Lemma: Seien f_* und g_* zwei Folgen in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$, die bez. $\|\cdot\|_\infty$ Cauchy-parallel sind. Zeige, daß für jedes $x \in X$ die Folgen von Vektoren $f_*(x)$ und $g_*(x)$ Cauchy-parallel $\underbrace{\text{(und damit kokonvergent)}}_{F \text{ vollständig}}$ sind

Bew: Sei $x \in X$ beliebig. Wir rechnen:

$$f_* \parallel g_*$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall i,j \geq N : \|f_i - g_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$\ulcorner \|f_i - g_j\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_i(x) - g_j(x)\| \lrcorner$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall i,j \geq N : \|f_i(x) - g_j(x)\| < \varepsilon \quad \boxtimes$$

Satz: $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ ist ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.

Bew: Sei f_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$. Unsere erste Aufgabe ist, eine Grenzfunktion zu erraten. Das Lemma hilft: Für jedes $x \in X$ ist $f_*(x)$

eine Cauchyfolge. Definiere

$$f(x) := \lim f_*(x)$$

<u>Beh:</u> $f \in L^\infty(X; F)$

<u>Beh:</u> $f = \lim f_*$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, daß gilt:

$$\forall i,j \geq N : \quad \|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \; \forall i,j \geq N : \quad \|f_i(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/2$$

$$\overset{j \to \infty}{\Rightarrow} \forall x \in X \; \forall i \geq N : \quad \|f_i(x) - f(x)\| \leq \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad 1) \; \|f(x)\| \leq \|f_i(x)\| + \varepsilon/2 \leq \|f_i\|_\infty + \varepsilon$$

also: f ist beschränkt

$$2) \; \|f_i - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

also $f = \lim f_*$ $\boxtimes$

Satz: Sei Y ein metrischer Raum.
Für eine Teilmenge $X \subseteq Y$ sind äquivalent:

1a) X ist folgenkompakt.

⌜Jede Folge x_* in X hat eine Teilfolge, die gegen einen Punkt in X konvergiert.⌟

1b) X ist abzählbar kompakt

⌜Jede Folge x_* in X hat einen Häufungspunkt in X.⌟

2) X ist kompakt.

⌜Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.⌟

Bew: $1a \Rightarrow 1b$

Hat eine Folge eine konvergente Teilfolge mit Limes in X, so ist dieser Limes ein Häufungspunkt der Folge.

1b ⟹ 1a:

Sei x_* eine Folge und $x \in X$ Häufungspunkt. Dann gibt es eine Teilfolge x_{i_*} mit

$$x_{i_j} \in \mathbb{B}_{\frac{1}{j+1}}(x)$$

Dann ist x Grenzwert dieser Teilfolge.

nicht 1 ⟹ nicht 2:

Sei a_* eine Folge in X ohne Häufungspunkt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \ni x$, die nur endlich viele Folgenglieder enthält. Insbesondere kann eine Vereinigung endlich vieler solcher Umgebungen U_x nicht alle (d.h. insbesondere unendlich viele) Folgenglieder a_i enthalten. Also ist $\{U_x \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

nicht 2 $\Rightarrow$ nicht 1:

Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

Für $\varepsilon > 0$ setze

$$V(\varepsilon) := \bigcup \{ \mathbb{B}_\varepsilon(y) \mid \exists U \in \mathcal{U} : \mathbb{B}_{2\varepsilon}(y) \subseteq U \}$$

Bem: $V(\varepsilon)$ ist offen als Vereinigung offener Mengen.

Jeder Punkt $x \in X$ liegt in einem $U \in \mathcal{U}$. Da U offen ist, gibt es also $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Somit: $\boxed{X \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} V(\varepsilon)}$

Fall 1: $\forall \varepsilon > 0 : X \nsubseteq V(\varepsilon)$

Dann gibt es eine Nullfolge

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$$

und Punkte

$$x_0 \in V(\varepsilon_0)$$
$$x_1 \in V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_0)$$
$$x_2 \in V(\varepsilon_2) - V(\varepsilon_1)$$
$$\vdots$$

Für $x \in X$ gibt es ein $V(\varepsilon_i)$ mit $x \in V(\varepsilon_i)$. Da die offene Menge $V(\varepsilon_i)$ nur endl. viele Folgenglieder enthält, ist x kein Häufungspunkt.

