Vektorfelder und Integralkurven

$U \subseteq E$ offen $\quad E$: Banachraum

Def: Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung

$$X : U \to E$$

Wir sprechen von stetigen, differenzierbaren, k mal (stetig) differenzierbaren und glatten Vektorfeldern (sind ja bloß Abbildungen).

Von besonderem Interesse sind Lipschitz-stetige Vektorfelder

⌜ $\exists L \; \forall \underline{u}, \underline{v} \in U$: $\qquad$ Lipschitz-Konstante

$$\|X(\underline{u}) - X(\underline{v})\| \leq L \|\underline{u} - \underline{v}\|$$ ⌟

und lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder

⌜ Jeder Punkt $\underline{u} \in U$ hat eine offene Umgebung V, so daß $X|_V : V \to E$ Lipschitz-stetig ist. ⌟

<u>Bem</u>: Ist das Vektorfeld $X: U \to E$ (lokal) Lipschitz-stetig, so ist X lokal beschränkt.

<u>Bew</u>: Sei L die Lipschitz-Konstante. Dann ist für $\underline{v} \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y}) \subseteq U$:

$$\begin{aligned} \|X(\underline{v})\| &\leq \|X(\underline{y})\| + \|X(\underline{v}) - X(\underline{y})\| \\ &\leq \|X(\underline{y})\| + L\,\|\underline{v} - \underline{y}\| \\ &\leq \|X(\underline{y})\| + \delta L \end{aligned}$$

Also ist X auf $\overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y})$ beschränkt durch $C := \|X(\underline{y})\| + \delta L$. $\boxtimes$

<u>Def</u>: Eine <u>Integralkurve</u> von X ist eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : I \to U \qquad (I \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall})$$

mit:

$$(*) \qquad \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in I$$

Bem: Für ein stetiges Vektorfeld X können wir (*) mit dem Hauptsatz äquivalent (!) schreiben als: $t_0 \in I$ fest

$$(\circ) \qquad \gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(\gamma(s))\,ds \quad \forall t \in I$$

Bem: Ist X stetig, so ist $\gamma' = X \circ \gamma$ stetig, also ist γ stetig differenzierbar.
Ist X stetig differenzierbar, ist $\gamma' = X \circ \gamma$ stetig differenzierbar, also ist γ zweimal stetig differenzierbar.

...

Die Differenzierbarkeitsordnung einer Integralkurve ist besser als die des Vektorfeldes X; es sei denn, X ist glatt. Dann ist γ auch „bloß" glatt.

Satz (Picard-Lindelöf)

Sei X ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf U. Durch jeden Punkt $\underline{y} \in U$ läuft dann eine Integralkurve, d.h.:

$$\forall \underline{y} \in U \ \exists \varepsilon > 0, \ \gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \to U:$$

1) $\gamma(0) = \underline{y}$ $\ulcorner \gamma$ geht durch $\underline{y} \lrcorner$

2) γ ist Integralkurve

Ferner sind Integralkurven lokal eindeutig bestimmt:

oBdA $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$

Sind $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ und $\tilde{\gamma}: [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}] \to U$ Integralkurven durch $\underline{y} = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, so gibt es $\eta > 0$ mit

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall t \in [-\eta, \eta]$$

Bew: Sei V eine offene Umgebung von $\underline{u}$, in der X Lipschitz-stetig mit Konstante L ist:

$$\| X(\underline{v}) - X(\underline{v}') \| \leq L \| \underline{v} - \underline{v}' \| \quad \forall \underline{v}, \underline{v}' \in V$$

Lokale Eindeutigkeit:

Seien $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V$ und $\tilde{\gamma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V$ zwei Integralkurven durch $\underline{u}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) &= \int_0^t X(\gamma(s)) - X(\tilde{\gamma}(s))\, ds \\
&\leq |t| \sup_{s \in [0,t]} \| X(\gamma(s)) - X(\tilde{\gamma}(s)) \| \\
&\leq |t| \, L \sup_{s \in [0,t]} \| \gamma(s) - \tilde{\gamma}(s) \|
\end{aligned}$$

Also

$$\sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \| \leq \varepsilon L \sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \|$$

Für $\boxed{\eta L < 1}$ impliziert das

$$\sup_{t \in [-\eta, \eta]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \| = 0$$

D.h.: $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall\, t \in [-\eta, \eta]$

<u>Existenz</u> von kurzen Integralkurven.

Ein kniffliges Problem liegt darin, $\varepsilon > 0$ so zu wählen, daß wir eine Chance haben, eine Integralkurve auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zu finden.

Wir werden ε falls nötig im Verlauf des Arguments verkleinern.

Da X stetig ist, gibt es $C > 0$ und $\delta > 0$, so daß $\overline{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})} \subseteq \mathbb{B}_{2\delta}(\underline{u}) \subseteq V$ ist und

$$\|X(\underline{v})\| < C \quad \text{für alle } \underline{v} \in \overline{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})} \subseteq \mathbb{B}_{2\delta}(\underline{u})$$

Dann folgt aus $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \overline{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})}$:

$$\left\| \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \right\| < \varepsilon C \qquad \forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

<u>Forderung 1</u>: $\varepsilon C < \delta$

Dann ist $\underline{u} + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \in \overline{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})}$ für jedes $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma \text{ stetig} \\ \gamma(0) = \underline{y} \end{array} \right\}$$

mit der Metrik

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) := \sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \|$$

Wir definieren:

$$\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$\gamma \mapsto \underbrace{\left(t \mapsto \underline{y} + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \right)}_{\Psi_\gamma}$$

Durch $\varepsilon C < \delta$ ist sichergestellt, daß mit $\gamma \in \mathcal{F}$ auch $\Psi_\gamma \in \mathcal{F}$ ist.

