Metrische Räume

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper.
Wir denken stets an $\mathbb{R}$.

Def: Eine <u>$\mathbb{K}$-Pseudometrik</u> auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{K}$$

die folgenden Bedingungen genügt:

1) Verschwindender Selbstabstand:

$$d(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$$

2) Symmetrie:

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$$

3) <u>Dreiecksungleichung</u>:

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$$

Gilt ferner

4) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x,y$

So ist d eine <u>$\mathbb{K}$-Metrik</u>.

Beob: Eine Pseudometrik $d: X \times X \to \mathbb{K}$ ist nicht-negativ:

$$d(x,y) \geq 0 \qquad \forall\, x,y \in X$$

Bew: $$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2\, d(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq d(x,y) \qquad \boxtimes$$

Prop: Ist $d: X \times X \to \mathbb{K}$ eine Pseudometrik, so wird durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad d(x,y) = 0$$

eine Äquivalenzrelation erklärt.

Sei $\overline{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Die Abbildung

$$\overline{d}: \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{K}$$
$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto d(x,y) \quad \text{für Repräsentanten } x \in \overline{x},\ y \in \overline{y}$$

ist wohldefiniert und eine Metrik auf $\overline{X}$.

Bew: Symmetrie von $\sim$ folgt aus der Symmetrie von d. Die

Bedingung $d(x,x)=0$ ist gerade die Reflexivität von $\sim$.

Zur Transitivität:

$$x \sim y \quad \text{und} \quad y \sim z$$

$$\Rightarrow d(x,y)=0 \quad \text{und} \quad d(y,z)=0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Bem 2}}{0 \leq} d(x,z) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,y)+d(y,z)=0$$

$$\Rightarrow d(x,z)=0$$

$$\Rightarrow x \sim z$$

$\bar{d}$ ist wohl-definiert (d.h. unabhängig von der Wahl von Repräsentanten):

$$x_1, x_2 \in \bar{x} \qquad y_1, y_2 \in \bar{y}$$

zu zeigen: $d(x_1,y_1)=d(x_2,y_2)$.

Es ist

$$d(x_1,y_2) \leq d(x_1,y_1)+d(y_1,y_2)=d(x_1,y_1)$$

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_1,y_2)+d(y_2,y_1)=d(x_1,y_2)$$

Also $d(x_1,y_1)=d(x_1,y_2)$.

Analog: $d(x_1, y_2) = d(x_2, y_2)$.

Damit: $d(x_1, y_1) = d(x_1, y_2) = d(x_2, y_2)$.

$\bar{d}$ ist eine Metrik:

1) $\bar{d}(\bar{x}, \bar{x}) \underset{x \in \bar{x}}{=} d(x, x) = 0$

2) $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \underset{\substack{x \in \bar{x} \\ y \in \bar{y}}}{=} d(x, y) = d(y, x) = \bar{d}(\bar{y}, \bar{x})$

3) $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{d}(\bar{y}, \bar{z}) = d(x, y) + d(y, z)$
$\leq d(x, z) = \bar{d}(\bar{x}, \bar{z})$

4) Sei $\bar{x} \neq \bar{y}$. Da $\sim$ eine Äquivalenz-relation ist, sind Äquivalenzklassen disjunkt: $\bar{x} \cap \bar{y}$.
Für Vertreter $x \in \bar{x}$ und $y \in \bar{y}$ gilt also $x \not\sim y$. Dann ist

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y) \neq 0 \quad \text{wegen } x \not\sim y$$

Also:
$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$$

$\boxtimes$

Bsp: Sei $q: X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$q(x,y) = q(y,x) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$$

Definiere:

$$d(x,y) := \inf \left\{ \sum \underbrace{q(x_i, x_{i+1})}_{\text{Sprunglänge}} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0 = x \\ \vdots \\ x_n = y \end{array} \right\}$$

$d(x,x) = 0$ keine Sprünge nötig.

