

Matrixdarstellung der Ableitung

$$E = \mathbb{R}^m \quad F = \mathbb{R}^n$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen}$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ differenzierbar an der Stelle } \underline{u} \in U$$

$$\Rightarrow D_{\underline{u}} f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_m \underline{e}_m$$

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{te}} \text{ Zeile}$$

Beob: Sei $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Dann

ist

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \varphi \left(\sum x_j \underline{e}_j \right) = \sum x_j \varphi(\underline{e}_j)$$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \text{ mit } \varphi(\underline{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Also: Die Ableitung $D_x f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
wird durch eine $n \times m$ -Matrix
beschrieben.

Ziel: Gegeben f (z.B. : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$),
bestimme diese Matrix.

Bsp: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u^2 + v^2$

hatte die Ableitung

$$D_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2ux + 2vy = \underbrace{(2u \ 2v)}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hm...

$$\left. \begin{aligned} 2u &= \frac{d}{du} u^2 + v^2 \\ 2v &= \frac{d}{dv} u^2 + v^2 \end{aligned} \right]$$

Das kann kein
Zufall sein ∇

Def: $U \subseteq E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$: offen

$f: U \rightarrow F$ differenzierbar an der
Stelle $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$

$D_{\underline{u}} f: E_1 \oplus \dots \oplus E_m \rightarrow F$ Ableitung.

Die i -te partielle Ableitung von f
ist dann

$$D_{\underline{u}}^i f: E_i \rightarrow F$$
$$\underline{e}_i \mapsto D_{\underline{u}} f(0, \dots, \underline{e}_i, \dots, 0)$$

Bem: $z_i: E_i \rightarrow E_1 \oplus \dots \oplus E_m$

$$D_{\underline{u}}^i f = D_{\underline{u}} f \circ z_i$$

$$\pi_i: E_1 \oplus \dots \oplus E_m \rightarrow E_i$$

$$D_{\underline{u}} f = \sum_{i=1}^m D_{\underline{u}}^i f \circ \pi_i$$

Zerlegung von Vektorräumen

$$F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_i : F \rightarrow F_i \\ (f_1, \dots, f_n) \mapsto f_i \end{array} \right\} \text{kanonische Projektion}$$

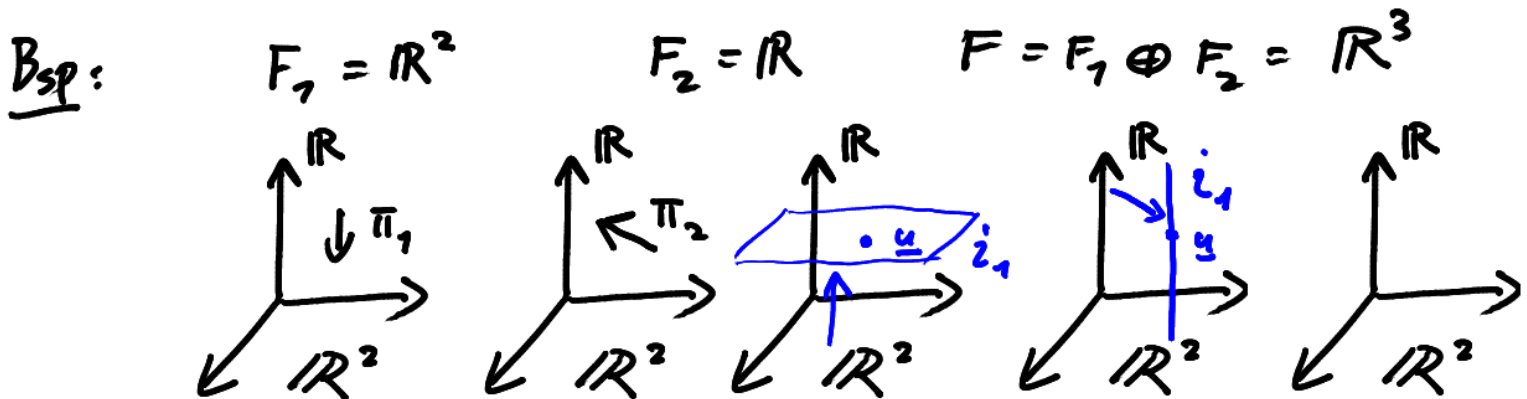
$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \in F$$

$$z_i^{\underline{u}} : F_i \rightarrow F$$

$$\underline{f}_i \mapsto (u_1, \dots, u_{i-1}, \underline{f}_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

$$\underline{\text{Prob:}} \quad z_i^{\underline{u}}(u_i) = \underline{u}$$

Inklusion durch den Punkt $\underline{u}$



Koordinatenabbildungen

$E, F_1, \dots, F_n$: Banachräume

$F := F_1 \oplus \dots \oplus F_n$: Banachraum bez

$$\left\| \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{pmatrix} \right\| := \max(\|\underline{f}_1\|, \dots, \|\underline{f}_n\|)$$

