Lineare Differentialgleichungen

Def: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A : I \to \mathcal{B}(E;E)$$

$$\underline{b} : I \to E$$

stetige Funktionen. Das zeitabhängige Vektorfeld

$$X : I \times E \to E$$

$$(t, \underline{u}) \mapsto A_t(\underline{u}) + \underline{b}_t$$

heißt affin. (Entspricht einer sogenannten linearen DGL.)

Bem: Stetigkeit von A impliziert, daß $X|_{[a,b]\times E}$ stets uniform Lipschitz-stetig im Raum ist. Also existiert zu jedem Paar (t_0, u_0) eine Integralkurve

$$\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$$

Beweis P.-L.

mit $\gamma(t_0) = u_0$ für $\varepsilon = \frac{1}{L}$ für $t_0 \in [a + \frac{1}{L}, b - \frac{1}{L}]$.

Kor: Integralkurven von X sind auf ganz I fortsetzbar.

Bew: Sie sind fortsetzbar auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq I$. $\boxtimes$

Def: Ist $\underline{b}_t = 0 \quad \forall\, t \in I$, so hat X die Form

$$X_t(\underline{u}) = A_t(\underline{u})$$

und ist also ein <u>lineares</u> Vektorfeld.

Beob: Sei X ein lineares Vektorfeld. Dann ist

$$\overline{E} := \{\gamma : I \to E \mid \gamma : X\text{-Int.kurve}\}$$

ein Vektorraum. Für jedes $t \in I$ ist die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} ev_t : \overline{E} &\to E \\ \gamma &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. $\boxtimes$

Beob: Sei $X_t(\underline{y}) = A_t(y) + \underline{b}_t$ ein affines Vektorfeld. Für zwei X-Intkurven γ und $\bar{\gamma}$ ist dann

$$\frac{d}{dt}(\gamma - \bar{\gamma}) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t - A_t(\bar{\gamma}(t)) - b_t$$
$$= A_t(\gamma(t) - \bar{\gamma}(t))$$

Also ist $\gamma - \bar{\gamma}$ Intkurve des zugehörigen linearen Vektorfeldes.

Also: Haben wir eine Integralkurve γ_{sp} des affinen Vektorfeldes X, so erhalten wir alle Int. kurven durch Addition:

$$\left\{ \gamma : I \to E \;\middle|\; \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t \right\} =$$

$$= \left\{ \gamma_{sp} + \gamma \;\middle|\; \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t)) \right\}$$

Anw: $E = \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \left\{ \gamma \;\middle|\; \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t)) \right\}$ hat Dim. m. Finde eine Basis.

In der Sprache der DGL^n:

Jede Lösung der inhomogenen DGL $\gamma'(t) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t$ ergibt sich aus einer speziellen Lösung durch Addition von Lösungen der homogenen DGL. Der VR all dieser Lösungen hat die Dimension von E.

Eine Basis dieses Lösungsraumes heißt Fundamentalsystem.

<u>Bsp</u>: $f''(t) = f(t)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = f(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

Die Gronwallsche Ungleichung

Lemma: $g: I \to \mathbb{R}^+$ sei stetig differenzierbar und erfülle für ein festes $L > 0$:

$$g'(t) \leq L\, g(t) \qquad \forall\, t \geq \underline{\underline{0 \in I}}$$

Dann gilt für $t \geq 0$:

$$g(t) \leq g(0)\, e^{L(t-t_0)}$$

Bew: Setze $h(t) := e^{-Lt} g(t)$

$$\Rightarrow h'(t) = -L e^{-Lt} g(t) + e^{-Lt} g'(t)$$

$$\leq -L h(t) + L \underbrace{e^{-Lt} g(t)}_{= h(t)} = 0$$

Also: h ist monoton fallend für $t \geq 0$. $\boxtimes$

Kor (Gronwallsche Ungleichung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}^+$ stetig mit

$$f(t) \leq f(0) + L \int_0^t f(s)\, ds$$

für ein $L > 0$. Dann gilt für $t \geq 0$:

$$f(t) \leq f(0)\, e^{Lt}$$

Bew: Setze $g(t) := f(0) + L\int_0^t f(s)\,ds$.

Dann ist g stetig differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = Lf(t) \leq Lg(t)$$

Also ist mit dem Lemma:

$$f(t) \leq g(t) \leq g(0)e^{Lt} = f(0)e^{Lt} \qquad \boxtimes$$

Kor (Entfernung von Integralkurven)

Sei $X : I \times U \to E$ ein zeitabhängiges Vektorfeld, und für jedes $t \in I$ sei X_t Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$ (unabh. von t). Für zwei Integralkurven $\gamma, \tilde{\gamma} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$ gilt:

$$\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| \leq \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\|\, e^{L|t - t_0|}$$

Bew: O.B.d.A $t_0 = 0$. Wir betrachten:

$$f : t \mapsto \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\|$$

Dann ist mit (0):

$$f(t) \leq \|\gamma(0) - \tilde{\gamma}(0)\| + \left\|\int_0^t X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde{\gamma}(s))\,ds\right\|$$

$$\leq f(0) + \int_0^t \| X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde\gamma(s)) \| \, ds$$

$$\leq f(0) + L \int_0^t \| \gamma(s) - \tilde\gamma(s) \| \, ds$$

$$= f(0) + L \int_0^t f(s) \, ds$$

Also ist für $t \geq 0$:

$$\| \gamma(t) - \tilde\gamma(t) \| = f(t) \leq f(0) e^{Lt} = \| \gamma(0) - \tilde\gamma(0) \| e^{L(t)}$$