Beh: $d: X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Pseudometrik

Bew: 1) $d(x,x) = 0$ ✓

2) $$d(x,y) = \inf\left\{\sum q(x_i, x_{i+1})\right\} = \inf\left\{\sum q(x_{i+1}, x_i)\right\} = d(y,x)$$

3) Seien $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n = y$ und $y = x_n \to x_{n+1} \to \dots \to x_N = z$ Sprungfolgen. Dann ist

$$x = x_0 \to \dots \to x_N = z$$

eine Sprungfolge. Es folgt

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$\boxtimes$

Normierte Räume

Def: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Halbnorm auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$$

mit

1) $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \, \|\underline{v}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V$

   (Homogenität)

2) $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

   (Subadditivität)

Eine Halbnorm ist eine Norm, wenn zusätzlich gilt:

3) $\|\underline{v}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{v} \in V$

   (Definitheit)

Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm heißt normierter Raum.

<u>Prop:</u> Sei $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ eine Halbnorm.

Dann ist

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \|\underline{u} - \underline{v}\|$$

eine Pseudometrik. Ist $\|\cdot\|$ sogar eine Norm, so ist $d_{\|\cdot\|}$ eine Metrik.

<u>Bew:</u> Sei $\|\cdot\|$ eine Halbnorm. Dann ist

1) $d(\underline{u}, \underline{u}) = \|\underline{u} - \underline{u}\| = \|\underline{0}\| = |0| \, \|\underline{0}\| = 0$

2) $d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\| = |-1| \, \|\underline{v} - \underline{u}\| = d(\underline{v}, \underline{u})$

3) $d(\underline{u}, \underline{w}) = \|\underline{u} - \underline{w}\| = \|\underline{u} - \underline{v} + \underline{v} - \underline{w}\|$

$\leq \|\underline{u} - \underline{v}\| + \|\underline{v} - \underline{w}\| = d(\underline{u}, \underline{v}) + d(\underline{v}, \underline{w})$

Nun sei $\|\cdot\|$ sogar eine Norm. Dann ist

4) $d(\underline{u}, \underline{v}) = 0 \Leftrightarrow \|\underline{u} - \underline{v}\| = 0$

$\Leftrightarrow \underline{u} - \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{v}$ $\boxtimes$

<u>Bem:</u> Wir fassen jeden normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ auch als metrischen Raum $(V, d_{\|\cdot\|})$ auf.

Def: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Pseudometrik $d: V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

1) <u>translationsinvariant</u>, wenn gilt

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = d(\underline{u}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$$

2) <u>skalierbar</u>, wenn gilt

$$d(\lambda \underline{u}, \lambda \underline{v}) = |\lambda|\, d(\underline{u}, \underline{v}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Prop: Sei $d: V \times V \to \mathbb{K}$ eine translationsinvariante, skalierbare Pseudometrik auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_d : V &\to \mathbb{K} \\ \underline{v} &\mapsto d(0, \underline{v}) \end{aligned}$$

eine Halbnorm. Ist d eine Metrik, so ist $\|\cdot\|_d$ eine Norm.

Bew: Es ist für $\lambda \in \mathbb{K}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$

1) $$\begin{aligned} \|\lambda \underline{u}\|_d &= d(0, \lambda \underline{u}) = d(\lambda 0, \lambda \underline{u}) \\ &= |\lambda|\, d(0, \underline{u}) = |\lambda|\, \|\underline{u}\|_d \end{aligned}$$

2) $$\|\underline{u} + \underline{v}\| = d(0, \underline{u} + \underline{v})$$

$$\leq d(0,\underline{u}) + d(\underline{u}, \underline{u}+\underline{v})$$
$$= d(0,\underline{u}) + d(0,\underline{v}) = \|u\|_d + \|v\|_d$$

Ist d eine Metrik, so gilt:

$$\|\underline{u}\| = 0 \iff d(0,\underline{u}) = 0$$
$$\iff \underline{u} = 0 \qquad \boxtimes$$

Prop: Für eine skalierbare, translations-invariante Pseudometrik $d : V \times V \to \mathbb{K}$ ist $d = d_{(\|\cdot\|_d)}$.

Für eine Halbnorm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ ist $\|\cdot\|_{(d_{\|\cdot\|})} = \|\cdot\|$.

Insbesondere ist $\|\cdot\|_d$ eine Norm genau dann, wenn d eine Metrik ist; und $\|\cdot\|$ ist eine Norm genau dann, wenn $d_{\|\cdot\|}$ eine Metrik ist.

Bew: Übung

Topologische Räume

Def: Sei (X, d) ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum.
Für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{K}^{>0}$ heißt

$$\mathbb{B}_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$$

die offene ε-Kugel um x.