$\pi_i: F \rightarrow F_i$ Projektion auf die
 $\begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{pmatrix} \mapsto \underline{f}_i$ i-te Komponente

Bem: $\pi_i: F \rightarrow F_i$ ist stetig, denn

$$\left\| \pi_i \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{pmatrix} \right\| \leq 1 \left\| \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{pmatrix} \right\|$$

$$\| \underline{f}_i \| \qquad \max(\|\underline{f}_1\|, \dots, \|\underline{f}_n\|)$$

Def: $U \subseteq E$ offen $f: U \rightarrow F$ Abb.

Dann nennen wir die Verkettung

$$f_i := \pi_i \circ f: U \rightarrow F_i$$

die i-te Koordinatenabbildung von f .

Also:

$$f(y) = \begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{pmatrix}$$

Bem: Äquivalent sind

- 1) f ist stetig (an der Stelle u).
- 2) Alle f_i sind stetig (an der Stelle u).

Bew: $1 \Rightarrow 2$ weil π_i stetig ist.

$2 \Rightarrow 1$ Folgt aus der Aussage

$$\begin{pmatrix} u_*^1 \\ \vdots \\ u_*^n \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} v_*^1 \\ \vdots \\ v_*^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_*^i \parallel v_*^i \quad \forall i=1, \dots, n$$

was wieder folgt, weil

$$\left\| \begin{pmatrix} u_k^1 \\ \vdots \\ u_k^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_e^1 \\ \vdots \\ v_e^n \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|u_k^i - v_e^i\| < \varepsilon \quad \forall i$$

□

Prop: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}: U \rightarrow F$ ist differenzierbar

an der Stelle $u \in U$ genau dann,
wenn alle $f_i: U \rightarrow F_i$ an der Stelle
 u differenzierbar sind. In diesem

Fall ist

$$D_u f(h) = \begin{pmatrix} D_u f_1(h) \\ \vdots \\ D_u f_n(h) \end{pmatrix} \quad \forall h \in E$$

Bew: „ $\Rightarrow$ “ Stetigkeit da f_i bei $\underline{y}$ haben wir oben gesehen.

Die Projektion $\pi_i : F \rightarrow F_i$ ist stetig und linear, also differenzierbar mit Ableitung $D\pi_i = \pi_i : F \rightarrow F_i$. Dann folgt mit der Kettenregel, daß $f_i = \pi_i \circ f$ differenzierbar bei $\underline{y}$ ist mit Ableitung

$$D_{\underline{y}} f_i = D_{f(\underline{y})} \pi_i \circ D_{\underline{y}} f = \pi_i \circ D_{\underline{y}} f$$

Also ist $D_{\underline{y}} f_i$ die i te Koordinatenfunktion von $D_{\underline{y}} f$.

„ $\Leftarrow$ “ Seien alle f_i differenzierbar an der Stelle $\underline{y} \in U$. Dann ist f stetig bei $\underline{y}$.

Beob: $\Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) = f(\underline{y} + \underline{h}) - f(\underline{y})$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} f_1(\underline{y} + \underline{h}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{y} + \underline{h}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\underline{y}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{\underline{y}} f_1(\underline{h}) \\ \vdots \\ \Delta_{\underline{y}} f_n(\underline{h}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\|\underline{h}\| < \delta \Rightarrow \|\Delta_{\underline{u}} f_{\underline{a}}(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f_{\underline{a}}(\underline{h})\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\| \quad \forall k=1, \dots, n$$

Dann ist aber nach Def. der Maximumsnorm

auf F :

$$\|\Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) - \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1(\underline{h}) \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n(\underline{h}) \end{pmatrix}\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\| \quad \text{für } \|\underline{h}\| < \delta$$

D.h.: $\begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix}$ ist eine lineare Approximation

für $\Delta_{\underline{u}} f$. Also ist f bei $\underline{u} \in U$ differenzierbar mit

$$D_{\underline{u}} f = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix}$$



Partielle Ableitungen

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m, \quad F: \text{Banachräume}$$

$$\underline{u} \in U \subseteq E \text{ offen} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$f: U \rightarrow F \text{ stetig an der Stelle } \underline{u}$$

$$z_i: E_i \rightarrow E \\ \underline{e} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underline{e} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{te Stelle}$$

$$z_i^{\underline{u}}: E_i \rightarrow E \\ \underline{e} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \underline{e} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \underline{u} + z_i(\underline{e} - u_i)$$

Bem: $z_i: E_i \rightarrow E$ ist linear und beschränkt:

$$\|z_i(\underline{e})\| = \|\underline{e}\|$$

D.h.: z_i ist sogar eine isometrische Einbettung.

