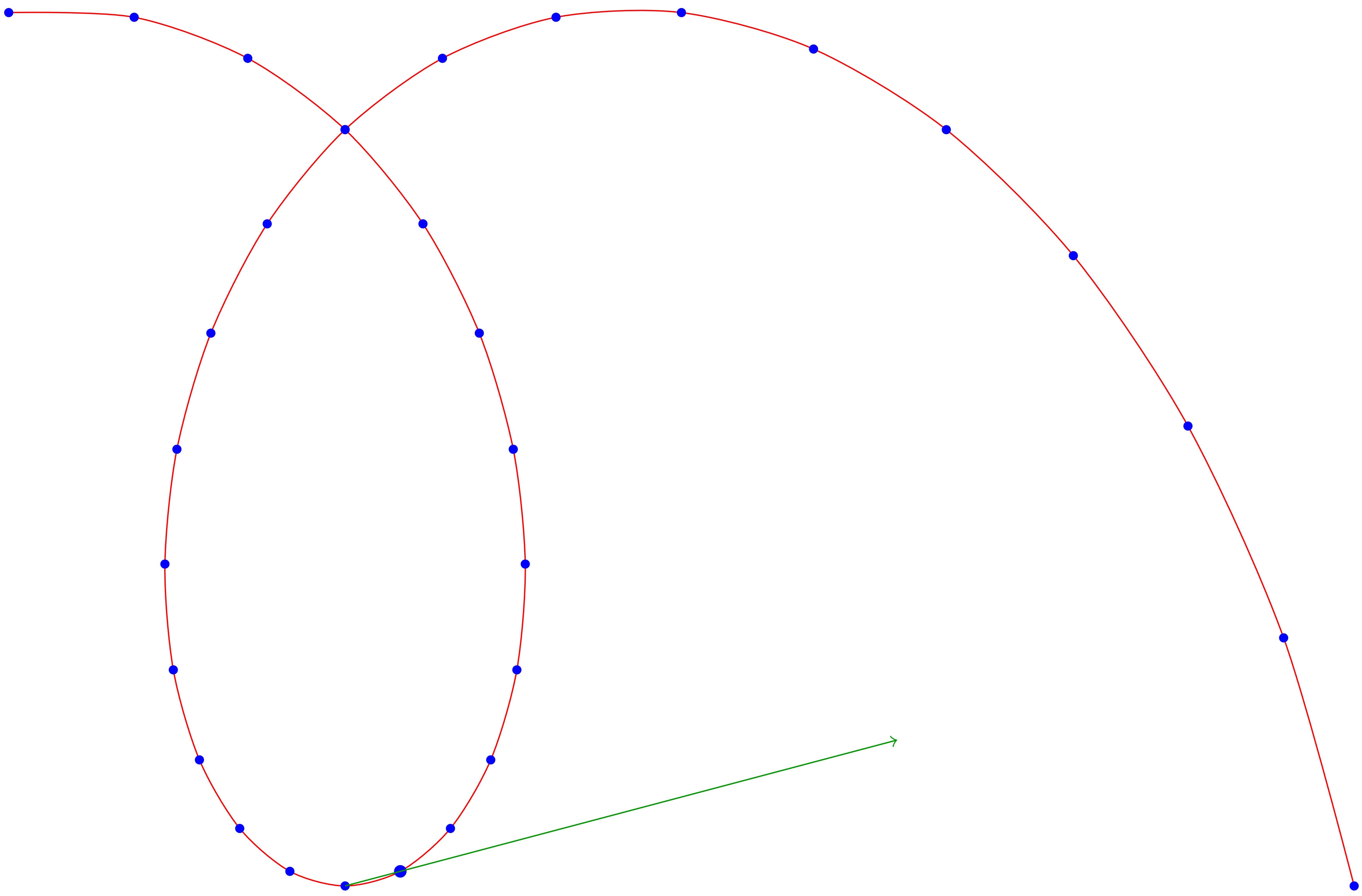
Der Tangentenvektor V



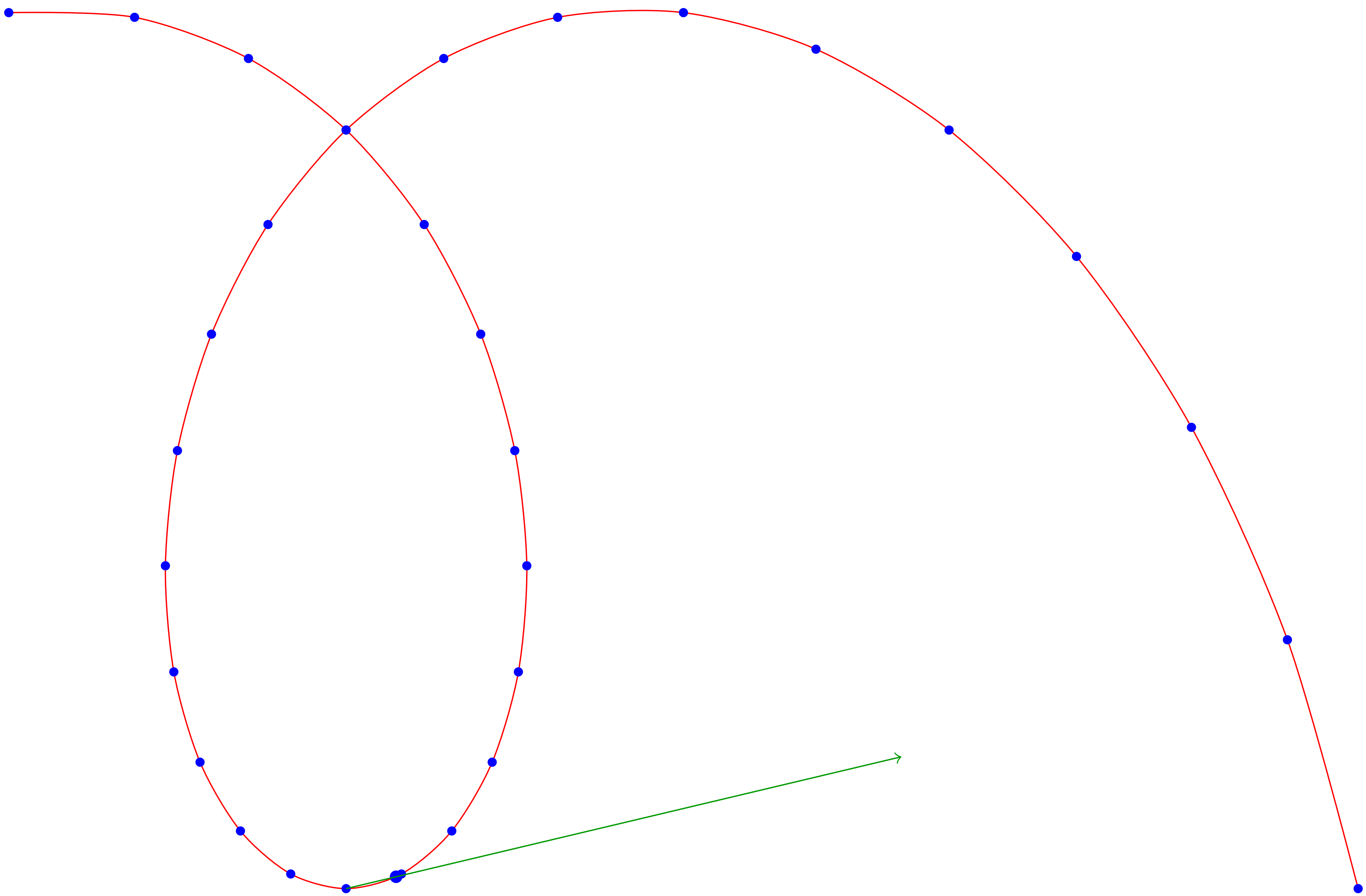
Der Tangentenvektor V



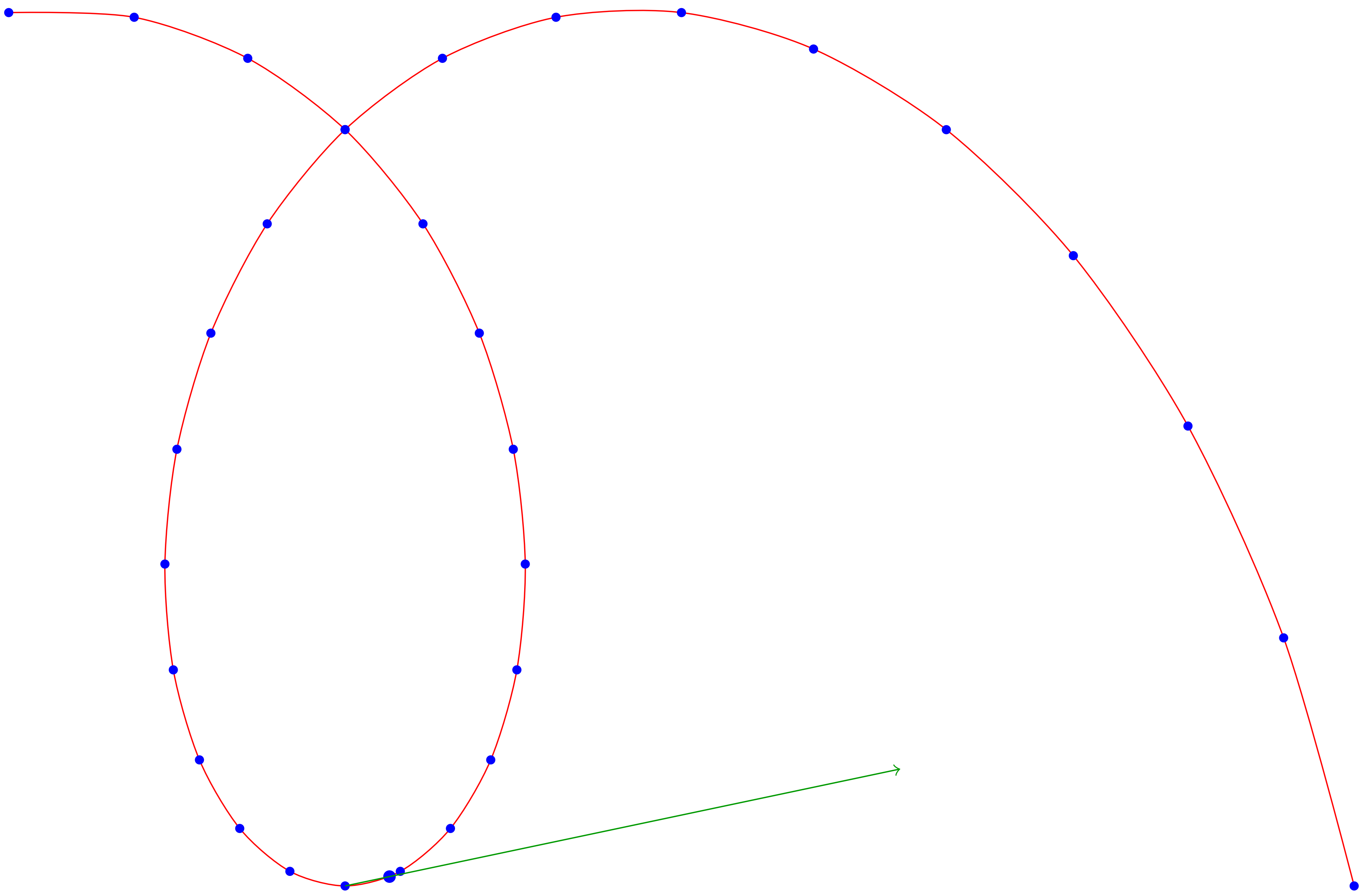
Der Tangentenvektor V



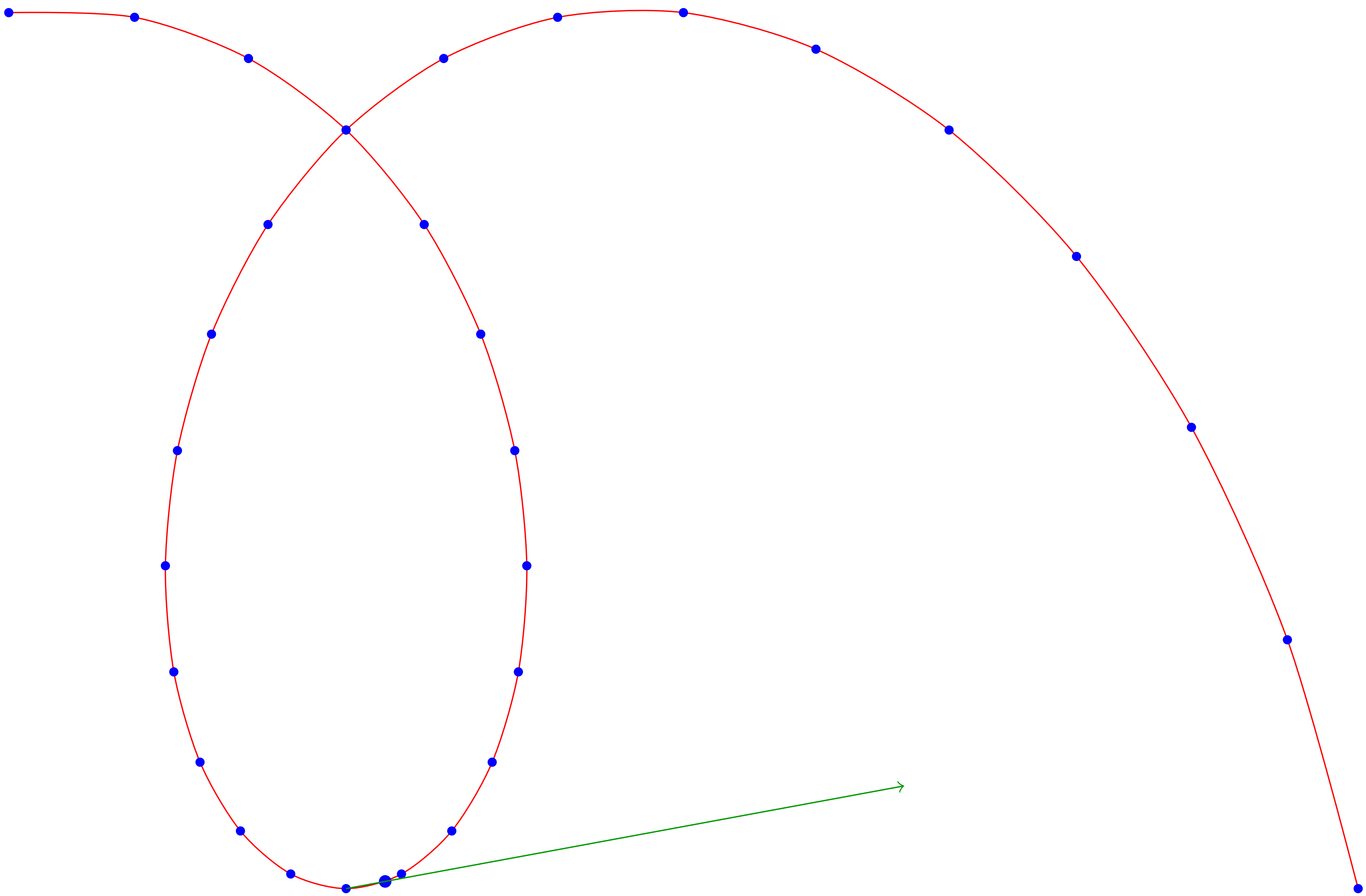
Der Tangentenvektor V



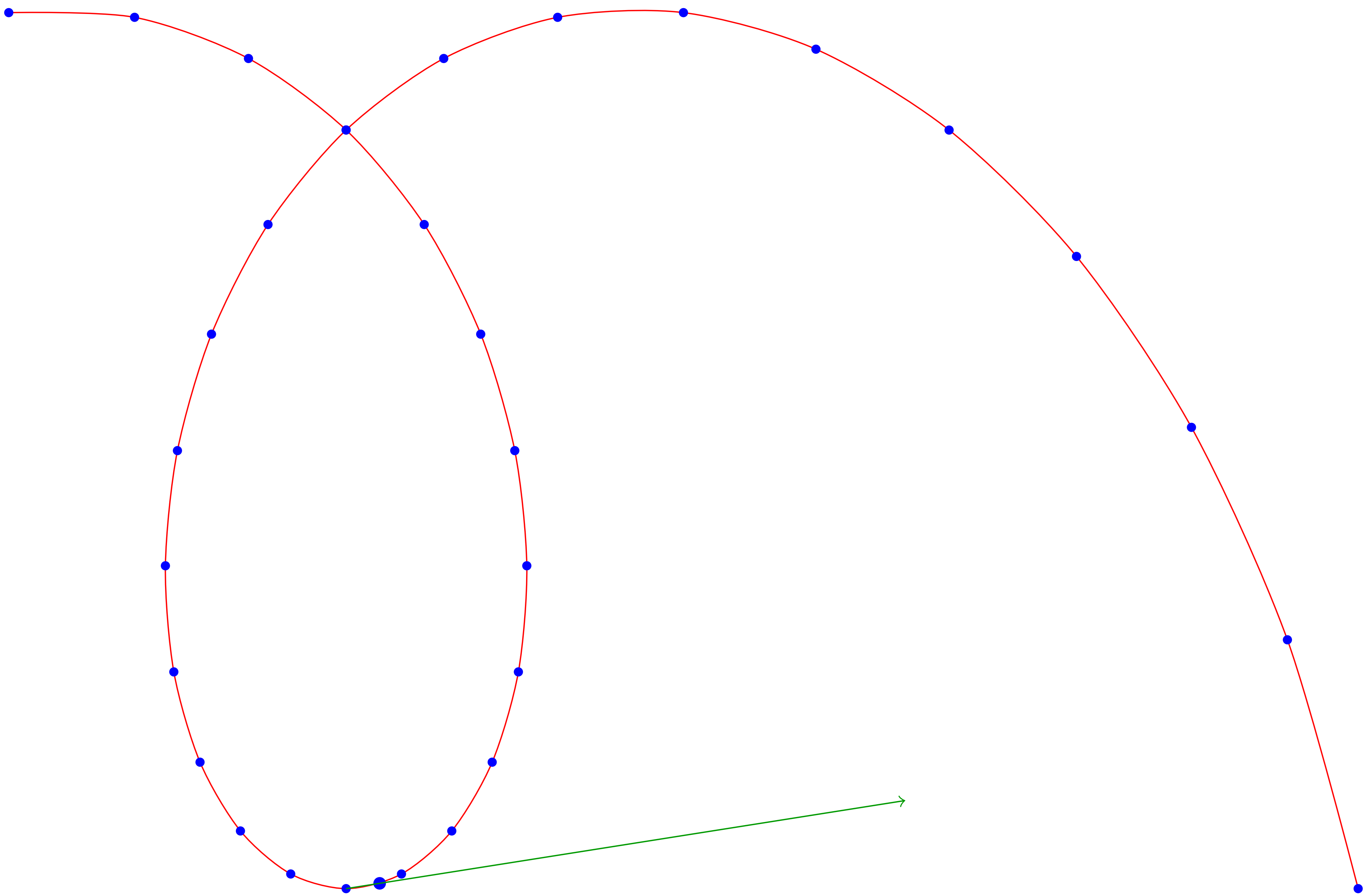
Der Tangentenvektor V



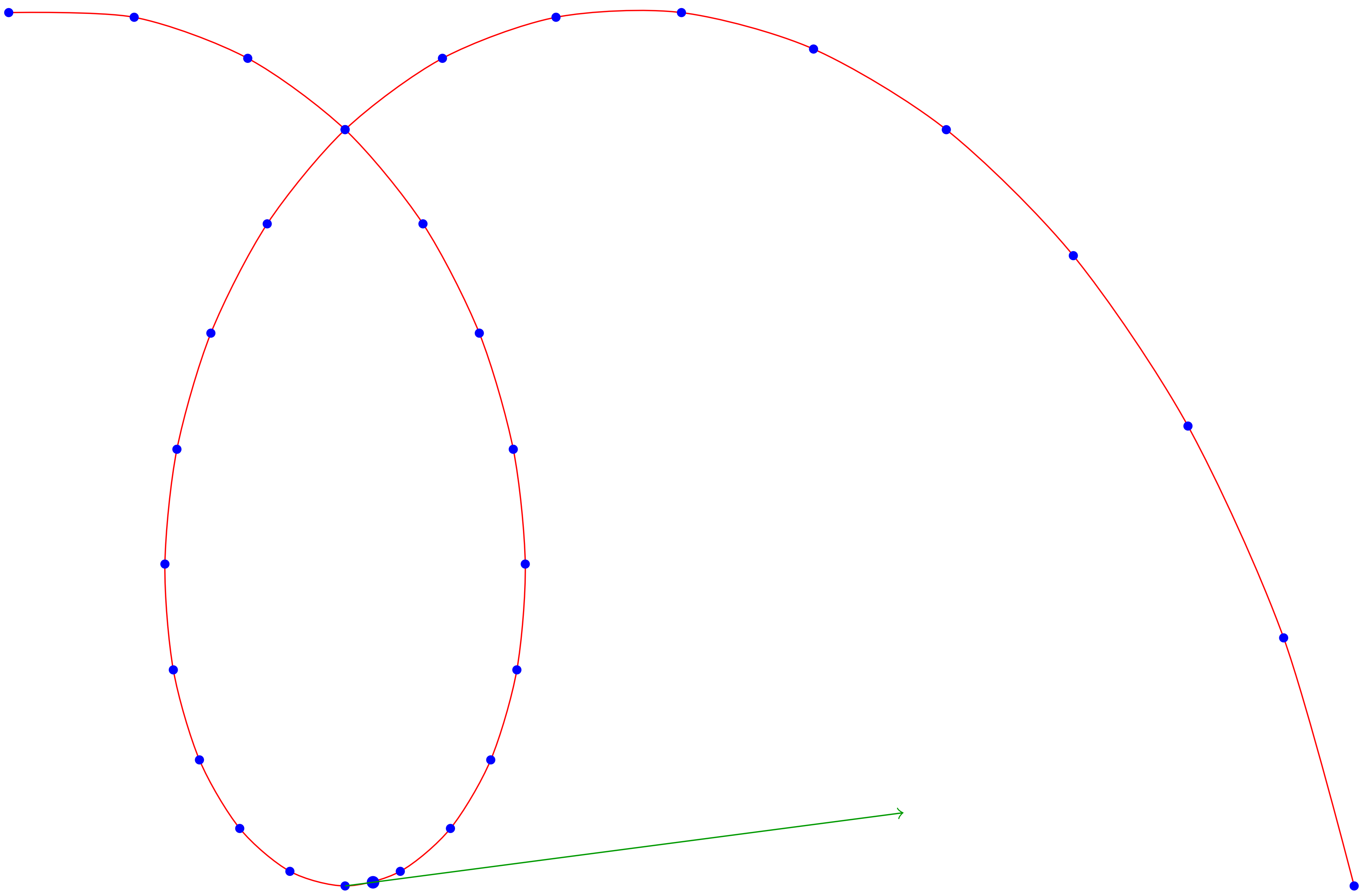
Der Tangentenvektor V



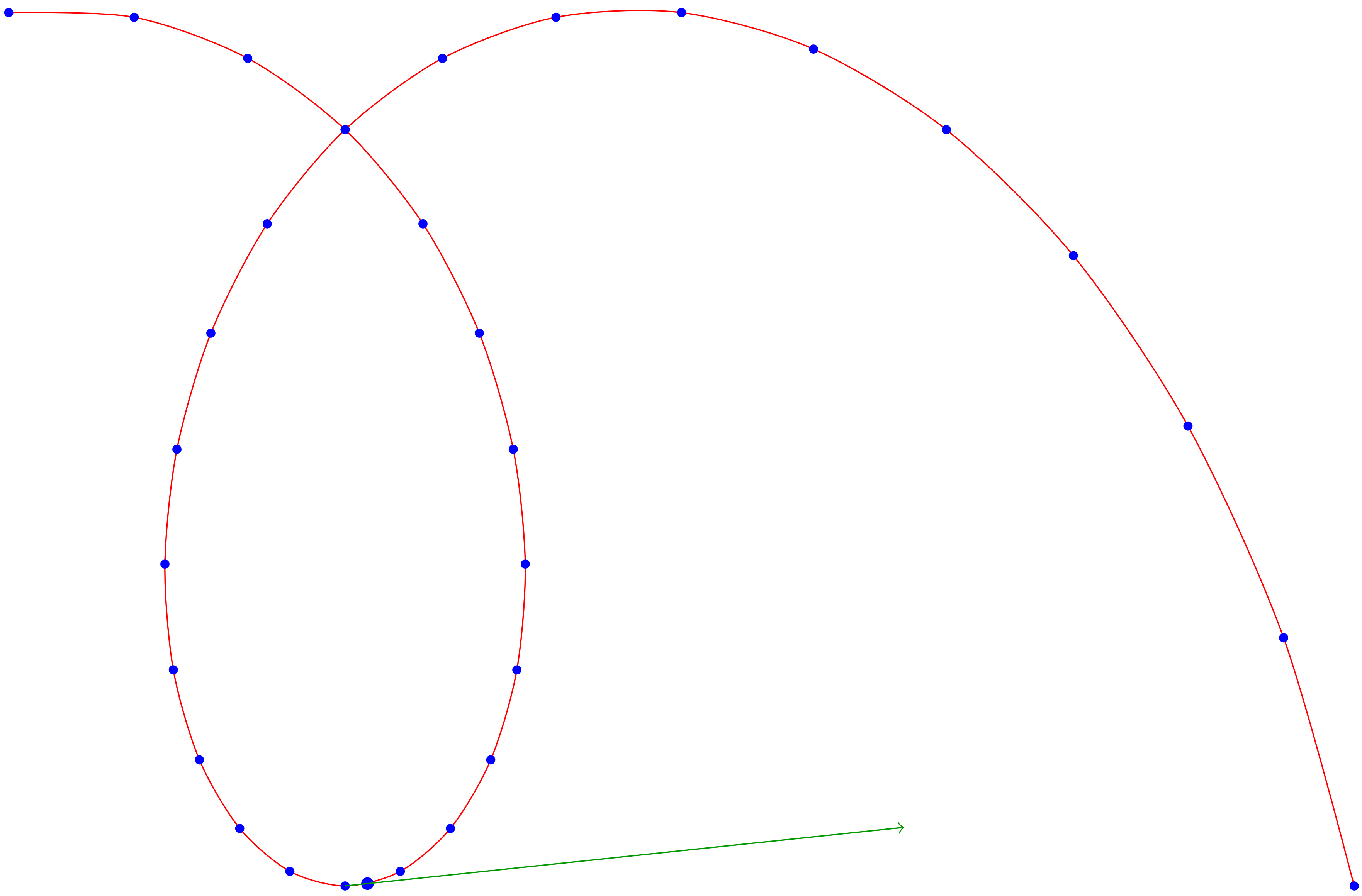
Der Tangentenvektor V



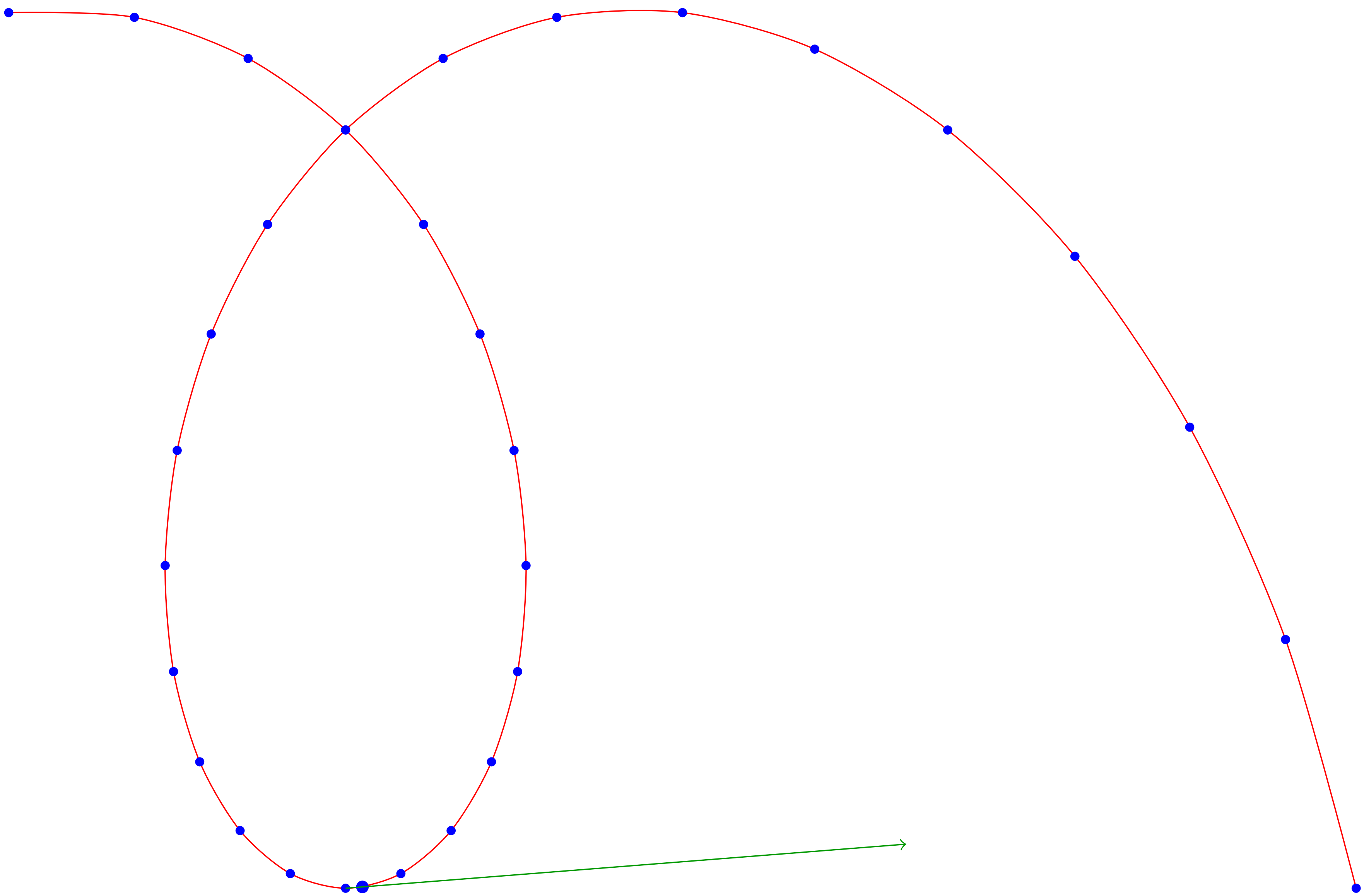
Der Tangentenvektor V



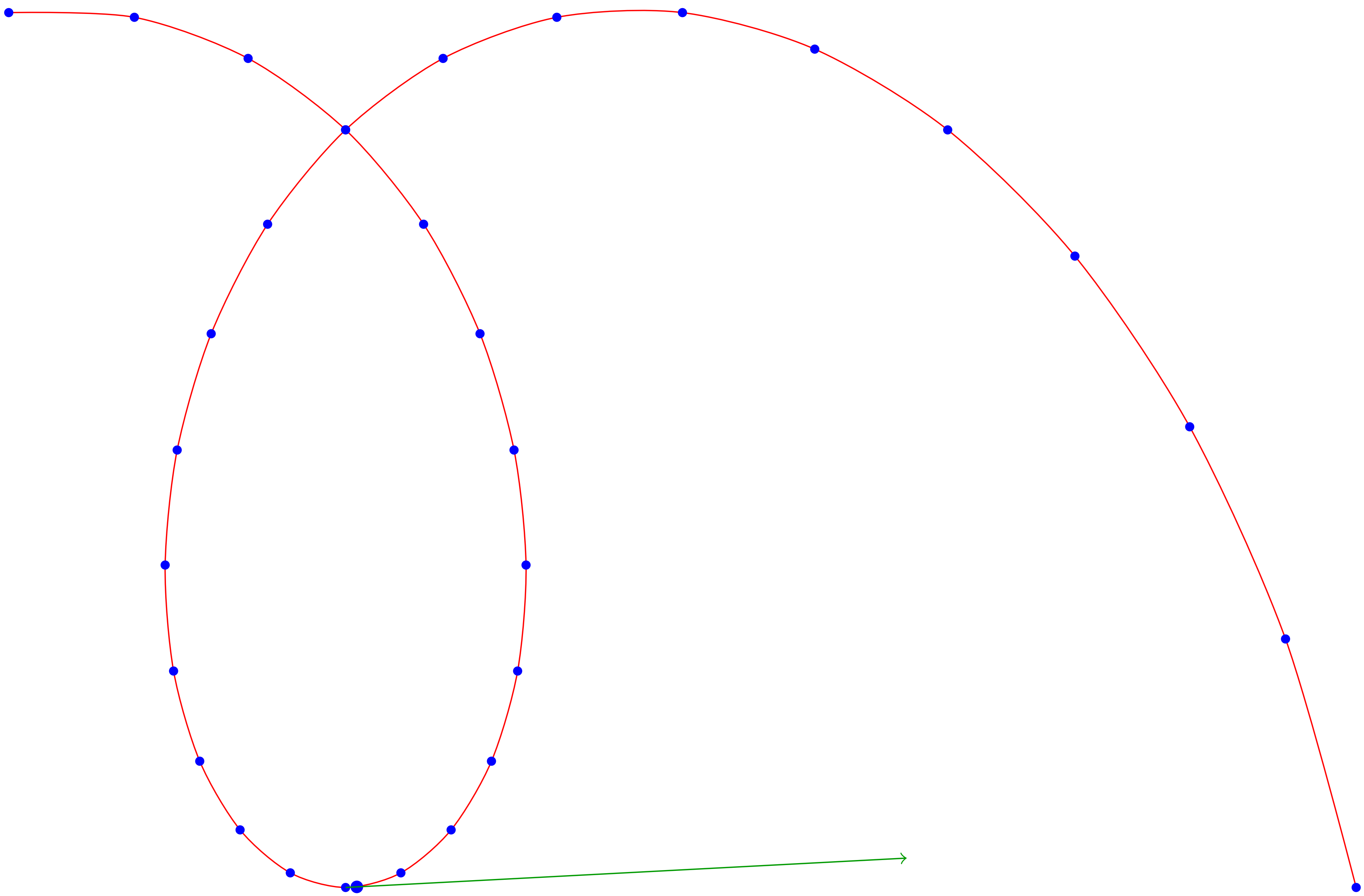
Der Tangentenvektor V



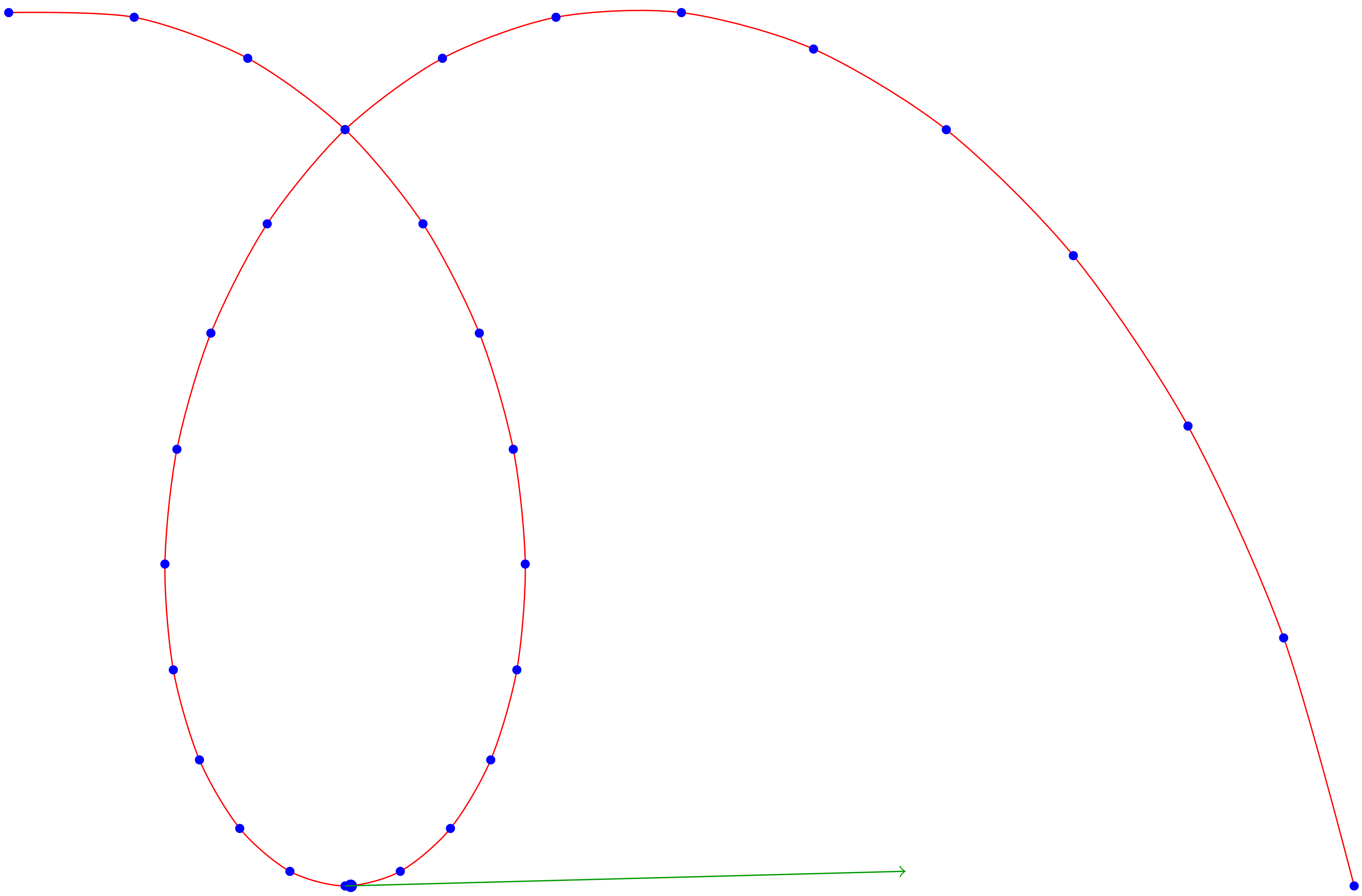
Der Tangentenvektor V



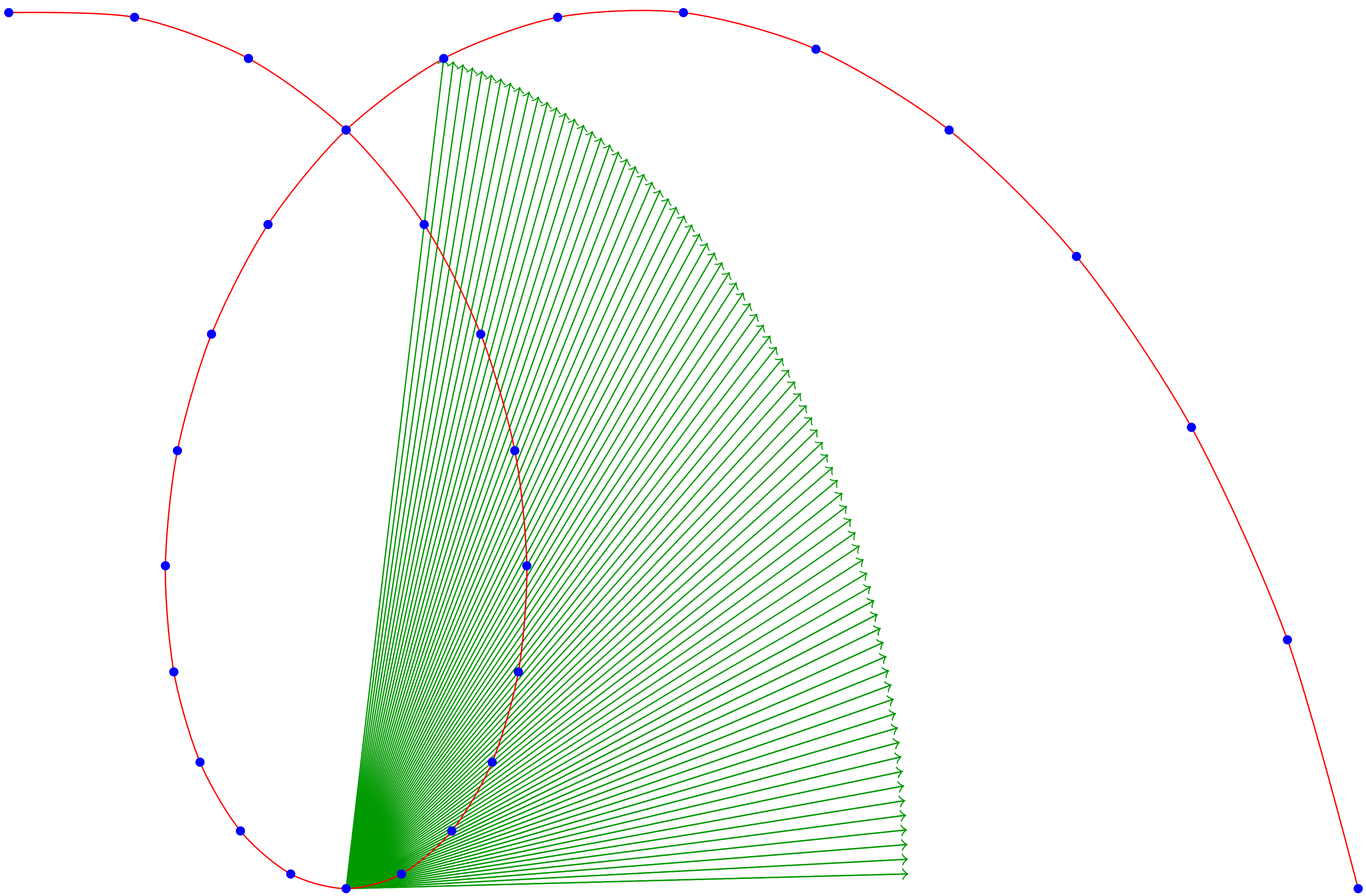
Der Tangentenvektor V



Der Tangentenvektor V



Der Tangentenvektor V



Unabhängigkeit der Kurvenlänge von der Parametrisierung

Satz 15.15. *Die Kurvenlänge ist unabhängig von der Parametrisierung: Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve und $g : J \to I$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $g' \geq 0$, und $\kappa := \gamma \circ g$ die Verkettung. Dann ist $\kappa : J \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve, und es gilt für $a, b \in J$:*

$$\int_a^b |\dot\kappa(\zeta)| \,\mathrm{d}\,\zeta = \int_{g(a)}^{g(b)} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Beweis. Mit der Kettenregel, angewendet auf die Koordinatenfunktionen, haben wir:

$$\dot\kappa(t) = \dot\gamma(g(t))\, g'(t) \qquad \text{und mit } g' \geq 0 \text{ auch} \qquad |\dot\kappa(t)| = |\dot\gamma(g(t))|\, g'(t)$$

Die Abbildung $t \mapsto |\dot\gamma(t)|$ ist stetig. Also ist mit der Substitutionsregel (14.44):

$$\int_a^b |\dot\kappa(\zeta)| \,\mathrm{d}\,\zeta = \int_a^b |\dot\gamma(g(\zeta))|\, g'(\zeta) \,\mathrm{d}\,\zeta = \int_{g(a)}^{g(b)} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Eine infinitesimale Dreicksungleichung I

Lemma 15.16. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle t differenzierbar. Ferner sei $\gamma(t) \neq 0$. Dann ist auch die Funktion $x \mapsto |\gamma(x)|$ an der Stelle t differenzierbar und es gilt:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,|\gamma(t)| \leq |\dot{\gamma}(t)|$$

Die Ableitung der Norm ist nicht größer als die Norm der Ableitung.

Beweis. Differenzierbarkeit von $|\gamma(x)|$ ergibt sich aus $\gamma(t) \neq 0$ mit der Kettenregel: $|\gamma(x)|$ ist die Wurzel aus einer Summe von quadraten differenzierbarer Funktionen.