Die Menge

$$\overline{\mathbb{B}_\varepsilon}(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon \}$$

ist die abgeschlossene ε-Kugel um x.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn zu jedem Punkt $u \in U$ eine ε-Kugel um u ganz in U liegt.
[Das ε darf vom Punkt u abhängen.]

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X - A$ offen ist.

Bem: Abgeschlossene ε-Kugeln sind abgeschlossen.

Bew: $X - \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) \not\leq \varepsilon \}$

$$= \{ y \in X \mid d(x,y) > \varepsilon \}$$

Sei $y \in X - \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(x)$. Dann ist

$$\delta := d(x,y) - \varepsilon > 0$$

Für $z \in \mathbb{B}_\delta(y)$ gilt dann

$$d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z)$$
$$> d(x,y) - \delta = \varepsilon$$

Also ist $\mathbb{B}_\delta(y) \subseteq X - \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(x)$ $\boxtimes$

Bem: Die Vereinigung einer Familie offener Mengen ist eine offene Menge.
Der Durschnitt zweier offener Mengen ist offen.
Die leere Menge ist offen und abgeschlossen.
Der ganze Raum X ist offen und abgeschlossen.

Bew: Sei $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine Familie offener Teilmengen $U_\alpha \subseteq X$.

Beh: $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ist offen.

Denn: Sei $u \in U$. Dann gibt es
$\alpha \in I$ mit $u \in U_\alpha$ und $\varepsilon > 0$
in $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(u) \subseteq U_\alpha \subseteq U$. ✓

Seien $U, V \subseteq X$ offen

Beh: $U \cap V$ ist offen in X.

Denn: Zu $x \in U \cap V$ gibt es $\delta, \varepsilon > 0$ in $\mathbb{K}$ mit:

$$\mathbb{B}_\delta(x) \subseteq U \text{ und } \mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq V$$

Dann ist $\mathbb{B}_{\min(\delta,\varepsilon)}(x) \subseteq U \cap V$. ✓

<u>Beh</u>: $\emptyset$ ist offen.

Denn: <u>Zu jedem $x \in \emptyset$</u> gibt es ... ✓

<u>Kor</u>: $X = X - \emptyset$ ist abgeschlossen.

<u>Beh</u>: X ist offen.

Denn: $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq X$ unabhängig von x und ε. ✓

<u>Kor</u>: $\emptyset = X - X$ ist abgeschlossen. $\boxtimes$

<u>Def</u>: Sei X eine Menge. Eine <u>Topologie</u> auf X ist eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ von Teilmengen von X (genannt offene Mengen), so daß gilt:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$

   $X \in \mathcal{T}$

2) Für jede Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ offener Mengen ist die Vereinigung $\bigcup \mathcal{F}$ offen (also $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{T}$).

3) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

<u>Also</u>: Jeder normierte Raum ist (läßt sich auffassen als) ein metrischer Raum.
Jeder metrische Raum ist (läßt sich auffassen als) ein topologischer Raum.

<u>Def</u>: Sei X eine Menge. Eine <u>Topologie</u> auf X ist eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ von Teilmengen von X (genannt offene Mengen), so daß gilt:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$
2) Für jede Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ offener Mengen ist die Vereinigung $\bigcup \mathcal{F}$ offen (also $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{T}$).
3) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

Eine Menge, auf der eine Topologie festgelegt ist, heißt <u>topologischer Raum</u>.

<u>Also</u>: Jeder normierte Raum ist (läßt sich auffassen als) ein metrischer Raum.
Jeder metrische Raum ist (läßt sich auffassen als) ein topologischer Raum.

<u>Bsp</u>: Sei X eine beliebige Menge.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}ot(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ ist eine Topologie auf X. Wir nennen sie die <u>diskrete Topologie</u>.

Ein topologischer Raum heißt also <u>diskret</u>, wenn jede Teilmenge offen ist.

<u>Übung</u>: Ein topologischer Raum ist genau dann diskret, wenn alle einelementigen Teilmengen offen sind.

<u>Übung</u>: Sei X eine Menge. Gib eine Metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$ an, die die diskrete Topologie auf X induziert.

<u>Übung</u>: Ein $\mathbb{R}$-normierter Raum der Dimension ≥ 1 ist nicht diskret.

