Satz: Sei $(X, d : X \times X \to \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum. Dann ist $\overline{X}$ ein $\overline{\mathbb{K}}$-metrischer Raum vermöge:

$$\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$$
$$([x_*], [x'_*]) \mapsto [d(x_*, x'_*)]$$

Ferner sind die kanonischen Einbettungen $\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ und $\iota : X \hookrightarrow \overline{X}$ verträglich:

$$\begin{tikzcd}
d : X \times X \arrow[r] \arrow[d, "\iota \times \iota"] & \mathbb{K} \arrow[d, hook, "\iota"] \\
\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \arrow[r] & \overline{\mathbb{K}}
\end{tikzcd}$$

D.h.: $\overline{d}(\iota(x_1), \iota(x_2)) = \iota\, d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

$\iota(X)$ ist <u>dicht</u> in $\overline{X}$, d.h.

$$\forall \bar{x} \in \overline{X} \;\; \forall \bar{\varepsilon} > 0 \;\; \exists x \in X : \overline{d}(\bar{x}, \iota(x)) < \varepsilon$$

Schließlich: $\iota(X)$ ist dicht in $\overline{X}$

Sei $[x_*]$ ein Punkt in $\overline{X}$.
Dann ist $\iota(x_*)$ eine Folge in $\iota(X) \subseteq \overline{X}$, die gegen $[x_*]$ konvergiert. Also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i \geq n : \overline{d}([x_*], \iota(x_i)) < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Frage: Wann ist $\overline{X}$ vollständig?

Satz: $\mathbb{K}$: angeordneter Körper
mit Nullfolge
$\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$

(X, d) : $\mathbb{K}$-metrisch.
$(\overline{X}, \overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{\mathbb{K}})$: Vervollständigung

Dann ist $\overline{X}$ vollständig.

Bew: Das Bild $\iota(X)$ ist dicht in $\overline{X}$.

Sei $\overline{x}_*$ eine Cauchy-Folge in $\overline{X}$.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ wähle $x_m \in X$ mit

$$\overline{d}(\overline{x}_m, \iota(x_m)) < \iota(\delta_i / 2)$$

Beh: $\iota(x_*) \parallel \overline{x}_*$

$\ulcorner$ Sei $\varepsilon > 0$ (O.B.d.A. $\varepsilon \in \iota(\mathbb{K})$)

Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, i, j \geq n : \quad \overline{d}(\overline{x}_i, \overline{x}_j) < \varepsilon/2$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(\delta_m) < \varepsilon/2$

Dann gilt für $i,j \geq \max(m,n)$:

$$\bar{d}(\bar{x}_i, \iota(x_j)) \leq \bar{d}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + d(\bar{x}_j, \iota(x_j))$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \lrcorner$$

<u>Kor</u>: $\iota(x_*)$ und damit x_* sind Cauchy-Folgen.

<u>Aber</u>: $\iota(x_*)$ konvergiert in $\overline{X}$ gegen $[x_*]$ und damit konvergiert auch $\bar{x}_*$ gegen $[x_*]$. $\boxtimes$

Das Wichtigste über $\mathbb{R}$-Vektorräume

Def Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine Menge V, zusammen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und zwei Operationen

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

so daß gilt

1) $(V, 0, +)$ ist abelsche Gruppe

2)
$$1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$$
$$0 \cdot \underline{v} = 0$$
$$\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$$
$$(\alpha + \beta) \underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u}$$
$$\alpha (\beta \underline{u}) = (\alpha \beta) \underline{u}$$

Def: Eine Abbildung $\varphi : E \to F$ zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist <u>linear</u>, wenn gilt:

$$\varphi(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha \varphi(\underline{u}) + \beta \varphi(\underline{v})$$

Eine Abbildung

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$$

heißt <u>multilinear</u>, wenn gilt:

$$\forall\, \underline{u}_1 \in E_1,\ \underline{u}_2 \in E_2, \ldots, \underline{u}_n \in E_n \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\begin{aligned} E_i &\longrightarrow F \quad \text{ist linear} \\ \underline{w} &\longmapsto \varphi(\underline{u}_1, \ldots, \underline{w}, \ldots, \underline{u}_n) \end{aligned}$$

⌜multilinear = linear in jedem einzelnen Argument.⌟

Ist $F = \mathbb{R}$, so heißt φ Multilinear<u>form</u>.