Zur Abschätzung nutzen wir (15.4). Es ist

$$\langle \gamma(t)\,, \dot{\gamma}(t) \rangle^2 \leq \langle \gamma(t)\,, \gamma(t) \rangle \, \langle \dot{\gamma}(t)\,, \dot{\gamma}(t) \rangle$$

Es folgt:

$$\frac{\langle \gamma(t)\,, \dot{\gamma}(t) \rangle^2}{\langle \gamma(t)\,, \gamma(t) \rangle} \leq \langle \dot{\gamma}(t)\,, \dot{\gamma}(t) \rangle$$

Eine infinitesimale Dreiecksungleichung II

Lemma 15.16. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle t differenzierbar. Ferner sei $\gamma(t) \neq 0$. Dann ist auch die Funktion $x \mapsto |\gamma(x)|$ an der Stelle t differenzierbar und es gilt:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,|\gamma(t)| \leq |\dot{\gamma}(t)|$$

Beweis (Fortsetzung). Mit $\frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle^2}{\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle} \leq \langle \dot{\gamma}(t)\,, \dot{\gamma}(t)\rangle$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,|\gamma(t)| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sqrt{\langle \gamma(t)\,, \gamma(t)\rangle} = \frac{2\,\langle \gamma(t)\,, \dot{\gamma}(t)\rangle}{2\,|\gamma(t)|} \leq |\dot{\gamma}(t)|$$

Dabei benutzen wir die Kettenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sqrt{f(t)} = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$ für $f(t) \neq 0$ und:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\langle \gamma(t)\,, \gamma(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)^2 = 2\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)\,\dot{\gamma}_i(t) = 2\,\langle \gamma(t)\,, \dot{\gamma}(t)\rangle$$

q.e.d.

Satz 15.17. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt: Für je zwei Zeiten $s < t$ in I ist*

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \int_s^t |\dot{\gamma}(\xi)| \, \mathrm{d}\, \xi$$

Insbesondere ist keine stetig differenzierbare Kurve zwischen zwei Punkten kürzer als die gerade Stecke.

Beweis. Eine verschobene Kurve $t \mapsto \gamma(t) + \mathbf{u}$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, hat zu jeder Zeit dieselbe Ableitung und auch die Abstände durchlaufener Punkte bleiben gleich. Mit der Wahl $\mathbf{u} = -\gamma(s)$ können wir also o.B.d.A. annehmen, daß $\gamma(s) = 0$ ist. Dann ist die Ungleichung

$$|\gamma(t)| \leq \int_s^t |\dot{\gamma}(\xi)| \, \mathrm{d}\, \xi$$

zu zeigen.

Kurvenlänge und Abstand II