<u>Fall 2:</u> $\exists\ \varepsilon > 0 : \quad X \subseteq V(\varepsilon)$

<u>Bem:</u> $V(\varepsilon) = \bigcup \{ \mathbb{B}_\varepsilon(x) \mid \mathbb{B}_{2\varepsilon}(x) \subseteq U \in \mathcal{U} \}$

<u>d.h.</u> Zu jedem $v \in V(\varepsilon) = X$ existiert $y \in Y$ und $U \in \mathcal{U}$ mit

$$v \in \mathbb{B}_\varepsilon(y) \quad \text{und} \quad \mathbb{B}_{2\varepsilon}(y) \subseteq U$$

Also insbesondere $\mathbb{B}_\varepsilon(v) \subseteq U$!!

<u>Nun:</u> Zu $x_0 \in X$ gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U_0$.

$X \not\subseteq U_0$. Also gibt es $x_1 \in X - U_0$ und $U_1 \in \mathcal{U}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(x_1) \subseteq U_1$.

$X \not\subseteq U_0 \cup U_1$. Also gibt es $x_2 \in X - U_0 - U_1$ und $U_2 \in \mathcal{U}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(x_2) \subseteq U_2$.

Wegen $\mathbb{B}_\varepsilon(x_i) \subseteq U_i$ und

$$x_{n+1} \notin U_0 \cup \dots \cup U_n$$

ist $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon \quad \forall i \leq n.$

Darum hat x_n keine Teilfolge, die Cauchyfolge ist. $\boxtimes$

<u>Kor:</u> Ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a,b]$ ist kompakt: jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

<u>Anwendung</u>: Sei $g: I \to F$ stetig und $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in I$ gibt es $\delta_t > 0$ mit $g(I \cap \mathbb{B}_{\delta_t}(t)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(g(t))$.

Dann ist $\{\mathbb{B}_{\delta_t}(t) \mid t \in I\}$ eine offene Überdeckung, aus der eine endliche Teilüberdeckung

$$I \subseteq \mathbb{B}_1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_n$$

ausgewählt werden kann.

Wir können also eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

von $I = [a,b]$ finden, so daß jedes Unterteilungsstück in einem $\mathbb{B}_i$ liegt. Damit gibt es eine Treppenfunktion, die in der Supremumsnorm ε-nahe bei g liegt.

<u>Kor</u>: Jede stetige Funktion $g: I \to F$ liegt in $\overline{\mathcal{J}}(I;F)$ und ist Cauchy-integrierbar.

Beob: Für zwei Treppenfunktionen
$$f, g : [a,b] \to F$$
und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Bew: Die Unterteilung
$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$
sei Zeuge für f <u>und</u> g. Dann ist sie auch Zeuge für $\alpha f + \beta g$ und es ist mit $t_i \in (a_{i-1}, a_i)$:
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(t_i)(a_i - a_{i-1})$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^n f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^n g(t_i)(a_i - a_{i-1})$$
$$= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Kor (Linearität des Integral)
Für Cauchy-integrierbare Funktionen
$$f, g : [a,b] \to F$$

und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

<u>Bew</u>: Seien f_* und g_* Cauchyfolgen von Treppenfunktionen mit

$$f_* \to f \quad \text{und} \quad g_* \to g$$

Dann konvergiert $\alpha f_* + \beta g_*$ gegen $\alpha f + \beta g$ und es ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \lim \int_a^b (\alpha f_* + \beta g_*) \\
&= \lim \alpha \int_a^b f_* + \beta \int_a^b g_* \\
&= \alpha \lim \int_a^b f_* + \beta \lim \int_a^b g_* \\
&= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

__Beob__ Für Treppenfunktionen

$$f, g : [a,b] \to F$$

gilt:

$$(*) \quad \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon \implies \left\| \int_a^b f - \int_a^b g \right\| \leq (b-a)\,\varepsilon$$

⌜ __Übung__: Folgere, daß $(*)$ für beliebige Cauchy-integrierbare Funktionen gilt. ⌟

__Bew__: Mit $h := f - g$ und der Linearität des Integral ist zu zeigen:

$$\|h\|_\infty \leq \varepsilon \implies \left\| \int_a^b h \right\| \leq \varepsilon$$

Das folgt mit der Dreiecksungleichung. Sei nämlich die Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

ein Zeuge für h, so ist

$$\left\| \int_a^b h \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n h(t_i)(a_i - a_{i-1}) \right\| \qquad t_i \in (a_{i-1}, a_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|h_i(t_i)\| (a_i - a_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon (b-a) \qquad \boxtimes$$