<u>Bsp</u>: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>bi</u>linear

$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinear

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \longmapsto aa' + bb'$

Def: Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Basis**, wenn jeder Vektor $\underline{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \alpha_{\underline{b}} \underline{b}$$

hat, in der fast alle Koeffizienten verschwinden.

Existenz der Darst: B spannt V auf

Eindeutigkeit: B ist linear unabhängig.

Fakt: Jeder Vektorraum hat eine Basis. [Äquivalent (!) zum Auswahlaxiom]

Alternative Ansicht

X: Menge

$$\mathbb{R}^X = \{ \alpha_* : X \to \mathbb{R} \mid \alpha_x = 0 \text{ für fast alle } x \in X \text{ (alle bis auf höchstens endl. viele)} \}$$

$\mathbb{R}^X$ ist Vektorraum:

$$0 : x \mapsto 0$$

$$\alpha_* + \beta_* : x \mapsto \alpha_x + \beta_x$$

$$\lambda(\alpha_*) : x \mapsto \lambda \alpha_x$$

Sei nun $\mathcal{B} \subseteq V$. Dann betrachten wir die Auswertungsabbildung

$$\text{ev} : \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \to V$$

$$\alpha_* \mapsto \sum_{\alpha_{\underline{b}} \neq 0} \alpha_{\underline{b}} \underline{b} \qquad \text{endl. Summe}$$

$\mathcal{B}$ ist Basis genau dann, wenn $\text{ev}: \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \to V$ bijektiv ist.

Bsp: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$

Die Menge $\mathcal{E} := \left\{ \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heißt <u>standardbasis</u>.

Lineare Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind <u>genau</u> diejenigen, die sich als Multiplikation mit einer festen Matrix beschreiben lassen.

Matrizen beschreiben auch Bilinearformen vermöge

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \cdots x_m)\, M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jede Bilinearform $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ läßt sich so beschreiben.

Banach-Räume

Def: Ein Banach-Raum ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der als metrischer Raum (Metrik kommt mit der Norm!) vollständig ist.

Bsp: $\mathbb{R}^n$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\left\| \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \right\| := \max\{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$$

Bew: Sei $\underline{v}_* = \begin{pmatrix} x_*^1 \\ \vdots \\ x_*^n \end{pmatrix}$ eine Cauchy-Folge.

Dann ist jede Koordinatenfolge x_*^i eine Cauchy-Folge, und zwar mit Limes

$$\underline{w} := \begin{pmatrix} w^1 := \lim x_*^1 \\ \vdots \\ w^n := \lim x_*^n \end{pmatrix}$$

$\square$

Einschub:

Def: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ heißen *äquivalent*, wenn es eine reelle Konstante $C>0$ gibt, so daß für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\|\underline{v}\| \leq C\,|\underline{v}| \;\&\; |\underline{v}| \leq C\,\|\underline{v}\|$$

d.h.: $\frac{1}{C}\|\underline{v}\| \leq |\underline{v}| \leq C\|\underline{v}\|$

äquiv: $\frac{1}{C}|\underline{v}| \leq \|\underline{v}\| \leq C|\underline{v}|$

Beob: Seien $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ zwei äquivalente Normen auf V. Dann sind zwei Folgen $\underline{u}_*$ und $\underline{v}_*$ genau dann Cauchy-parallel bez. $\|\cdot\|$, wenn sie Cauchy-parallel bez. $|\cdot|$ sind.

Bew: Sei $C>0$ mit

$$|\underline{w}| \leq C\|\underline{w}\| \qquad \forall \underline{w} \in V$$

Ist nun $\underline{u}_* \,\|\, \underline{v}_*$ bez. $\|\cdot\|$, so gilt

$$\forall \varepsilon>0 \, \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i,j \geq n: \; \|\underline{u}_i - \underline{v}_j\| < \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$|\underline{u}_i - \underline{v}_j| < \varepsilon$$

Also ist $\underline{u}_* \,\|\, \underline{v}_*$ bez. $|\cdot|$.