Satz 15.17. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(s) = 0$. Dann gilt für $t > s$:*

$$|\gamma(t)| \leq \int_s^t |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Beweis (Fortsetzung). Die Idee ist, Lemma (15.16) anzuwenden. Wir möchten schreiben:

$$|\gamma(t)| = |\gamma(t)| - |\gamma(s)| = \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} |\gamma(x)| \Big|_{x=\xi} \mathrm{d}\,\xi \leq \int_s^t |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Leider geht das nicht, weil an den Stellen mit $\gamma(\xi) = 0$, der Integrand $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} |\gamma(x)| \big|_{x=\xi}$ nicht definiert ist (Erinnerung: die Wurzelfunktion hat an der Stelle 0 keine Ableitung).

Wir behelfen uns wiefolgt. Sei $\bar{s} := \sup \{x \in [s,t] \mid \gamma(x) = 0\}$. Da γ stetig ist, gilt $\gamma(\bar{s}) = 0$. Damit ist $\bar{s}$ der *späteste* Zeitpunkt in $[s,t]$ mit $\gamma(\bar{s}) = 0$.

Satz 15.17. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(\bar{s}) = 0$. Sei $t > \bar{s}$ und $\dot{\gamma}$ sei $\neq 0$ auf $(\bar{s}, t]$. Dann gilt:*

$$|\gamma(t)| \leq \int_{\bar{s}}^{t} |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Beweis (Fortsetzung). Für jedes $x \in (\bar{s}, t)$ ist dann mit Lemma (15.16):

$$|\gamma(t)| - |\gamma(x)| \underset{(14.33)}{=} \int_{x}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} |\gamma(\xi)| \Big|_{x=\xi} \mathrm{d}\,\xi \leq \int_{x}^{t} |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Nun sind beide Seiten als Funktion von x stetig auch in der Stelle $x = \bar{s}$. Darum gilt auch die Ungleichung:

$$|\gamma(t)| = |\gamma(t)| - |\gamma(\bar{s})| \leq \int_{\bar{s}}^{t} |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \leq \int_{s}^{t} |\dot{\gamma}(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Ausblick zur Länge *stetiger* Kurven

Definition 15.18. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Kurve. Die Kurve γ ist von beschränkter Variation im Intervall $[a, b] \subseteq I$, wenn die Menge

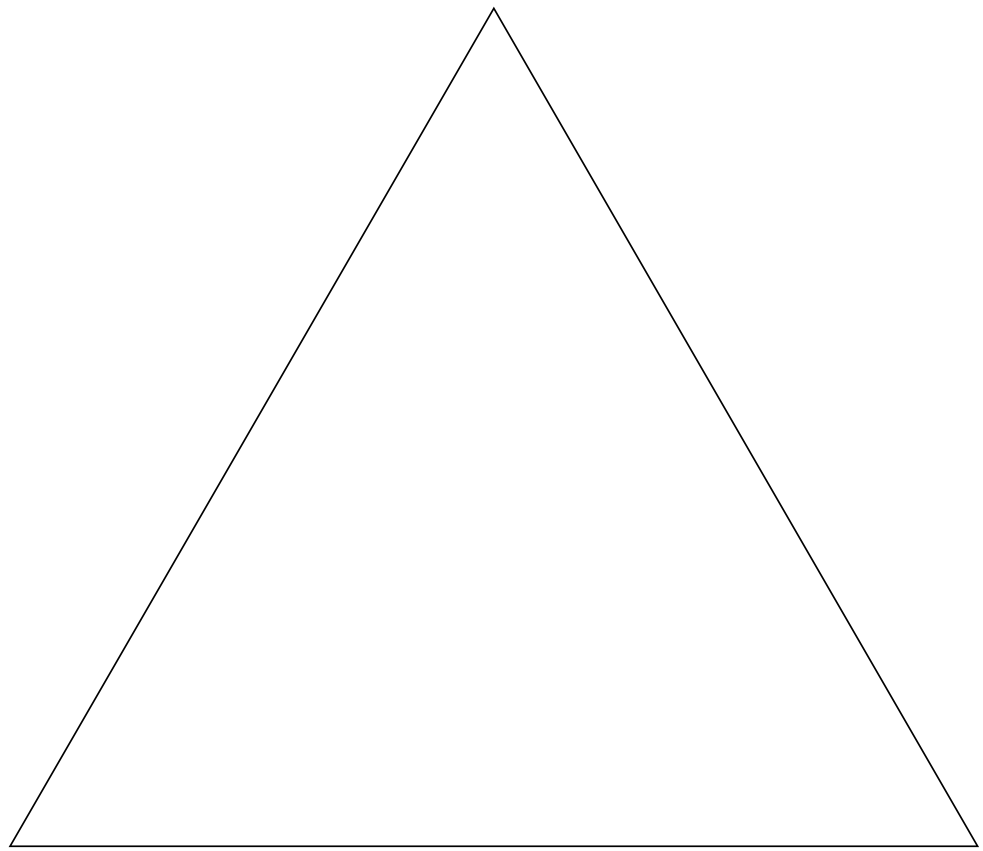
$$\mathrm{L}_\gamma(a,b) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})| \;\middle|\; a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b \text{ Unterteilung} \right\}$$

der Längen einbeschriebener Polygonzüge beschränkt ist. In diesem Fall heißt ihr Supremum $\mathrm{Var}_\gamma(a,b) := \sup \mathrm{L}_\gamma(a,b)$ die totale Variation der Kurve γ im Intervall $[a, b] \subseteq I$.