Def: Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Eine <u>offene Umgebung von x</u> ist eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt <u>Umgebung von x</u>, wenn sie Obermenge einer offenen Umgebung von x ist.

Def: Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.
Wir nennen f <u>stetig im Punkt $x \in X$</u>, wenn gilt:

Zu jeder Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von x mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung f heißt **stetig**, wenn sie im jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Satz: Die Abbildung $f: X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ein offenes Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ hat.

Bew: „$\Rightarrow$": Sei f überall stetig.

Zu zeigen: $f^{-1}(V)$ ist offen, wenn $V \subseteq Y$ offen ist.

$\ulcorner$ Sei also $V \subseteq Y$ offen. Für $x \in f^{-1}(V)$ ist V eine Umgebung von $f(x) \in V$.

Also gibt es eine (offene) Umgebung U_x von x mit $f(U_x) \subseteq V$. Dann ist

$$\bigcup_{x \in U} U_x = f^{-1}(V)$$

offen.

$\subseteq$: $f(U_x) \subseteq V \quad \forall x$

$\supseteq$: $x \in U_x \subseteq \bigcup U_x \quad \forall x \in f^{-1}(V)$ $\lrcorner$

„$\Leftarrow$": Sei nun $f^{-1}(V)$ offen für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$. Sei $x \in X$.

Zu zeigen: f ist stetig im Punkt x.

⌈ Sei V eine offene Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x. $\square$

<u>Übung</u>: Seien X und Y metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung.

Zeige: f ist stetig im Punkt x genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in X: \quad d_X(x', x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$

<u>Übung</u>: Seien E und F normierte Räume und $f: E \to F$ eine Abbildung. Zeige: f ist stetig in $\underline{u} \in E$ genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \underline{v} \in E: \quad \|\underline{u} - \underline{v}\| < \delta \Rightarrow \|f(\underline{u}) - f(\underline{v})\| < \varepsilon$$

<u>Def:</u> Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und x_* eine Folge in X. Wir sagen:

1) x ist <u>Häufungspunkt</u> von x_*, wenn für jede Umgebung U von x die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in U\}$ unendlich ist.

2) x_* konvergiert gegen x oder x ist Grenzwert / Limes der Folge x_*, wenn für jede Umgebung U von x die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \notin U\}$ endlich ist.

<u>Bem:</u> Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt. ☒

<u>Übung:</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und x_* eine Folge von Punkten. Zeige:

1) x ist Häufungspunkt von x_* gdw
$\forall \varepsilon > 0 : \{i \in \mathbb{N} \mid d(x, x_i) < \varepsilon\}$ ist unendl.

2) x ist Limes von x_* gdw
$\forall \varepsilon > 0 : \{i \in \mathbb{N} \mid d(x, x_i) \geq \varepsilon\}$ ist endlich

<u>Übung:</u> Ditto für normierte Räume

Prop: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen und $x \in X$ ein Punkt, in dem f stetig ist. Dann konvergiert $f(x_*)$ gegen $f(x)$ für jede Folge x_*, die gegen x konvergiert.

⌜ **Also:** f stetig in $x \Rightarrow f$ folgenstetig in x ⌟

Bew: x_* konvergiere gegen x. Sei $V \subseteq Y$ eine (offene) Umgebung von $f(x)$.

Zu zeigen: $\{i \in \mathbb{N} \mid f(x_i) \notin V\}$ ist endlich.

⌜ $f(x_i) \notin V \iff x_i \notin f^{-1}(V)$

Aber $f^{-1}(V)$ ist eine offene Umgebung von x. Darum ist $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \notin f^{-1}(V)\}$ endlich. ⌟ $\boxtimes$

Satz: Sei (X,d) ein $\mathbb{R}$-metrischer Raum und Y ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f: X \to Y$ sei in $x \in X$ folgenstetig. Dann ist sie stetig in X.

Bew: Wichtig ist hier folgende Eigenschaft der Topologie auf X:

Jeder Punkt $x \in X$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis, d.h.: Es gibt (offene) Umgebungen

$U_0, U_1, U_2, \dots$ $\quad U_i \quad \underline{i \in \mathbb{N}}$!!!

von x, so daß jede offene Umgebung V von x ein U_i enthält.

Bem: In einem $\mathbb{R}$-metrischen Raum wählen wir $U_m := \mathbb{B}_{1/1+m}(x)$.