Für $t \leq 0$ wende man das erzielte Ergebnis auf die Kurven $t \mapsto \gamma(-t)$ und $t \mapsto \tilde\gamma(-t)$ an. Das sind nämlich Integralkurven zum Vektorfeld

$$-X : -I \times U \to U$$
$$(t, y) \mapsto -X_{-t}(y)$$

$\boxtimes$

Kor: Der Fluß eines (zeitabh.) Vf ist stetig und sogar Lipschitz-stetig „im Raum", d.h. $\Phi(t, t_0, *) : U \to U$ ist Lipschitz-stetig für jedes (t, t_0), allerdings mit einer von (t, t_0) abhängigen Lipschitz-konstanten.

Bem: Es ergibt sich auch ein alternative Beweis für die Eindeutigkeit von Integralkurven (sogar in stetig parametrisierten Scharen zeitabh. Vektorfelder).

Woher kommen Differentialgleichungen?

Bsp (Funktionalgleichungen)

Gesucht ist eine glatte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit

$$f(a+b) = f(a)\, f(b)$$

Ansatz:

$$f'(a) = \lim_{b\to 0} \frac{f(a+b) - f(a)}{b}$$

$$= \lim_{b\to 0} \frac{f(a)\,(f(b) - 1)}{b}$$

$$= f(a) \underbrace{\lim_{b\to 0} \frac{f(b) - 1}{b}}_{=:\, K}$$

$$f'(a) = K\, f(a) \qquad \text{DGL}$$

Lösung: $f(a) = e^{Ka}$

Bsp (klassische Mechanik)

Ein System hat endlich viele Massen, die wir uns punktförmig vorstellen. Ihre Orte werden durch Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ beschrieben. Jedes x_i hängt von der Zeit t ab. Die Ableitungen $\dot{x}_i$ beschreiben die Geschwindigkeitsvektoren der Massepunkte.

Zu jedem Zeitpunkt hat das System eine <u>kinetische Energie</u> $T(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ und eine potentielle Energie $U(t, \underline{x}, \underline{\dot{x}})$.

Bsp:

kann nur in einer Richtung schwingen

Das System wird durch <u>eine</u> Koordinate x beschrieben.

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$U = \frac{F}{2}(x-L)^2$$

F: Materialkonstante

L: Länge der unbelasteten Feder

Fakt (Physik)

Die Bewegung des System $\underline{x}(t)$ genügt der Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}}}$$

wobei die Wirkung $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{L} = T - U$$

Bsp (Fortsetzung)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{F}{2}(x-L)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -Fx + FL = F(L-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$(*) \qquad F(L-x) = m\ddot{x} \qquad \underline{\underline{2^{te} \text{ Ordnung!}}}$$

<u>Physik</u>: Das Weltgeschehen ist die Lösung einer DGL 2^{ter} Ordnung.

Wir werden noch sehen, daß diese Aussage der empirischen Überprüfung zugänglich ist.

<u>Bsp</u> (Fortsetzung)

Lösungen von (*) sind:

$$x(t) = L + \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{F}{m}}\,\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{F}{m}\,\alpha\sin\left(\sqrt{\frac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

<u>Insbesondere</u>: Die Frequenz der Schwingung hängt nicht von der Auslenkung ab.

Bsp (Variationsrechnung)

Gegeben sei eine glatte Funktion

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Gesucht ist eine glatte Funktion

$$\underline{y} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \mapsto \underline{y}_a, \quad b \mapsto \underline{y}_b$$

die das Integral

$$I(\underline{y}) := \int_a^b L(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))\, dx$$

minimiert / maximiert.

Ansatz: Sei $\underline{h} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige glatte Funktion mit $\underline{h}(a) = \underline{h}(b) = 0$.

Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \underline{y}_t : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto \underline{y}(x) + t\,\underline{h}(x) \end{aligned}$$

Beachte

$$\underline{y}_t(a) = \underline{y}(a) = \underline{y}_a$$

$$\underline{y}_t(b) = \underline{y}(b) = \underline{y}_b$$

Wenn $\underline{y}$ das Integral $I(\underline{y})$ maximiert, hat

$$\ell : t \mapsto L(\underline{y}_t)$$

eine Extremstelle bei $t=0$.

Also gilt:

$$0 = \frac{d\ell}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^b L(x, \underline{y}(x) + t\underline{h}(x), \underline{y}'(x) + t\underline{h}'(x))\, dx \Big|_{t=0}$$

Abhängigkeit von x in der Notation unterdrückt

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h} + \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}' \, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}\, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}'\, dx$$

partielle Integration

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}\, dx + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}\right]_a^b}_{=0 \text{ weil } \underline{h}(a) = \underline{h}(b) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\underline{h}\, dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\right)\underline{h}\, dx$$

Da $\underline{h}$ beliebig ist, folgt

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')$$

<u>Also:</u>

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \underline{y}} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}}$$

<u>Bem:</u> Dies ist die Euler-Lagrange-DGL des Variationsproblems. Sie ist eine <u>notwendige Bedingung</u>, die jede Lösung erfüllen muß.

<u>Bem:</u> Vergleiche klassische Mechanik:

! Die Bewegung eines mechanischen System minimiert die Wirkung $L = T - U$.