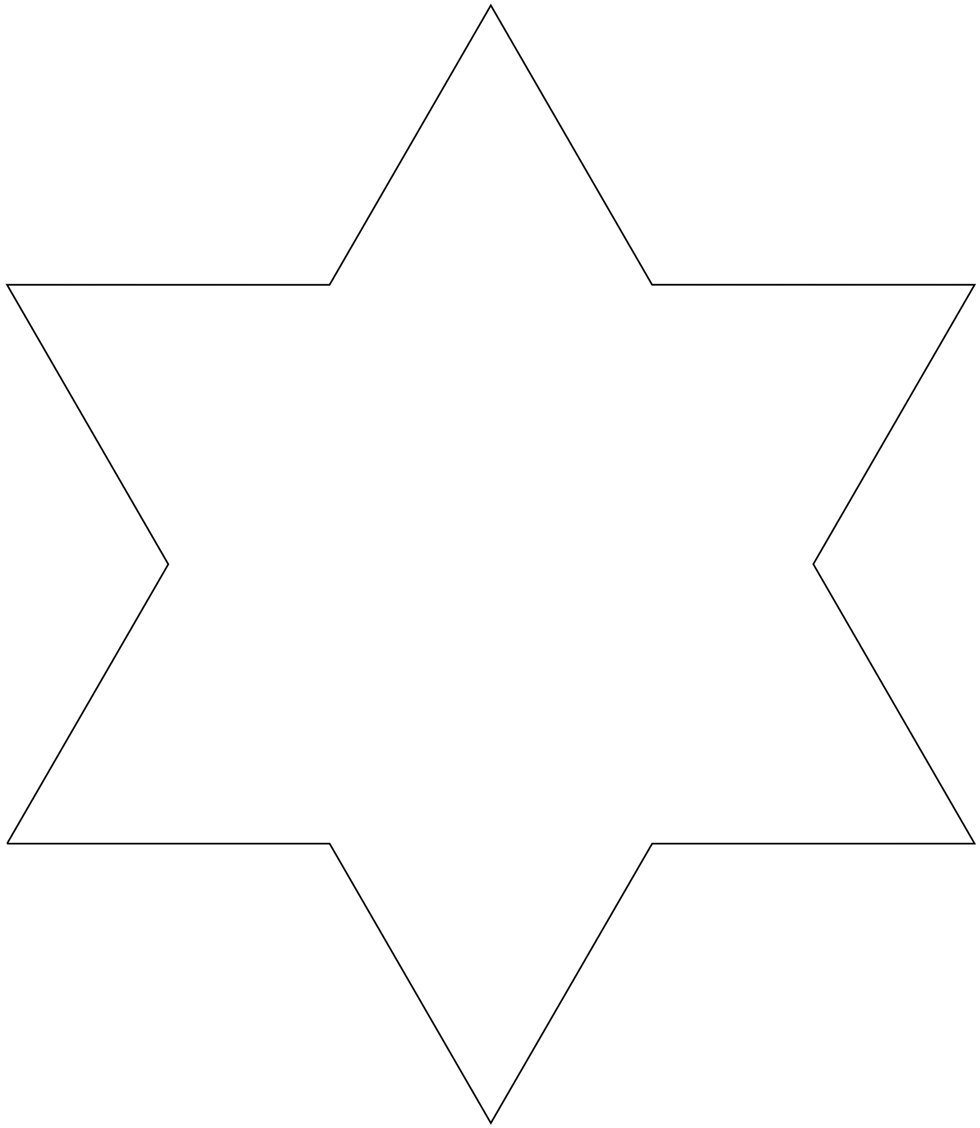
Satz 15.21. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist sie von beschränkter Variation auf jedem kompakten Teilintervall ihres Definitionsbereichs. Ferner stimmen Kurvenlänge und totale Variation überein:*

$$\mathrm{Var}_\gamma(a,b) = \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \qquad \forall [a,b] \subset I$$