Die Umkehrung folgt mit symmetrische Argumentation.

Kor: Sind $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen auf V, so gilt:

1) Eine Folge $\underline{u}_*$ ist Cauchy-Folge bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn sie Cauchy-Folge bez. $|\cdot|$ ist.

2) Eine Folge $\underline{u}_*$ konvergiert

gegen $\underline{w}$ bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn $\underline{y}_*$ gegen $\underline{w}$ konvergiert bez. $|\cdot|$.

$\Rightarrow$ 3) V ist vollständig bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn V vollständig ist bez. $|\cdot|$.

<u>Bew:</u> $\underline{y}_*$ ist eine $\|\cdot\|$ Cauchy-Folge

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_* \parallel \underline{y}_*$ bez. $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_* \parallel \underline{y}_*$ bez. $|\cdot|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_*$ ist $|\cdot|$ - Cauchy-Folge.

$\underline{y}_*$ konvergiert gegen $\underline{w}$ in $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_* \parallel [\underline{w}, \underline{w}, \dots]$ bez. $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_* \parallel [\underline{w}, \underline{w}, \dots]$ bez. $|\cdot|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y}_*$ konvergiert gegen $\underline{w}$ in $|\cdot|$

V : vollst bez. $\|\cdot\|$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \underline{y}_*$: $\|\cdot\|$-Cauchy $\exists \underline{w}$: $\underline{y}_* \xrightarrow[\|\cdot\|]{} \underline{w}$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \underline{y}_*$: $|\cdot|$-Cauchy $\exists \underline{w}$: $\underline{y}_* \xrightarrow[|\cdot|]{} w$

$\Longleftrightarrow$ V : vollst. bez. $|\cdot|$ $\boxtimes$

<u>Fakt</u> Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm vollständig.

Def: Seien E und F Banach-Räume und $U \subseteq E$ offen. Eine Abbildung

$$f : U \to F$$

! heißt linear approximierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ gibt, die eine Approximation von höherer als erster Ordnung für die Abbildung

$$\underline{h} \mapsto f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})$$

ist. D. h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \underline{h} \in E, \; \|\underline{h}\|_E < \delta :$$

$$\| f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u}) - \varphi(\underline{h}) \|_F \le \varepsilon \| \underline{h} \|_E^{1}$$

Die lineare Abbildung $f: E \to F$ heißt Ableitung von f an der Stelle $\underline{u}$. Wir notieren sie mit $D_{\underline{u}} f: E \to F$.

Die Ableitung von f ist die Abbildung

$$\begin{aligned} Df : U &\longrightarrow \mathrm{Hom}(E;F) \\ \underline{u} &\longmapsto D_{\underline{u}} f \end{aligned}$$

Diese Begriffsbildungen wollen wir uns für stetige lin. approximierbare Funktionen aufheben.

Bsp: $E = \mathbb{R}^2$ mit

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_E := \max(|x|, |y|)$$

$F = \mathbb{R}$ mit $\|(z)\| = |z|$

$U := E$

$$f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2$$

Beh f ist linear approximierbar an jeder Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit Ableitung

$$D_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2ux + 2vy$$

Bew: Wir schätzen für $\underline{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ab:

$$\left\| f\begin{pmatrix} u+a \\ v+b \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_F$$

$$= |(u+a)^2 + (v+b)^2 - u^2 - v^2 - 2ua - 2vb|$$

$$= |a^2 + b^2| \leq 2 \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|^2$$

Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| < \delta$:

$$\left\| f\begin{pmatrix} u+a \\ v+b \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_F \leq 2 \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_E^2$$

$$= 2 \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_E$$

$$\leq \varepsilon \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_E$$

<u>Bem:</u> Die lineare Bestapproximation ist hier die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\ulcorner \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \lrcorner$$

$(*)$ beschreibt die Tangentialebene an das Paraboloid $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ im Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$.