<u>Forderung 2</u>: $\varepsilon L < 1$

<u>Beh</u>: $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ist eine Kontraktion.

$\ulcorner$ Seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y})$ beide im $\mathcal{F}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
d(\Psi_{\gamma}, \Psi_{\tilde\gamma}) &= \sup_t \| \Psi_\gamma(t) - \Psi_{\tilde\gamma}(t) \| \\
&= \sup_t \left\| \int_0^t X(\gamma(s)) - X(\tilde\gamma(s))\, ds \right\| \\
&\leq \sup_t \int_0^t \| X(\gamma(s)) - X(\tilde\gamma(s)) \| \, ds \\
&\leq \sup_t \int_0^t L \, \| \gamma(s) - \tilde\gamma(s) \| \, ds \\
&\leq \varepsilon L \sup_t \| \gamma(t) - \tilde\gamma(t) \| = \underbrace{\varepsilon L}_{\underline{\underline{<1}}} \, d(\gamma, \tilde\gamma)
\end{aligned}
$$

$\square$

Also: Für $\gamma_0, \tilde\gamma_0 \in \mathcal{F}$ sind durch

$$\gamma_{i+1} := \Psi_{\gamma_i} \qquad \tilde\gamma_{i+1} := \Psi_{\tilde\gamma_i}$$

zwei Cauchy-parallele Folgen erklärt.

Bem: $\mathcal{F}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Bew: Übung

Lösung: Es gibt zwei Strategien:

1) Benutze, daß $C_b([-\varepsilon;\varepsilon]; E)$ ein

Banachraum ist.

2) Modifiziere den Beweis, daß $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$ ein Banachraum ist.

<u>zu 1:</u> Offenbar ist $\mathcal{F} \subseteq C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$.

Die Metrik auf $\mathcal{F}$ wird induziert von der Norm auf $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$. Sei also γ_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$. Da $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$ vollständig ist, hat γ_* einen Limes γ in $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$.

Zu zeigen ist $\gamma \in \mathcal{F}$:

a) $\gamma_* \to \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma_*(0) \to \gamma(0)$

$$\Rightarrow \quad \gamma(0) = \underline{y}$$

b) Für $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$ ist also

$$\underset{\delta}{\underset{\wedge\!\!|}{\|\gamma_*(t)\|}} \longrightarrow \|\gamma(t)\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\gamma(t)\| \leq \delta.$$

<u>zu 2:</u> Sei γ_* eine Cauchyfolge im $\mathcal{F}$. Für $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist dann $\gamma_*(t)$ eine Cauchyfolge in $\overline{B_\delta(\underline{y})} \subseteq E$.

Sei $\gamma(t) := \lim\limits_{*\to\infty} \gamma_*(t)$. Dann ist zunächst wegen Stetigkeit der Norm

$$\underset{\delta}{\underset{\wedge\!\!\!/\!/}{\|\gamma_*(t)\|}} \longrightarrow \|\gamma(t)\|$$

$$\Longrightarrow \quad \|\gamma(t)\| \leq \delta$$

<u>Also:</u> $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{B_\delta}(\underline{y})$

Zum anderen ist γ stetig, weil γ <u>gleichmäßiger</u> Limes einer Folge γ_* stetiger Funktionen ist (so ist die Metrik auf $\mathcal{F}$ gemacht).

Schließlich ist

$$\gamma_*(0) \to \gamma(0)$$

woraus $\gamma(0) = \underline{y}$ folgt.

<u>Also:</u> $\gamma \in \mathcal{F}$ $\square$

Banachscher Fixpunktsatz:

Φ hat in E (genau) einen Fixpunkt $\gamma = \Psi_\gamma$

Bem: γ ist eine Integralkurve durch den Punkt $\underline{y} = \gamma(0)$.

$$\gamma = \Phi_\gamma \iff \gamma(t) = \Phi_\gamma(t) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\iff \gamma(t) = \underline{y} + \int_0^t X(\gamma(s))\,ds$$

$$\iff (0)$$

$\boxtimes$

Bsp (homogene lineare DGL)

A: Matrix in $\mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$

$$X : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$
$$\underline{v} \longmapsto A\underline{v}$$

Picard-Iteration

$$\gamma_0(t) := \underline{u} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_{i+1}(t) = \underline{u} + \int_0^t X(\gamma_i(s))\,ds$$
$$= \underline{u} + \int_0^t A\gamma_i(s)\,ds$$
$$= \underline{u} + A\int_0^t \gamma_i(s)\,ds$$

Also: $\gamma_1(t) = \underline{u} + A\int_0^t \underline{u}\,ds = (1 + tA)\underline{u}$

$$\gamma_2(t) = \underline{u} + A\int_0^t (1 + sA)\,\underline{u}\,ds$$
$$= \underline{u} + A\int_1^t \underline{u}\,ds + A^2\int_0^t s\,\underline{u}\,ds$$
$$= \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2}\right)\underline{u}$$

$$\gamma_3(t) = \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{6}\right)\underline{u}$$

Beh: $\gamma_k(t) = \left(1 + tA + \cdots + \frac{(tA)^k}{k!}\right)\underline{u}$