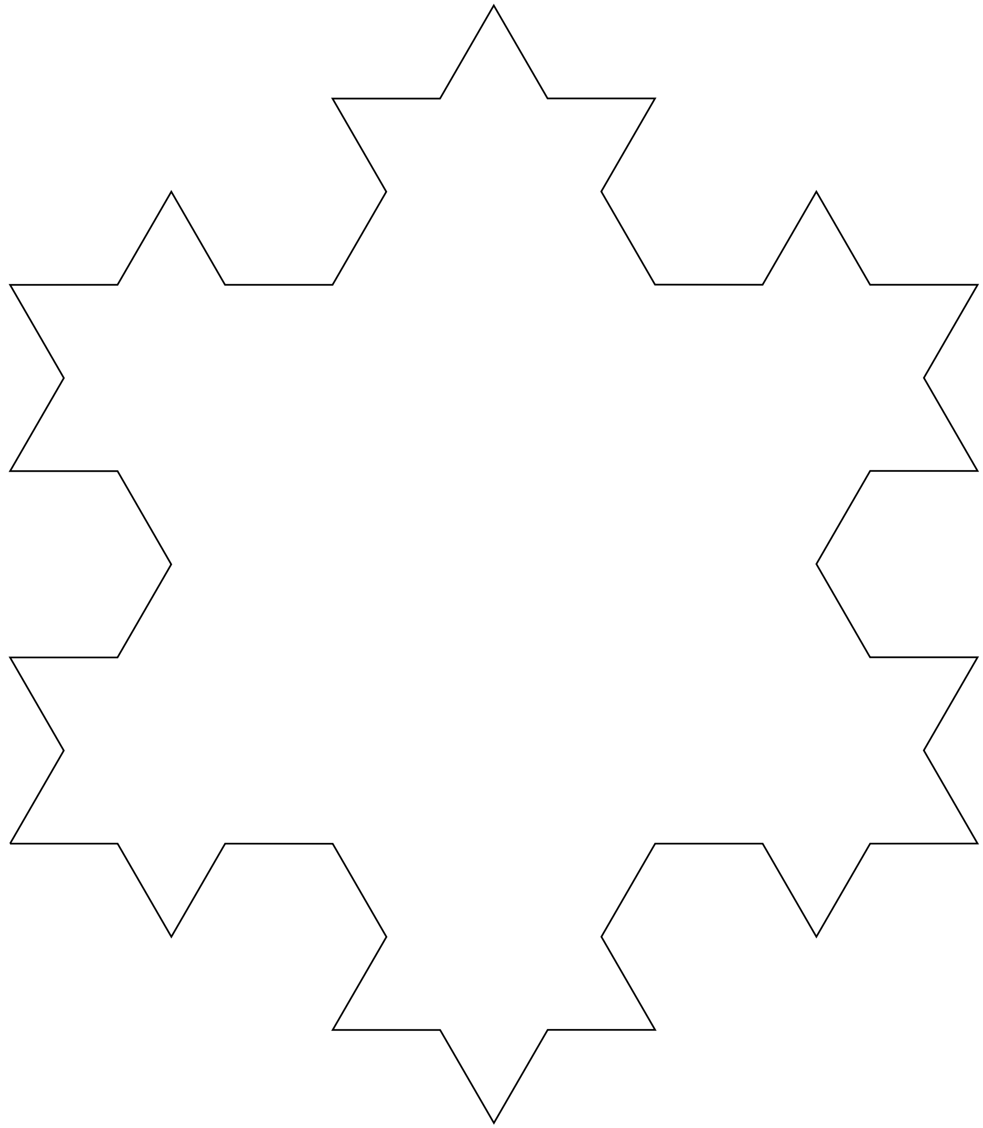
Kochkurven



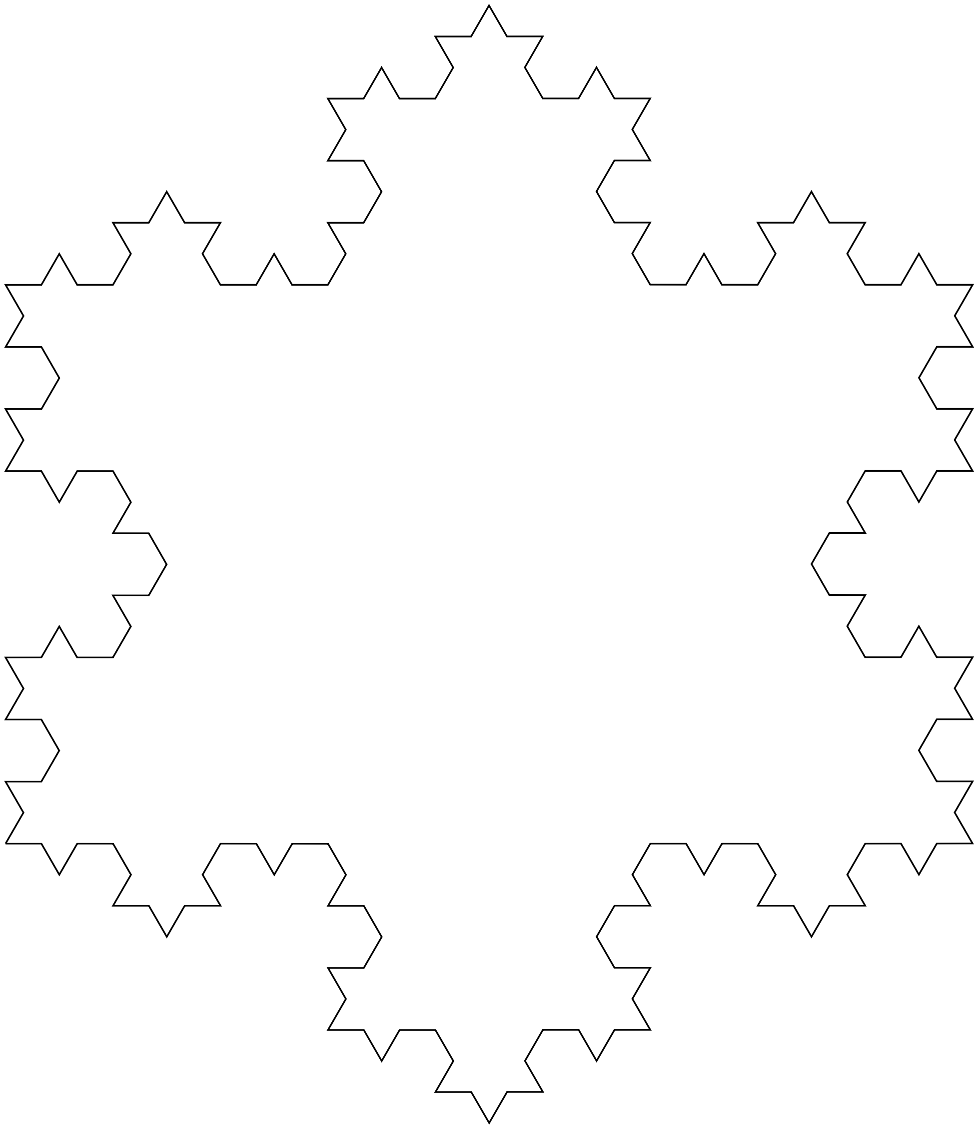
Kochkurven



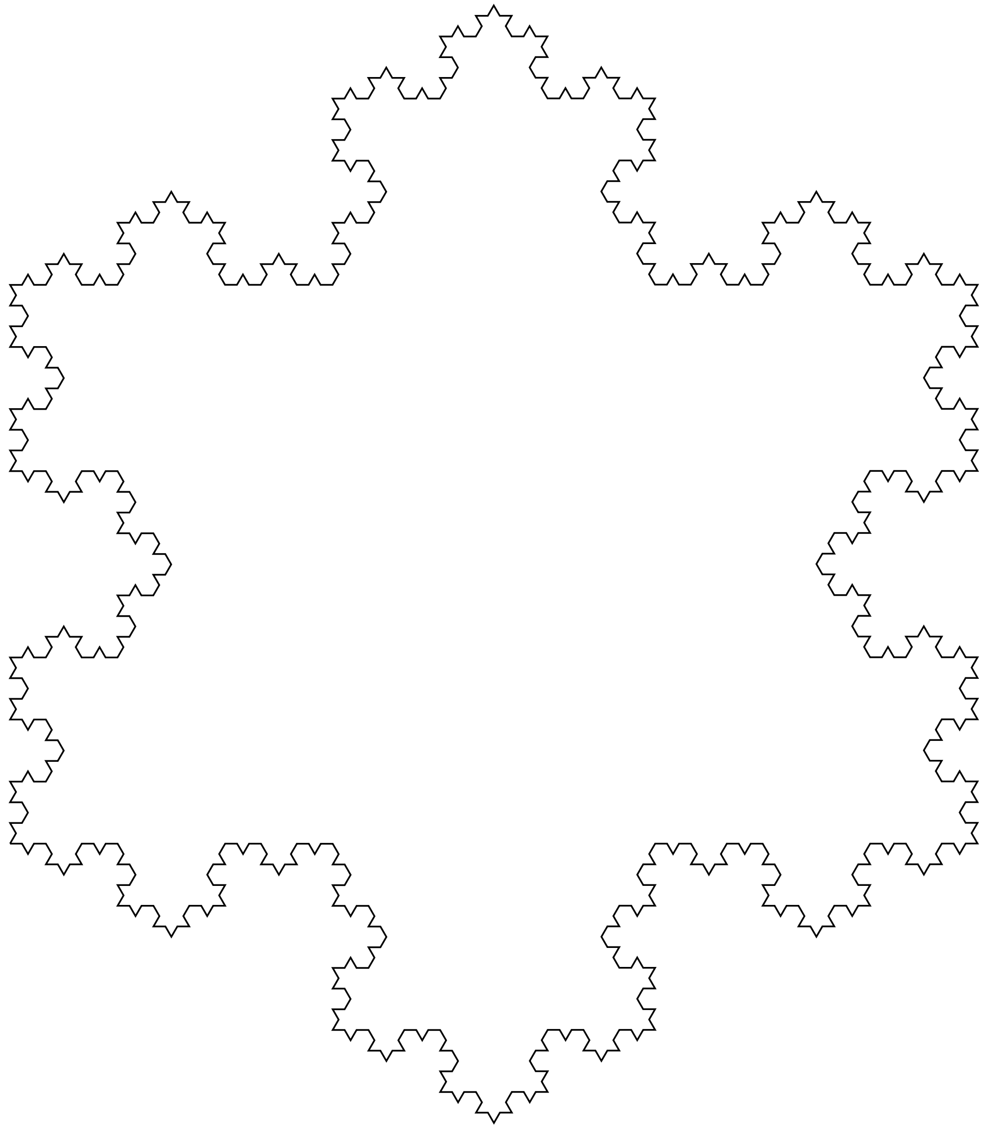
Kochkurven



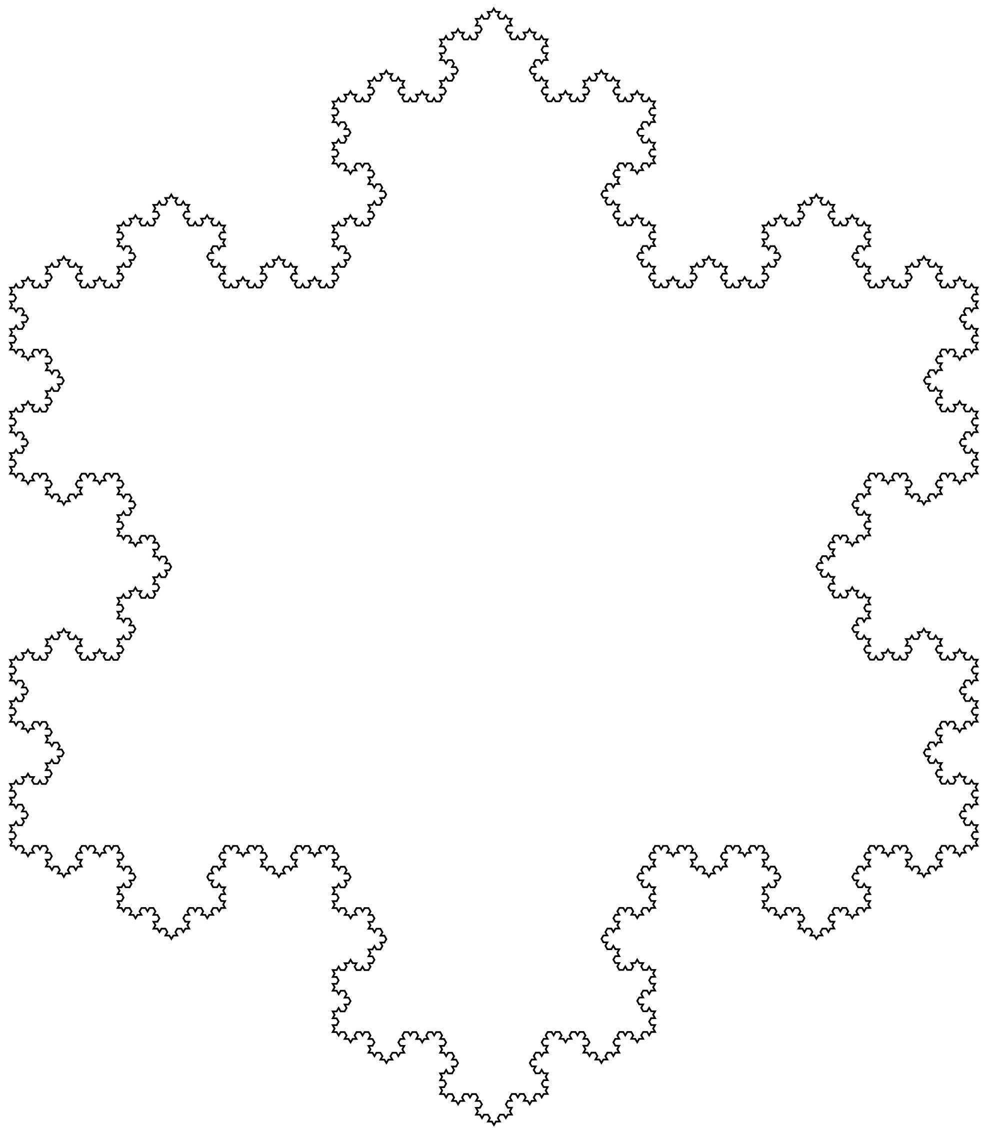
Kochkurven



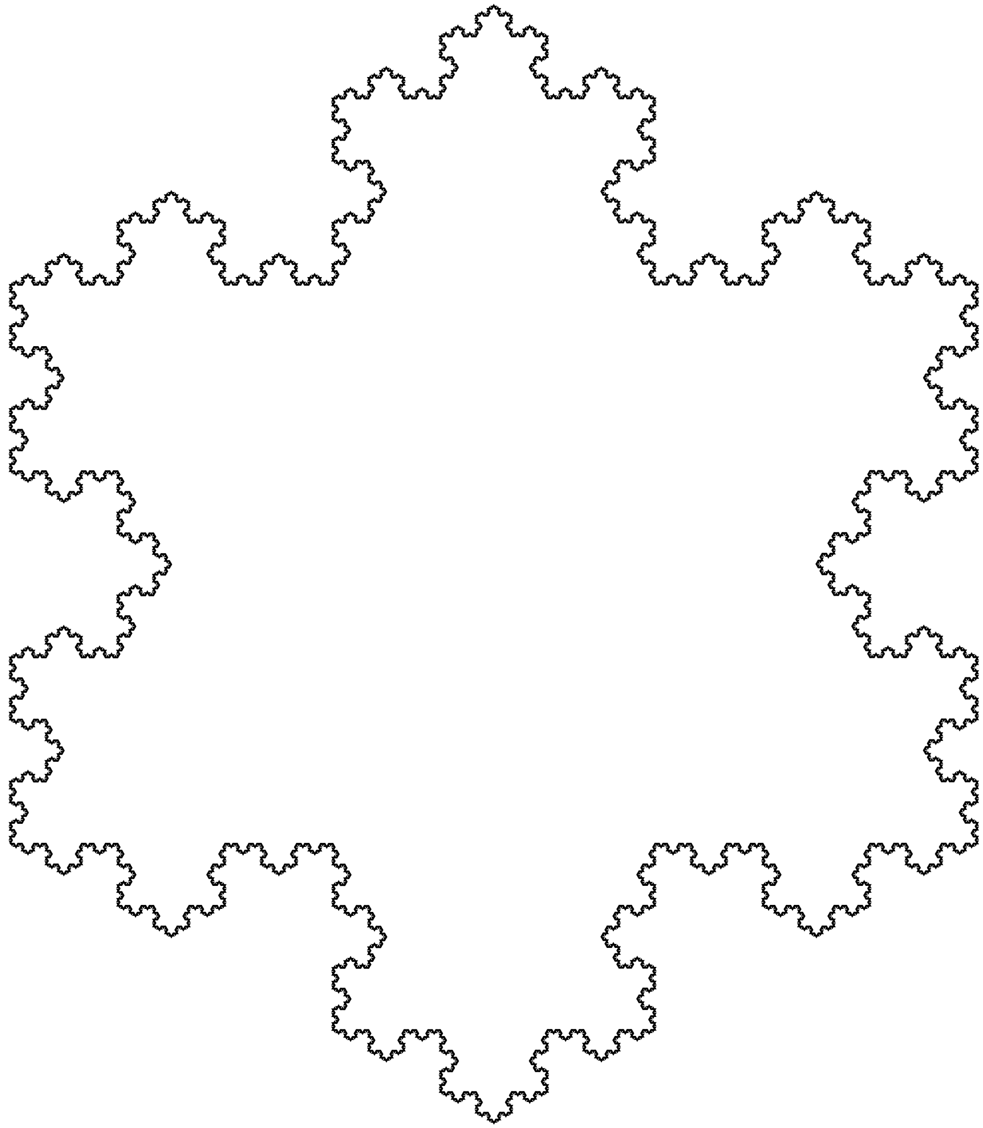
Kochkurven



Kochkurven



Kochkurven



Totale Variation ist additiv

Aufgabe 15.19. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig und von beschränkter Variation im Definitionsbereich. Sei ferner $c \in [a,b]$. Zeige:

1. Die Kurve γ ist von beschränkter Variation in den Intervallen $[a,c]$ und $[c,b]$.

2. Die totale Variation ist additiv:

$$\mathrm{Var}_\gamma(a,b) = \mathrm{Var}_\gamma(a,c) + \mathrm{Var}_\gamma(c,b)$$

Totale Variation und Kurvenlänge I

Satz 15.21. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist sie von beschränkter Variation auf jedem kompakten Teilintervall ihres Definitionsbereichs. Ferner stimmen Kurvenlänge und totale Variation überein:*

$$\mathrm{Var}_\gamma(a,b) = \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \qquad \forall [a,b] \subset I$$

Beweis. Sei $\mathcal{J} = \{a = a_0 < a_1 < \cdots\cdots < a_n = b\}$ eine Unterteilung von $[a,b]$. Dann ist mit (15.17):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})|}_{\in \mathrm{L}_\gamma(a,b)} \underset{(15.17)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi = \int_{a_0}^{a_n} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Also ist $\int_{a_0}^{a_n} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$ eine obere Schranke von $\mathrm{L}_\gamma(a,b)$. Also ist γ von beschränkter Variation auf $[a,b]$, und es gilt

$$\mathrm{Var}_\gamma(a,b) \leq \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Totale Variation und Kurvenlänge II

Satz 15.21. *Für eine stetig differenzierbare Kurve* $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ *und ein Intervall* $[a,b] \subset I$ *gilt:* $\operatorname{Var}_\gamma(a,b) = \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$.

Beweis. Wir folgern mit der Additivität der Variation (15.19), daß für feste a und $t < x$ gilt:

$$\underbrace{|\gamma(x)-\gamma(t)|}_{\in \mathrm{L}_\gamma(x,t)} \leq \operatorname{Var}_\gamma(x,t) = \operatorname{Var}_\gamma(a,x) - \operatorname{Var}_\gamma(a,t) \leq \int_t^x |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

Also auch:

$$\left|\frac{\gamma(x)-\gamma(t)}{x-t}\right| \leq \frac{\operatorname{Var}_\gamma(a,x) - \operatorname{Var}_\gamma(a,t)}{x-t} \leq \frac{1}{x-t}\int_t^x |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$$

In dieser Form gilt die Ungleichungskette jedoch auch für $x < t$, denn alle drei Terme bleiben unverändert, wenn die Rollen von x und t vertauscht werden: links ändern Zähler und Nenner beide ihre Vorzeichen, in der Mitte ebenso, und im rechten Term ändert der Vorfaktor sein Vorzeichen, aber auch das Integral.

Totale Variation und Kurvenlänge III

Satz 15.21. *Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ und ein Intervall $[a, b] \subset I$ gilt:* $\mathrm{Var}_\gamma(a, b) = \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi$.

Beweis. Sei nun $x_\star$ eine beliebige Folge in $I \setminus \{t\}$, die gegen t konvergiert. Dann gilt:

$$\underbrace{\left|\frac{\gamma(x_\star) - \gamma(t)}{x_\star - t}\right|}_{\text{konvergiert gegen } |\dot\gamma(t)|} \leq \frac{\mathrm{Var}_\gamma(a, x_\star) - \mathrm{Var}_\gamma(a, t)}{x_\star - t} \leq \underbrace{\frac{1}{x_\star - t} \int_t^{x_\star} |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi}_{\text{konvergiert gegen } |\dot\gamma(t)|}$$

Darum konvergiert $\frac{\mathrm{Var}_\gamma(a,x_\star) - \mathrm{Var}_\gamma(a,t)}{x_\star - t}$ gegen $|\dot\gamma(t)|$ durch Einschnürung (10.3). Also ist $t \mapsto \mathrm{Var}_\gamma(a, t)$ differenzierbar$_{\text{lim}}$ mit Ableitung $|\dot\gamma(t)|$. Daraus folgt

$$\mathrm{Var}_\gamma(a, b) = \int_a^b |\dot\gamma(\xi)| \,\mathrm{d}\,\xi \qquad \forall [a, b] \subset I$$

mit dem Hauptsatz. **q.e.d.**

Die Gleichung $z^2 = -1$

Wir können mit Ausdrücken der Form $x + \mathrm{i}\, y$ rechnen und dabei *so tun, als ob* $\mathrm{i}^2 = -1$ wäre:

$$\begin{aligned}
(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}\, (y_1 \pm y_2) \\
(x_1 + \mathrm{i}\, y_1)(x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &= x_1 x_2 + x_1\, \mathrm{i}\, y_2 + \mathrm{i}\, y_1 x_2 + \mathrm{i}\, y_1\, \mathrm{i}\, y_2 \\
&= x_1 x_2 + \mathrm{i}\, x_1 y_2 + \mathrm{i}\, y_1 x_2 + \mathrm{i}^2\, y_1 y_2 \\
&= x_1 x_2 + \mathrm{i}\, x_1 y_2 + \mathrm{i}\, y_1 x_2 - y_1 y_2 \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}\, (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
\frac{1}{x + \mathrm{i}\, y} &= \frac{1}{x + \mathrm{i}\, y} \frac{x - \mathrm{i}\, y}{x - \mathrm{i}\, y} \\
&= \frac{x - \mathrm{i}\, y}{x^2 - \mathrm{i}^2\, y^2} \\
&= \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\, \frac{y}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß Summen, Differenzen, Produkte und Kehrwerte von Ausdrücken der Form $x + \mathrm{i}\, y$ stets wieder auf diese Form gebracht werden können.

Die Menge der komplexen Zahlen

Definition 16.1. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von Paaren reeller Zahlen (x, y) zusammen mit den Verknüfpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Mit diesen beiden Verknüpfungen ist $\mathbb{C}$ ein Körper. Additives und multiplikatives Inverses sind gegeben durch

$$-(x, y) = (-x, -y)$$
$$\frac{1}{(x, y)} := (\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2})$$

Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl, dann nennen wir x ihren Realteil und y ihren Imaginärteil.

Aufgabe 16.2. Rechne nach, daß $\mathbb{C}$ ein Körper ist.

Bemerkung 16.3 / Aufgabe 16.4. Die Teilmenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$$

ist gegenüber Addition, Subtraktion, Multipplikation und Division abgeschlossen. Die sie ist Bild des Körperhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Vermöge dieser Einbettung fassen wir $\mathbb{R}$ als Teil von $\mathbb{C}$ auf. (Formal: wir nutzen einen vollständigen archimedisch geordneten Körper zur Konstruktion von $\mathbb{C}$, sehen, daß das Bild dieser Abbildung wieder ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper ist, und nennen den dann $\mathbb{R}$.)

Wir haben also nun die Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Notation 16.5. *Wir setzen:*

$$\mathrm{i} := (0, 1)$$

Dann ist $\mathrm{i}^2 = (0^2 - 1^2, 2 \cdot 0 \cdot 1)$*. Wir nennen* i *die imaginäre Einheit. Damit schreiben wir:*

$$(x, y) = x + \mathrm{i}\, y$$

Nun können wir in $\mathbb{C}$ *die einleitenden Rechnungen glatt nachvollziehen.*

Insbesondere gilt:

Die Gleichung $z^2 = -1$ *hat in* $\mathbb{C}$ *zwei Lösungen, nämlich* i *und* $-\mathrm{i}$.

Proposition 16.6. *Die Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

ist abgeschlossen unter Matrixaddition und Matrixmultiplikation. Mit diesen beiden Verknüpfungen ist sie ein zu $\mathbb{C}$ isomorpher Körper. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$x + \mathrm{i}\, y \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Beweis. Die Formeln für Matrizenaddition und -multiplikation lauten:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Komplexe Zahlen als Matrizen II

Proposition 16.6. *Die Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

ist abgeschlossen unter Matrixaddition und Matrixmultiplikation. Mit diesen beiden Verknüpfungen ist sie ein zu $\mathbb{C}$ isomorpher Körper. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$x + \mathrm{i}\, y \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir spezialisieren auf Matrizen der gegebenen Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

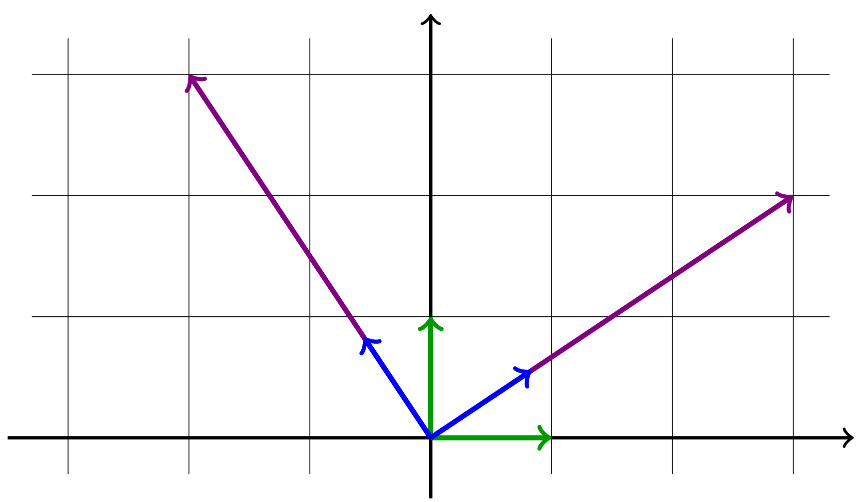
$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & -x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 & -y_1 y_2 + x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, wie die Regeln der Matrizenrechnung die Vorschriften für Addition und Multiplikation komplexer Zahlen abbilden. **q.e.d.**

Bemerkung 16.7. Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehstreckung: Multiplikation mit der Matrix schickt den Standardeinheitsvektor $\binom{1}{0}$ auf $\binom{x}{y}$ und $\binom{0}{1}$ auf $\binom{-y}{x}$. Nun stehen $\binom{x}{y}$ und $\binom{-y}{x}$ senkrecht aufeinander, weil ihr Skalarprodukt verschwindet. Außerdem sind sie gleich lang mit Länge $\sqrt{x^2+y^2}$.