Insbesondere sind z_i und $z_i^{\underline{u}}$ stetig.

Also: $U_i := \{\underline{e} \in E_i \mid z_i^{\underline{u}}(\underline{e}) \in U\}$ ist offen.

$$f^i := f \circ z_i^u : U_i \xrightarrow{z_i^u} U \xrightarrow{f} F$$

ist also stetig an der Stelle u_i .

Def: Ist f^i differenzierbar an der Stelle u_i , so sagen wir, die i -te partielle Ableitung von f existiere:

$$D_{\underline{u}}^i f := D_{u_i} f^i : E_i \rightarrow F$$

Prop: Ist f an der Stelle $u \in U$ differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen und es gilt:

$$D_{\underline{u}} f \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = D_{u_1}^1 f(h_1) + \dots + D_{u_m}^m f(h_m)$$

In Matrixnotation

$$D_u f = (D_{u_1}^1 f \quad \dots \quad D_{u_m}^m f)$$

$$D_u f \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = (D_{u_1}^1 f \quad \dots \quad D_{u_m}^m f) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Bew: Die Inklusion $z_i^y : U_i \rightarrow E$ ist

affin; $z_i^y(\underline{e}) = \underline{y} + z_i(\underline{e} - \underline{y}_i)$

$$z_i^y = (\underline{y} + *) \circ z_i \circ (* - \underline{y}_i)$$

Also ist z_i^y differenzierbar mit

Ableitung $z_i : E_i \rightarrow E$. Die Kettenregel

impliziert damit, daß $f^i = f \circ z_i^y$

differenzierbar an der Stelle $\underline{y}_i \in U_i$ ist mit Ableitung

$$D_{\underline{y}}^i f = D_{\underline{y}_i} f^i = D_{\underline{y}} f \circ z_i$$

Andererseits ist

$$\text{id}_E = \sum_{i=1}^m z_i \circ \pi_i \quad \begin{array}{l} \Gamma_{\underline{h}} = i_1(\underline{h}_1) + \dots + i_m(\underline{h}_m) \\ \text{mit } \underline{h}_i = \pi_i(\underline{h}) \end{array}$$

Also: $D_{\underline{y}} f = D_{\underline{y}} f \circ \text{id}_E = \sum_{i=1}^m D_{\underline{y}} f \circ z_i \circ \pi_i$

$$= \sum_{i=1}^m D_{\underline{y}}^i f \circ \pi_i$$

$$\Rightarrow D_{\underline{y}} f = (D_{\underline{y}}^1 f \ \dots \ D_{\underline{y}}^m f)$$

□

Kor: $U \subseteq E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ offen $\underline{u} \in U$

$f: U \rightarrow F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ differenzierbar
an der Stelle $\underline{u}$.

Dann wird die Ableitung $D_{\underline{u}} f$
beschrieben durch die (Block)-Matrix

$$\begin{pmatrix} D_{\underline{u}}^1 f_1 & \dots & D_{\underline{u}}^m f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{\underline{u}}^1 f_n & \dots & D_{\underline{u}}^m f_n \end{pmatrix}$$

$D_{\underline{u}}^j f_i : E_j \rightarrow F_i$ ist dabei die

j te partielle Ableitung der i ten

Koordinatenfunktion.

□

Spezialfall $U \subseteq E = \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}$
 $F = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Hier können wir f als Funktion in n reellen Veränderlichen $x_1, \dots, x_m$ auffassen.

Die partiellen Ableitungen

$$D_{\underline{x}}^i f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sind durch eine 1×1 -Matrix, also eine reelle Zahl gegeben. Traditionell wird sie mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

notiert. Wir fassen sie als Abbildungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

auf, wenn sie auf ganz U existieren.

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig auf ganz U . Ferner gelte

1) In jedem Punkt $y \in U$ existieren
alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

2) Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$$

sind stetige Funktionen auf U .

Dann ist f in jedem Punkt $y \in U$
differenzierbar mit Ableitung

$$D_y f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(y) \end{pmatrix}$$