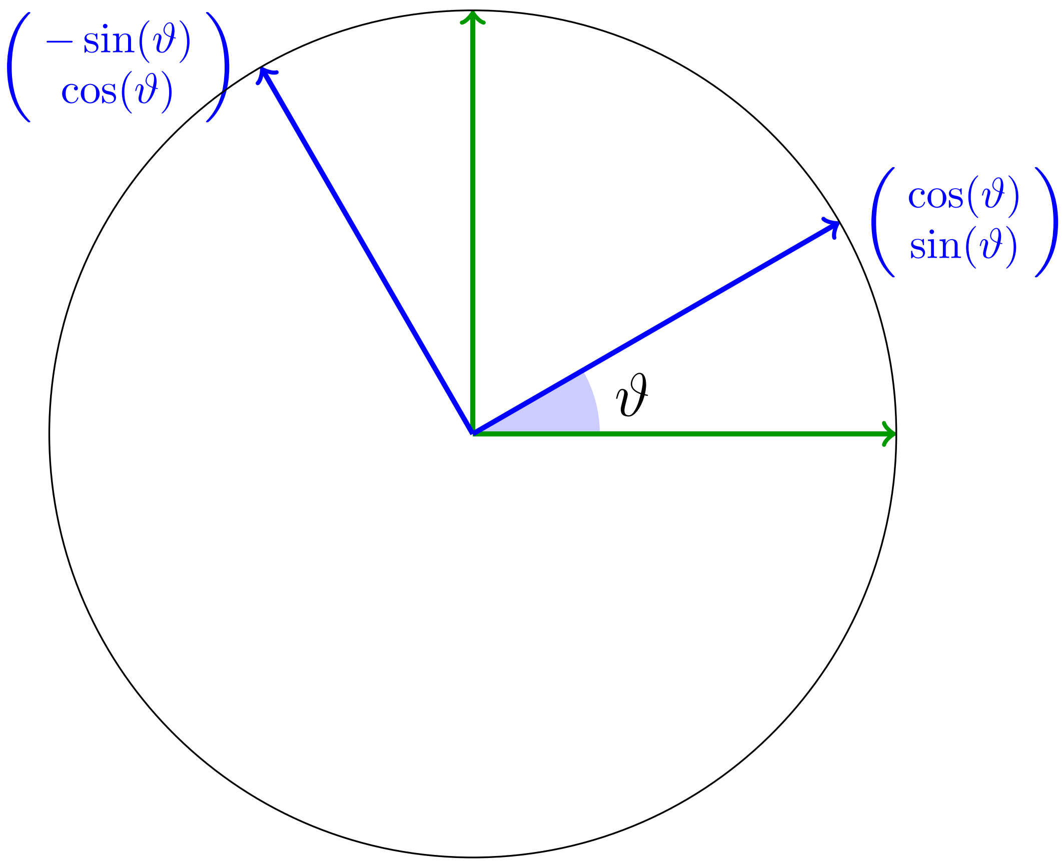


$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Komplexe Zahlen als Drehstreckungen II

Bemerkung 16.7. Eine Drehung um den Winkel ϑ wird beschrieben durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$



Bemerkung 16.7. und eine Streckung um den Faktor r wird beschrieben durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also gibt es zu x und y einen Winkel ϑ, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=:r} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Den Winkel ϑ können wir daraus ermitteln, denn es folgt durch Betrachtung des Eintrags unten links:

$$y = \sin(\vartheta)\sqrt{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Für den Fall $x = y = 0$ ist der Winkel ϑ nicht eindeutig bestimmt.

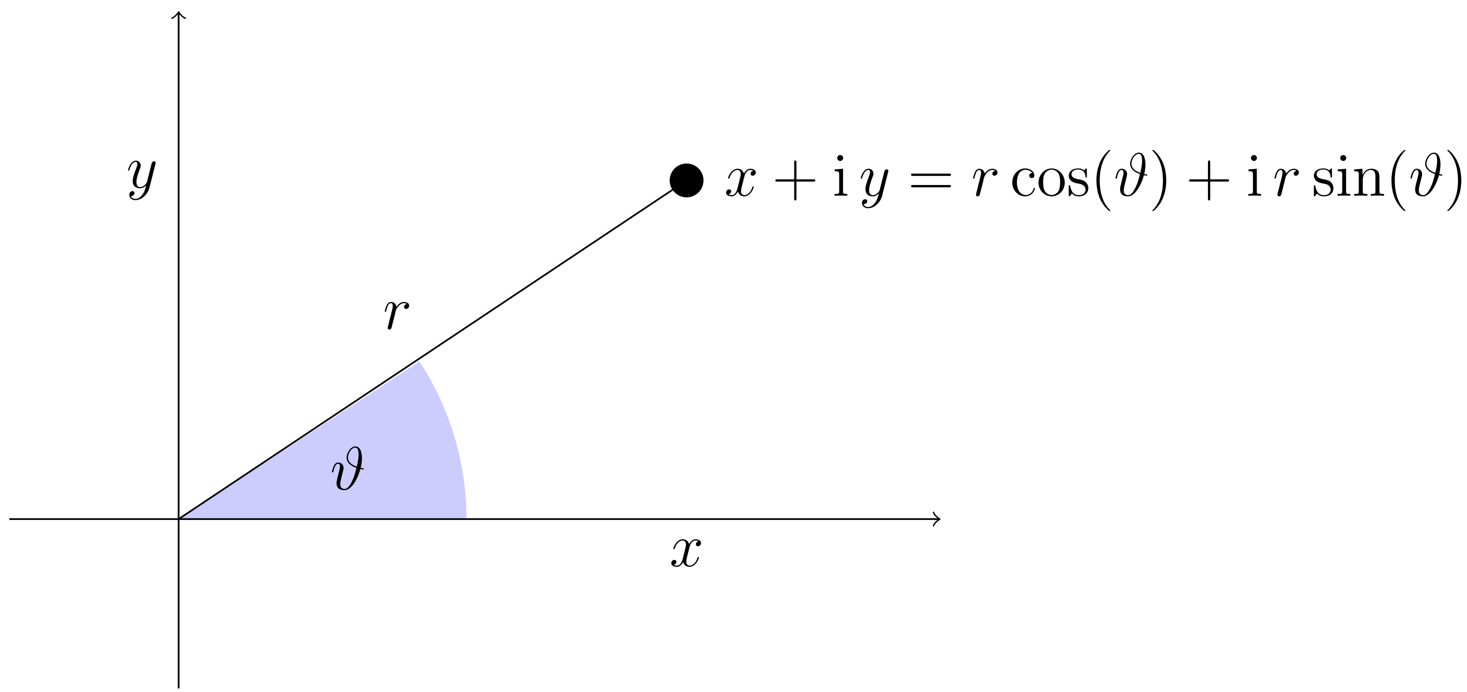
Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Bemerkung 16.7. In

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=:r} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

kann auch die ganze linke Spalte der Matrix betrachten und sieht damit:

$$x = r\cos(\vartheta) \qquad \text{und} \qquad y = r\sin(\vartheta)$$



Betrag und Argument

Definition 16.8. Stellen wir eine komplexe Zahl $x + \mathrm{i}\, y$ in Polarkoordinaten dar als $x + \mathrm{i}\, y = r\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\, r\sin(\vartheta)$ so heißt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag der komplexen Zahl $x + \mathrm{i}\, y$, und der Winkel $\vartheta = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ist ihr Argument. Man schreibt dafür auch

$$r = |x + \mathrm{i}\, y|$$
$$\vartheta = \arg(x + \mathrm{i}\, y)$$

Bemerkung 16.9. Wir beobachten, daß der Betrag einer komplexen Zahl uns schon bekannt ist: er ist durch dieselbe Formel gegeben wie die Länge des Vektors $\binom{x}{y}$. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$:

$$\boxed{|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \qquad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}}$$

Bemerkung 16.10. Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multiplizieren sich ihre Beträge und addieren sich ihre Argumente.

Dies läßt sich durch eine Rechnung bestätigen. Zunächst betrachten wir den Fall reiner Drehungen (d.h., die Beträge sind 1):

$$\begin{aligned}
&\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)=\\
&\quad=(\cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)-\sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2))+\mathrm{i}\,(\sin(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)+\cos(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2))\\
&\quad=(\cos(\vartheta_1)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_1))\cdot(\cos(\vartheta_2)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_2))
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned}
&r_1r_2\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+r_1r_2\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)=\\
&\quad=r_1r_2(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\sin(\vartheta_1+\vartheta_2))\\
&\quad=r_1r_2(\cos(\vartheta_1)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_1))\cdot(\cos(\vartheta_2)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_2))\\
&\quad=r_1(\cos(\vartheta_1)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_1))\cdot r_2(\cos(\vartheta_2)+\mathrm{i}\sin(\vartheta_2))\\
&\quad=(r_1\cos(\vartheta_1)+\mathrm{i}\,r_1\sin(\vartheta_1))\cdot(r_2\cos(\vartheta_2)+\mathrm{i}\,r_2\sin(\vartheta_2))
\end{aligned}$$

Folgen komplexer Zahlen: Konvergenz

Definition 16.11. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt komplexe Zahlenfolge oder Folge komplexer Zahlen. Wir bezeichen komplexe Zahlen üblicherweise mit z und entsprechend bezeichnet $z_\star$ eine Folge komplexer Zahlen.

Wir sagen, daß eine Folge $z_\star$ komplexer Zahlen gegen die komplexe Zahl z konvergiert, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h \ : \ |z - z_i| < \varepsilon$$

Dies ist formal dergleiche Begriff von Konvergenz wie für reelle Zahlenfolgen. Lediglich muß man die ε-Umgebung von z entsprechend definieren als:

$$\mathbb{B}_\varepsilon(z) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z - z'| < \varepsilon\}$$

Also $z_\star$ konvergiert gegen z, wenn in jeder ε-Umgebung von z fast alle Folgenglieder liegen.

Entsprechend ist z ein Häufungspunkt der Folge $z_\star$, wenn in jeder ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder liegen.

Folgen komplexer Zahlen: Konvergenz von Real- und Imaginärteil

Jede komplexe Zahl hat Realteil und Imaginärteil. Seien $x_\star$ und $y_\star$ der Real- bzw. Imaginärteil von $z_\star$. Dann können wir eine Folge komplexer Zahlen als Paar von Folgen reeller Zahlen auffassen. Wir nutzen das für eine alternative Definition von Konvergenz:

Definition 16.12. Eine Folge $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ konvergiert komponentenweise gegen $z = x + \mathrm{i}\, y$, wenn die Folge $x_\star$ gegen x konvergiert *und* wenn die Folge $y_\star$ gegen y konvergiert. Eine Folge heißt komponentenweise konvergent, wenn sie komponentenweise gegen eine komplexe Zahl konvergiert.

Folgen komplexer Zahlen: Cauchy-Konvergenz

Definition 16.13. Eine Folge $z_\star$ komplexer Zahlen ist Cauchy-konvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i, j \geq h \ : \ |z_i - z_j| < \varepsilon$$

Äquivalenz der Konvergenzbegriffe

Satz 16.15. *Für Folge komplexer Zahlen* $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ *sind äquivalent:*

1. *Die Folge* $z_\star$ *konvergiert.*
2. *Die Folge* $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ *konvergiert komponentenweise.*
3. *Die Folge* $z_\star$ *ist Cauchy-konvergent.*

Beobachtung 16.14. *Für eine komplexe Zahl* $z = x + \mathrm{i}\, y$ *gilt:*

$$\begin{aligned} |x| &\le |z| \\ |y| &\le |z| \\ |z| &\le |x| + |y| \\ |x| + |y| &\le 2\,|z| \end{aligned}$$

Äquivalenz der Konvergenzbegriffe: (1) $\Longrightarrow$ (3)

1. Die Folge $z_\star$ konvergiert.

3. Die Folge $z_\star$ ist Cauchy-konvergent.

Beweis. Es konvergiere $z_\star$ gegen z. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Schwellindex h mit

$$\forall i \geq h \ : \ |z_i - z| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann gilt aber für $i, j \geq h$ wegen der Dreiecksungleichung:

$$|z_i - z_j| \leq |z_i - z| + |z - z_j| < \varepsilon$$

q.e.d.

Äquivalenz der Konvergenzbegriffe: (3) $\Longrightarrow$ (2)

3. Die Folge $z_\star$ ist Cauchy-konvergent.

2. Die Folge $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ konvergiert komponentenweise.

Beweis. Die Folge $z_\star$ sei Cauchy-konvergent. Wir zeigen, daß die Folgen $x_\star$ und $y_\star$ der Real- bzw. Imaginärteile ebenfalls Cauchy-konvergent sind. Daraus folgt dann, daß sie konvergieren, und damit, daß $z_\star$ komponentenweise konvergiert.

Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Schwellindex $h \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\forall i, j \geq h \;:\; |z_i - z_j| < \varepsilon$$

Damit ist auch

$$|x_i - x_j| \leq |z_i - z_j| < \varepsilon$$

Realteil von $z_i - z_j$

Also ist $x_\star$ Cauchy-konvergent. Das Argument für $y_\star$ ist gleich. **q.e.d.**

Äquivalenz der Konvergenzbegriffe: (2) $\Longrightarrow$ (1)

2. Die Folge $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ konvergiert komponentenweise.

1. Die Folge $z_\star$ konvergiert.

Beweis. Es konvergiere $x_\star$ gegen x und $y_\star$ gegen y. Sei $\varepsilon > 0$. Also:

$$\exists h_x \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h_x \ : \ |x - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists h_y \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq h_y \ : \ |y - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir setzen:

$$z := x + \mathrm{i}\, y$$

Für $h \geq h_x, h_y$ und $i \geq h$ gilt dann:

$$|z - z_i| \leq |x - x_i| + |y - y_i| < \varepsilon$$

Realteil von $z - z_i$ Imaginärteil von $z - z_i$

Also konvergiert $z_\star$ gegen z. **q.e.d.**

Gliedweises Rechnen mit konvergenten Folgen

Korollar 16.16. *Da wir Konvergenz komponentenweise auffassen können, impliziert (10.18), daß auch für Folgen komplexer Zahlen gilt: Konvergiert sowohl $a_\star$ als auch $b_\star$, so konvergieren auch die Summe $a_\star + b_\star$, die Differenz $a_\star - b_\star$ und das Produkt $a_\star b_\star$. Die Grenzwerte sind die Summe, die Differenz, bzw. das Produkt der Grenzwerte:*

$$\begin{aligned}
\lim_{\star\to\infty} a_\star + b_\star &= \lim_{\star\to\infty} a_\star + \lim_{\star\to\infty} b_\star \\
\lim_{\star\to\infty} a_\star - b_\star &= \lim_{\star\to\infty} a_\star - \lim_{\star\to\infty} b_\star \\
\lim_{\star\to\infty} a_\star b_\star &= \left(\lim_{\star\to\infty} a_\star\right)\left(\lim_{\star\to\infty} b_\star\right)
\end{aligned}$$

Ist $b_\star$ gliedweise ungleich 0 und ist überdies $0 \neq \lim_{\star\to\infty} b_\star$, *so konvergiert der Quotient $\frac{a_\star}{b_\star}$ und es gilt:*

$$\lim_{\star\to\infty} \frac{a_\star}{b_\star} = \frac{\lim_{\star\to\infty} a_\star}{\lim_{\star\to\infty} b_\star}$$

Korollar 16.16. *Konvergiert sowohl $z_\star$ als auch $z'_\star$, so konvergiert auch $z_\star z'_\star$ mit*

$$\lim_{\star\to\infty} z_\star z'_\star = \left(\lim_{\star\to\infty} z_\star\right)\left(\lim_{\star\to\infty} z'_\star\right)$$

Beweis. Sei $z = \lim_{\star\to\infty} z_\star$ und $z' = \lim_{\star\to\infty} z'_\star$. Wir spalten nach Real- und Imaginärteil:

$z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ und $z = x + \mathrm{i}\, y$ und $z'_\star = x'_\star + \mathrm{i}\, y'_\star$ und $z' = x' + \mathrm{i}\, y'$

Nun ist:

$$z_\star z'_\star = \underbrace{(x_\star x'_\star - y_\star y'_\star)}_{\text{Realteil}} + \mathrm{i}\,\underbrace{(x_\star y'_\star + y_\star x'_\star)}_{\text{Imaginärteil}}$$

$x_\star x'_\star - y_\star y'_\star$ konvergiert gegen $xx' - yy'$, Realteil von zz'
$x_\star y'_\star + y_\star x'_\star$ konvergiert gegen $xy' + yx'$, Imaginärteil von zz'

Also konvergiert $z_\star z'_\star$ (komponentenweise) gegen zz'. **q.e.d.**

Konvergenz des Betrages

Korollar 16.17. *Wenn eine Folge* $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ *komplexer Zahlen konvergiert, so konvergiert die reelle Folge* $|z_\star| = \sqrt{x_\star^2 + y_\star^2}$ *ihrer Beträge.*

Beweis. Zunächst konvergiert $x_\star^2 + y_\star^2$ wegen (10.18). Dann konvergiert $\sqrt{x_\star^2 + y_\star^2}$, weil $\sqrt{}$ folgenstetig ist.

Kokonvergenz komplexer Folgen

Aufgabe 16.18. Seien $z_\star$ und $z'_\star$ zwei Folgen komplexer Zahlen. Wir nennen $z_\star$ und $z'_\star$ kokonvergent, wenn beide Folgen konvergieren und zwar gegen denselben Grenzwert. Wir nennen sie Cauchy-kokonvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad \forall i, j \geq h \ : \ \left| z_i - z'_j \right| < \varepsilon$$

Zeige: $z_\star$ und $z'_\star$ sind genau dann kokonvergent, wenn sie Cauchy-kokonvergent sind.

Definition 16.19. Sei $a_\star$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann bezeichnet $\Sigma a_\star$ die Folge der Partialsummen, welche wir auch als zugehörige Reihe bezeichnen. Konvergiert die Folge $\Sigma a_\star$, so notieren wir ihren Grenzwert mit $\sum_\star a_\star$ oder $\sum_{i=0}^\infty a_\star$.

Eine Reihe $\Sigma a_\star$ komplexer Zahlen heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\Sigma\,|a_\star|$ ihrer Beträge konvergiert.

Eine Reihe $\Sigma a_\star$ komplexer Zahlen heißt unbedingt konvergent, wenn je zwei Umordnungen der Reihe kokonvergent sind.

Beobachtung 16.20. *Sei $z_\star = x_\star + \mathrm{i}\, y_\star$ die Aufspaltung einer komplexen Folge in Real- und Imaginärteil. Dann spaltet die zugehörige Partialsummenfolge entsprechend*

$$\Sigma z_\star = \Sigma x_\star + \mathrm{i}\, \Sigma y_\star$$

q.e.d.

Beobachtung 16.21. *Die Reihe* $\Sigma z_\star = \Sigma x_\star + \mathrm{i}\,\Sigma y_\star$ *sei absolut konvergent. Wegen* $|x_\star| \leq |z_\star|$ *ist dann auch die Reihe* $\Sigma x_\star$ *der Realteile absolut konvergent. Genauso sehen wir, daß* $\Sigma y_\star$ *absolut konvergiert.*

Umgekehrt seien $\Sigma x_\star$ *und* $\Sigma y_\star$ *absolut konvergent. Also konvergiert auch die Summe* $\Sigma(|x_\star| + |y_\star|)$*. Wegen* $|z_\star| \leq |x_\star| + |y_\star|$ *konvergiert auch* $\Sigma\,|z_\star|$*. Das heißt* $\Sigma z_\star$ *ist absolut konvergent.*

Wir halten fest: Eine Reihe komplexer Zahlen konvergiert genau dann absolut, wenn Real- und Imaginärteilreihe absolut konvergieren. **q.e.d.**

Beobachtung 16.22. *Jede Umordnung der komplexen Reihe induziert eine entsprechende Umordnung der Realteilreihe und der Imaginärteilreihe. Darum ist die komplexe Reihe* $\Sigma z_\star = \Sigma x_\star + \mathrm{i}\,\Sigma y_\star$ *genau dann unbedingt konvergent, wenn sowohl die Reihe* $\Sigma x_\star$ *als auch die Reihe* $\Sigma y_\star$ *unbedingt konvergiert.*

Korollar 16.23 (Umordnungssatz). *Eine Reihe $\Sigma z_\star$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann absolut, wenn sie unbeding konvergiert.*

Beweis. Wir zerlegen $\Sigma z_\star = \Sigma x_\star + \mathrm{i}\,\Sigma y_\star$ in Real- und Imaginärteil. Mit dem Umordnungssatz für reelle Reihen (11.15) haben folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & \Sigma z_\star \text{ konvergiert absolut} \\ \iff\ & \Sigma x_\star \text{ und } \Sigma y_\star \text{ konvergieren absolut} \\ \iff\ & \Sigma x_\star \text{ und } \Sigma y_\star \text{ konvergieren unbedingt} \\ \iff\ & \Sigma z_\star \text{ konvergiert unbedingt} \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung 16.24. Im Komplexen gilt nicht mehr, daß man eine bedingt konvergente Reihe zu jeder beliebigen Summe umordnen kann: eine Reihe reeller Zahlen wird bei jeder konvergenten Umordnung eine reelle Summe haben.

Definition 16.25. Eine Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt Doppelfolge komplexer Zahlen. Die Doppelfolge $z_{\star,\bullet}$ heißt summierbar, wenn

$$\left\{ \sum_{(i,j)\in M} |z_{i,j}| \;\middle|\; M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}$$

beschränkt ist.

Beobachtung 16.26. *Aus (16.14) folgt: Eine Doppelfolge $z_{\star\bullet} = x_{\star\bullet} + \mathrm{i}\, y_{\star\bullet}$ komplexer Zahlen ist genau dann summierbar, wenn sowohl die Doppelfolge $x_{\star\bullet}$ ihrer Realteile als auch die Doppelfolge $y_{\star\bullet}$ ihrer Imaginärteile summierbar ist.* **q.e.d.**

Doppelreihensatz für Doppelreihen komplexer Zahlen

Aufgabe 16.27. Zeige, daß der Doppelreihensatz (11.32) auch im Komplexen gilt: Sei $z_{\star\bullet}$ eine summierbare Doppelfolge. Dann gilt:

1. Für *jede* Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\Sigma z_{f(\star)}$ absolut gegen einen von f unabhängigen Wert λ.

2. Die Zeilen $z_{i\bullet}$ und Spalten $z_{\star j}$ haben absolut konvergente Reihen $\Sigma z_{i\bullet}$ und $\Sigma z_{\star j}$. Ferner konvergieren die Reihe der Spaltensummen und die Reihe der Zeilensummen beide absolut, und zwar gegen λ.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij} = \lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} z_{ij}$$

Wir nennen die Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine <u>Anordnung</u> der Doppelfolge $z_{\star\bullet}$.

Komplexe Potenzreihen

Betrachtung. Sei $\Sigma a_\star z^\star$ eine komplexe Potenzreihe. Sei

$$R := \sup\left\{s \in \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \text{die reelle Folge } |a_\star|\, s^\star \text{ ist beschränkt}\right\}$$

der Konvergenzradius der reellen Reihe $\Sigma\, |a_\star|\, x^\star$. Also gilt wegen der Multiplikativität des Betrags komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} & |z| < R \\ \Longrightarrow\quad & \Sigma\, |a_\star|\, |z|^\star \text{ konvergiert (absolut)} \\ \Longrightarrow\quad & \Sigma\, |a_\star z^\star| \text{ konvergiert} \\ \Longrightarrow\quad & \Sigma a_\star z^\star \text{ konvergiert absolut} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |z| > R \\ \Longrightarrow\quad & \Sigma\, |a_\star|\, |z|^\star \text{ divergiert} \\ \Longrightarrow\quad & \Sigma\, |a_\star z^\star| \text{ divergiert} \\ \underset{(16.17)}{\Longrightarrow}\quad & \Sigma a_\star z^\star \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Bemerkung 16.29. Im Komplexen sind die Konvergenzgebiete von Potenzreihen also tatsächlich Kreise. Dies erklärt, warum man R den Konvergenz*radius* nennt.

Konvergenzradius komplexer Potenzreihen

Satz und Definition 16.28. *Sei $a_\star$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann ist die Reihe $\Sigma a_\star z^\star$ eine komplexe Potenzreihe. Hier ist z eine Unbestimmte, die komplexe Werte annehmen kann. Dazu gibt es genau ein nicht-negatives $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Ist $|z| < R$, dann konvergiert $\Sigma a_\star z^\star$ absolut.*
2. *Ist $|z| > R$, dann divergiert $\Sigma a_\star z^\star$.*

Wir nennen R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\Sigma a_\star z^\star$. Er ist gegeben als das Supremum der Menge

$$M := \left\{ s \in \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \text{die reelle Folge } |a_\star|\, s^\star \text{ ist beschränkt} \right\}$$

sofern sie beschränkt ist. Ist M unbeschränkt, so gilt $R = \infty$.

Bemerkung: der formal erlaubte Wert $R = \infty$ bedeutet einfach, daß $x < \infty$ stets und $x > \infty$ niemals erfüllt ist.

Reelle Potenzreihen komplex aufgefaßt

Bemerkung 16.30. Vergleich der Definitionen von Konvergenzradien in (11.22) und (16.28) zeigt, daß eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten aufgefaßt als komplexe Potenzreihe ihren Potenzradius beibehält: Der in (11.22) bestimmte Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\Sigma a_\star x^\star$ ist:

$$\sup \{ s \in \mathbb{R} \,|\, \text{die Folge } a_\star s^\star \text{ ist beschränkt} \}$$

Doch eine Folge ist beschränkt genau dann, wenn die Folge ihrer Beträge beschränkt ist. Also stimmt der in in (16.28) angegebene Konvergenzradius damit überein.

Die Eulersche Formel

Beispiel 16.31. *Sei* $t \in \mathbb{R}$. *Die Potenzreihe* $\exp$ *hat unendlichen Potenzradius. Wir werten sie an der rein imaginären Stelle* $\mathrm{i}\,t$ *aus:*

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}\,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\,t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k\,t^k}{k!} \\
&= 1 + \mathrm{i}\,t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\,\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \mathrm{i}\,\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \mathrm{i}\,\frac{t^7}{7!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{t^1}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1}$$

$$\cos(x) = \frac{\exp(\mathrm{i}\,x) + \exp(-\,\mathrm{i}\,x)}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\exp(\mathrm{i}\,x) - \exp(-\,\mathrm{i}\,x)}{2\,\mathrm{i}}$$

Polynome I

Definition 16.33. Sei K ein Ring. mit $K[x]$ bezeichnen wir die Menge aller Polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

in der Unbestimmten x mit Koeffizienten $a_i \in K$. Der Index des höchsten nicht-veschwindenden Koeffizienten heißt <u>Grad</u> des Polynom. Wir notieren den Grad des Polynom $f(x)$ als $\mathrm{grad}(f)$. Formal eklären wir, daß das Nullpolynom den Grad $-\infty$ hat. Polynome fassen wir als Potenzreihen auf, die nur endlich viele nicht-verschwindende Koeffizienten haben. Wir können Polynome addieren, subtrahieren und via Cauchy-Produkt auch multiplizieren. Auf diese Weise wird $K[x]$ wieder zu einem Ring.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome aus $K[x]$, so sagen wir, $g(x)$ <u>teile</u> $f(x)$, wenn $f(x) = g(x)\,h(x)$ für ein $h(x) \in K[x]$ gilt.

Definition 16.33. Ein Polynom vom Grad ≤ 0 heißt konstant. In einem Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ vom Grad n heißt a_n der führende Koeffizient oder Leitkoeffizient. Ein Polynom $f(x)$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

Beobachtung 16.34. *Bei der Multiplikation von Polynomen addieren sich ihre Grade und multiplizieren sich ihre Leitkoeffizienten.* **q.e.d.**

Polynomdivision mit Rest

Fakt 16.35. *Sei K ein Körper und seien $f(x), g(x) \in K[x]$ zwei Polynome mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q(x), r(x)$ mit:*

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\, q(x) + r(x) \\ \operatorname{grad}(r) &< \operatorname{grad}(g) \end{aligned}$$

Wir nennen $q(x)$ den Quotienen und $r(x)$ den Rest.

Beispiel 16.36.

$$\begin{array}{lrrrrr} & 6x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -1x & +2 \\ (3x^2-1)\cdot 2x^2 = & 6x^4 & & -2x^2 & & \\ \hline & & 2x^3 & +0x^2 & -1x & +2 \\ (3x^2-1)\cdot \frac{2}{3}x = & & 2x^3 & & -\frac{2}{3}x & \\ \hline \textit{Rest:} & & & & -\frac{1}{3}x & +2 \end{array} \quad = \quad \left(3x^2-1\right)\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{1}{3}x+2\right)$$

Abspalten von Linearfaktoren

Korollar 16.37. *Sei $f(x) \in K[x]$ ein Polynom über dem Körper K und $\xi \in K$ ein Element. Dann sind äquivalent:*

1. *Das Körperelement ξ ist eine Nullstelle von $f(x)$.*
2. *Der Linearfaktor $x - \xi \in K[x]$ teilt $f(x)$.*

Beweis. Ist $f(x) = (x - \xi)h(x)$, so verschwindet $f(x)$ an der Stelle $x = \xi$.

Für die umgekehrte Richtung verwenden wir Polynomdivision. Der Linearfaktor $x - \xi$ ist ein Polynom vom Grad 1. Nach Division mit Rest schreiben wir also

$$f(x) = (x - \xi)q(x) + r(x)$$

mit $\operatorname{grad}(r) < 1$. Es folgt, daß r ein konstantes Polynom ist. Setzten wir nun auf beiden Seiten $x = \xi$ ein, folgt $r = 0$ aus $f(\xi) = 0$. **q.e.d.**

Definition 16.38. Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom (Grad mindestens 1) $f(x) \in K[x]$ eine Nullstelle in K hat.

Bemerkung 16.39. Ist der Körper K algebraisch abgeschlossen, so kann jedes normierte Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit Koeffizienten aus K als Produkt von Linearfaktoren $x - \xi_i$ mit $\xi_i \in K$ dargestellt werden:

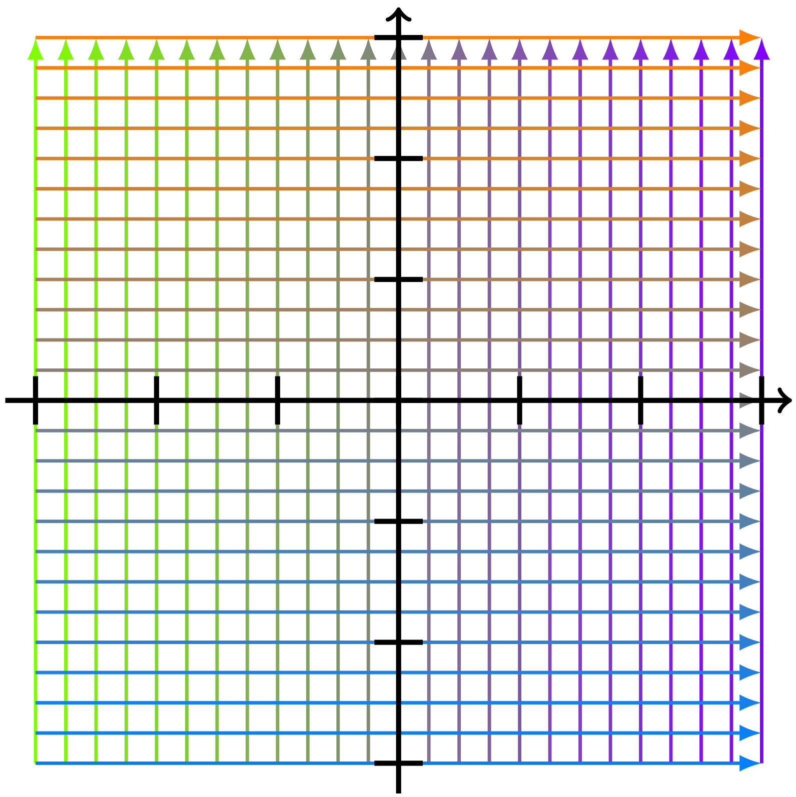
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n)$$

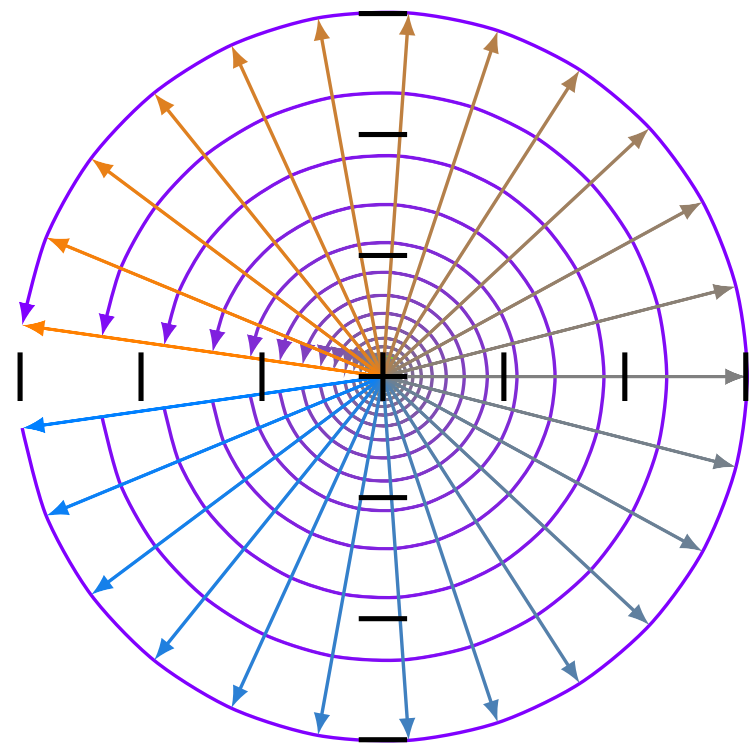
Dies ergibt sich mit Induktion aus (16.37): Abspalten eines Linearfaktors führt auf eine (immer noch normiertes!) Polynom vom Grad $n - 1$.

Fundamentalsatz der Algebra

Satz 16.40. $\mathbb{C}$ *ist algebraisch abgeschlossen.*

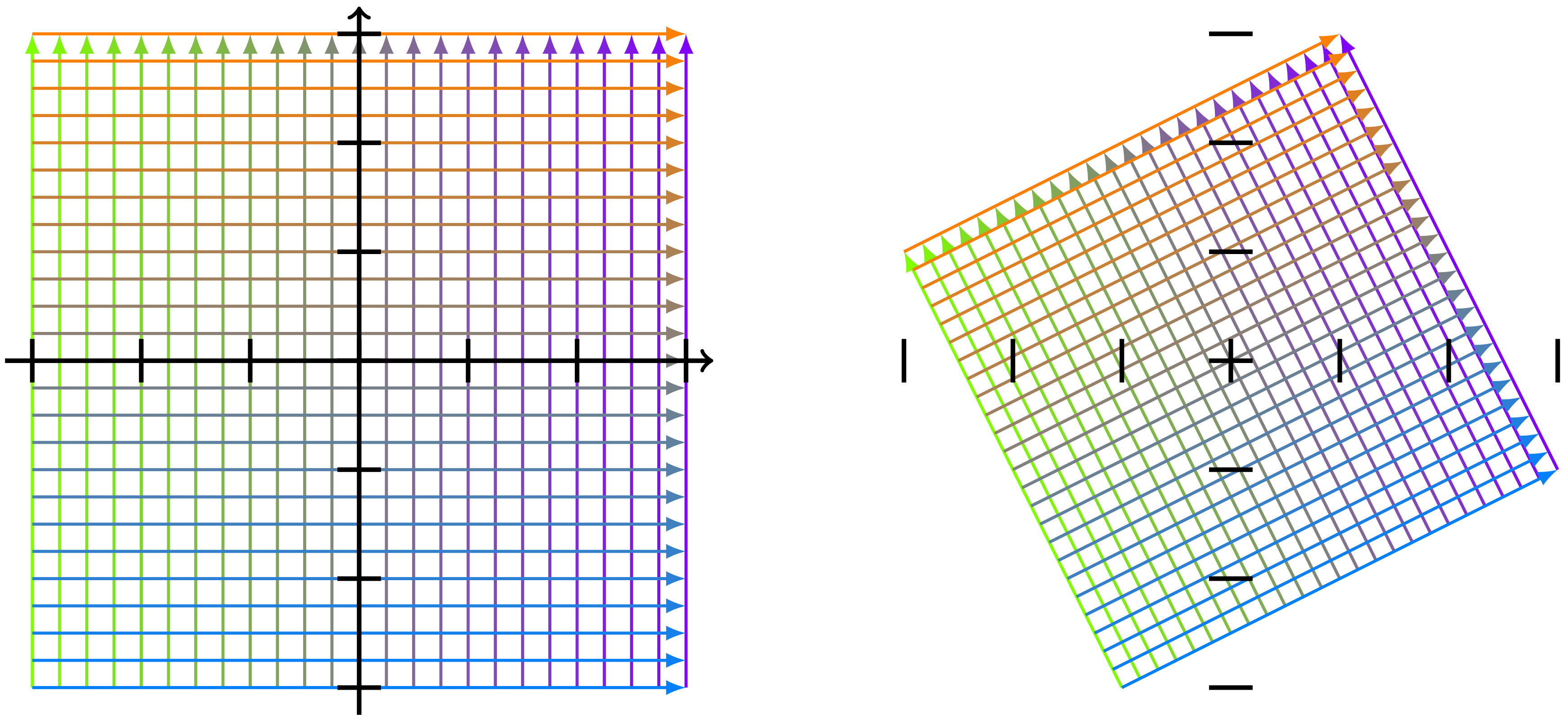
Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Kurvenschaaren





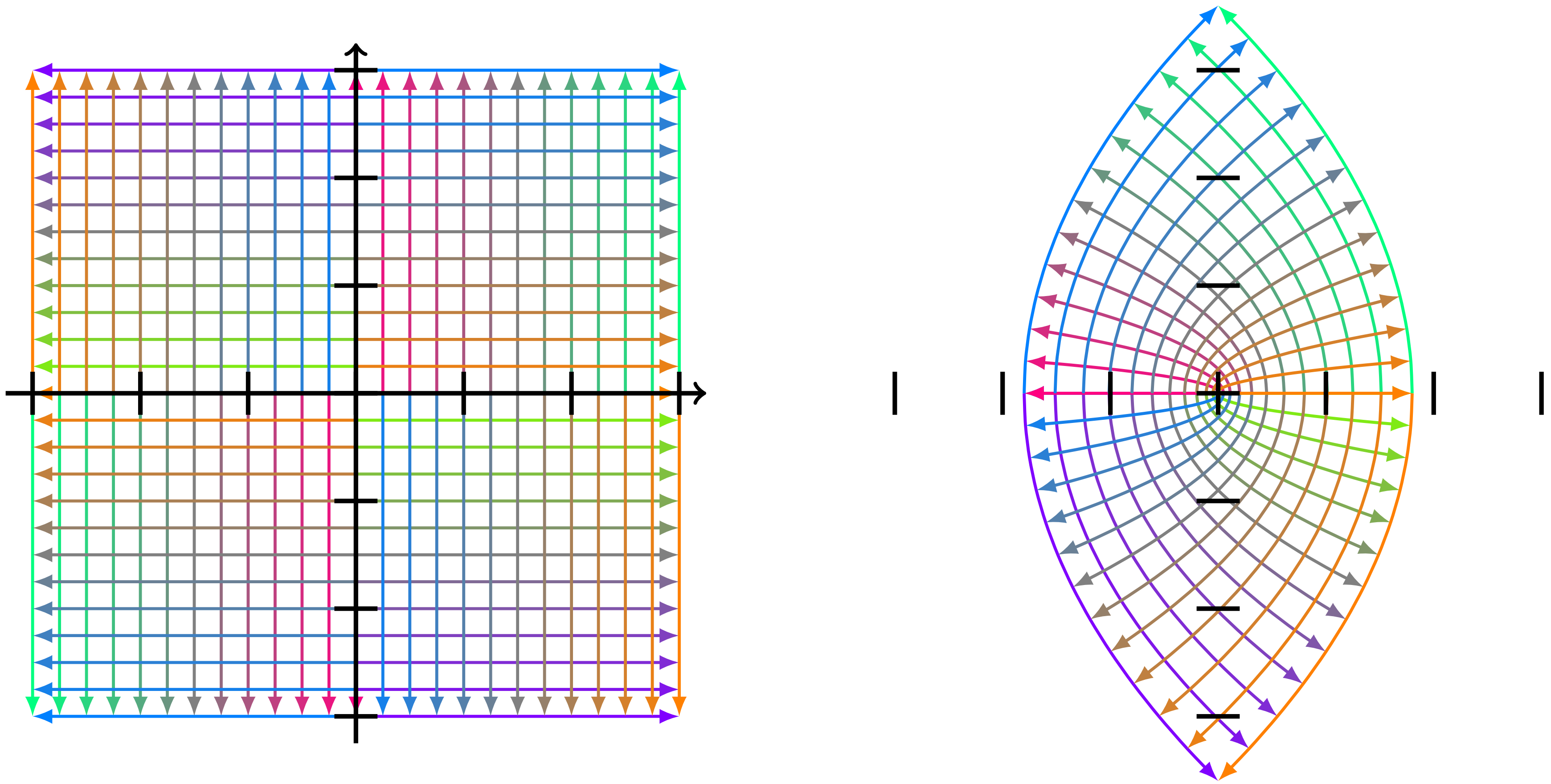
$$z \mapsto \frac{3}{20}\exp(z)$$

Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Kurvenschaaren



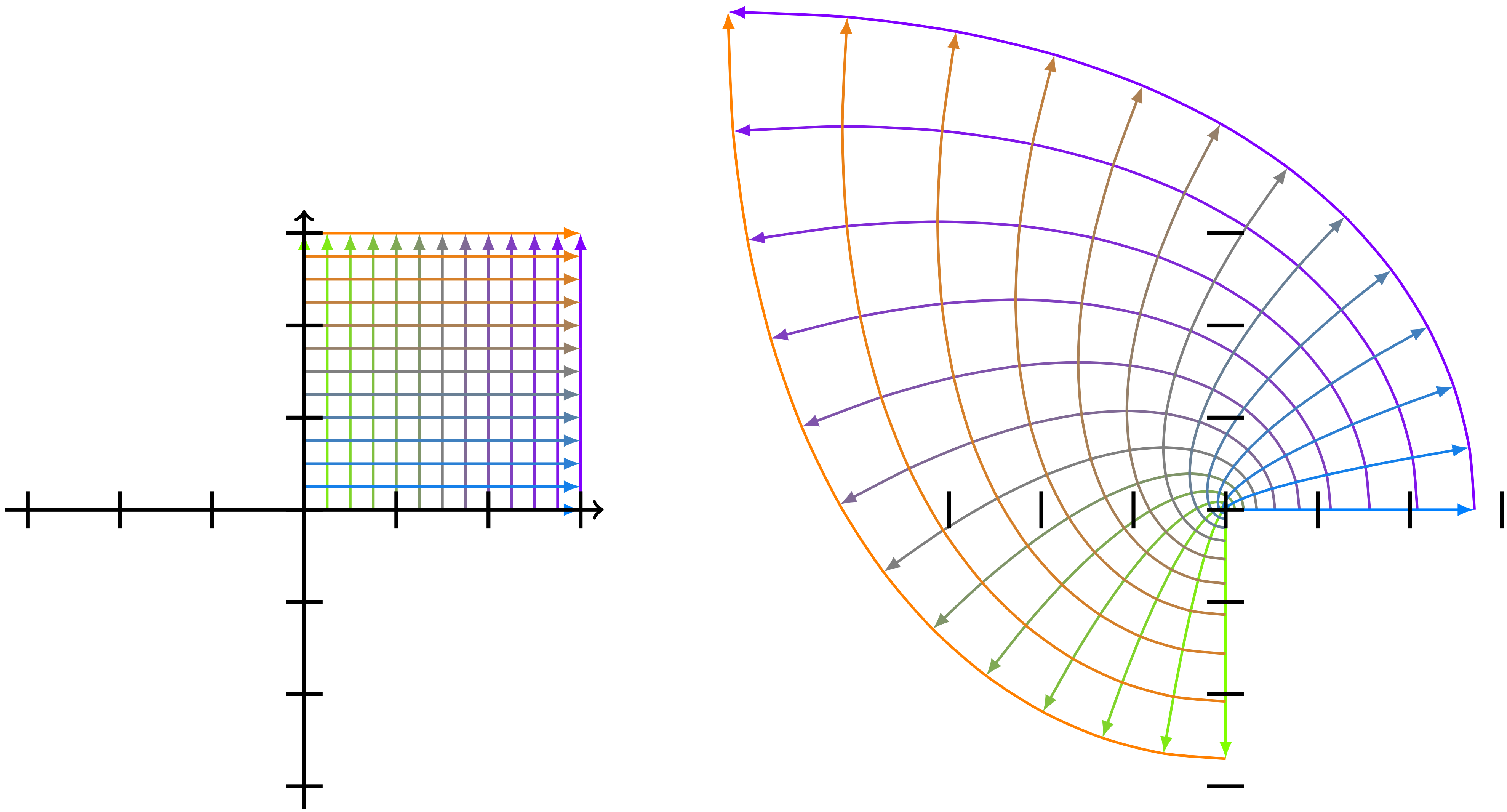
$$z \mapsto \left(\frac{2}{3} + \mathrm{i}\,\frac{1}{3}\right) z$$

Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Kurvenschaaren



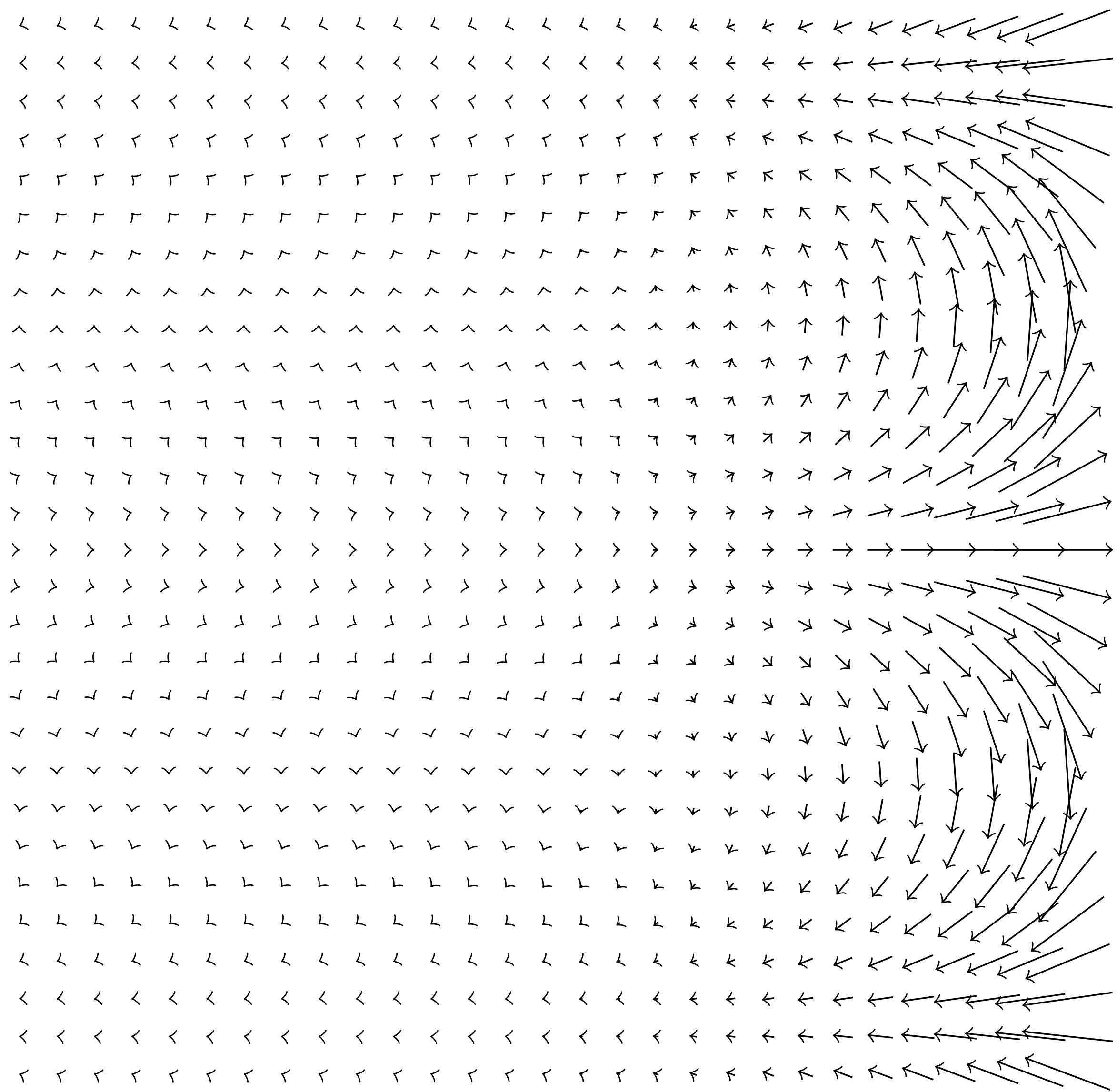
$$z \mapsto \frac{1}{5}z^2$$

Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Kurvenschaaren



$$z \mapsto \frac{1}{10} z^3$$

Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Vektorfeld



Visualisierung einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Vektorfeld