Daß diese Kugeln eine Umgebungsbasis bilden folgt aus dem Archimedischen Prinzip:

Sei V eine offene Umgebung von x.
Nach Definition der offenen Mengen in metrischen Räumen gibt es mithin ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq V$.

$AP \Rightarrow \exists\, m : 0 < \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Nun zum Satz. Sei also f folgenstetig im Punkt x und sei $V \subseteq Y$ eine offene Umgebung von $f(x)$. Gesucht ist eine offene Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$.

Zum Widerspruch nehmen wir an, so eine Umgebung U gäbe es <u>nicht</u>.

Dann heißt das insbesondere

$$f(U_0 \cap \dots \cap U_n) \nsubseteq V \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

<u>also</u>: $\forall\, n\ \exists\, x_n \in \underbrace{U_0 \cap \dots \cap U_n}_{\text{offen}}$ mit $f(x_n) \notin V$

<u>Beob</u>: $f(x_*)$ konvergiert <u>nicht</u> gegen $f(x)$

<u>Beob:</u> x_* konvergiert gegen x.

⌜ Sei nämlich W eine offene Umgebung von x. Dann gibt es ein $U_m \subseteq W$. Dann aber ist $x_n \in U_0 \cap \dots \cap U_n \subseteq U_m \subseteq W$ für alle $n \geq m$. ⌟ ☒

Gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit

Seien X und Y metrische Räume über dem angeordneten $\mathbb{K}$.

<u>Def</u>: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u>, wenn es ein $L \in \mathbb{K}$ gibt, so daß gilt:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \, d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Wir nennen L die <u>Lipschitz-Konstante</u>

Wir nennen f eine <u>Kontraktion</u>, wenn f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L < 1$ ist.

<u>Def</u>: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, \bar{x} \in X :$$

$$d(x, \bar{x}) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(\bar{x})) \leq \varepsilon$$

Beob: Gleichmäßig stetige Abbildungen sind stetig:

f: gl. st.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x\in X: f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow \forall x\in X \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(x)$

$\Leftrightarrow$ f ist überall stetig

$\Leftrightarrow$ f ist stetig.

Bem: Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig.

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Dann gilt für $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$:

$$\forall x\in X: \ f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$

$$\left[d(x,\bar{x})<\delta \Rightarrow L\delta \geq d(f(x), f(\bar{x})) \right] \quad \boxtimes$$

Lemma: X: metrischer Raum

$x_0 \in X$ fest.

Die Abbildung $d(x_0, -) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x_0, x)$

ist gleichmäßig stetig.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \varepsilon$ kommen wir durch: Sei nämlich $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$

dann ist:

$$|d(x_0, x) - d(x_0, \bar{x})| < \varepsilon$$

$\ulcorner$

$$d(x_0, \bar{x}) \le d(x_0, x) + d(x, \bar{x}) < d(x_0, x) + \varepsilon$$

$$d(x_0, x) \le d(x_0, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < d(x_0, \bar{x}) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad d(x_0, x) - \varepsilon < d(x_0, \bar{x}) < d(x_0, x) + \varepsilon \quad \lrcorner \quad \boxtimes$$

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Def: Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ in X zwei disjunkte offene Umgebungen U_x um x und U_y um y existieren:

$$\forall x, y \in X: \quad x \neq y \Rightarrow \exists\, U_x, U_y \text{ offen}: \begin{array}{l} x \in U_x \quad y \in U_y \\ U_x \cap U_y = \emptyset \end{array}$$

Prop: In hausdorffschen Räumen sind Grenzwerte von Folgen eindeutig:

$$x_* \to x \text{ und } x_* \to y \Rightarrow x = y$$

Bew: Sei $x \neq y$. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni y$.
Das widerspricht
fastalle $x_i \in U$ und fast alle $x_j \in V$ $\boxtimes$

Bem: Metrische Räume sind hausdorffsch.
Insbesondere sind Grenzwerte konvergenter Folgen in metrischen Räumen eindeutig.

Bew: Sei $x \neq y$. Dann ist $d(x,y) > 0$.
Mit $\varepsilon := \frac{d(x,y)}{3} > 0$ ist $d(x,y) > \varepsilon + \varepsilon$.
Also sind die offenen Kugeln $\mathbb{B}_\varepsilon(x)$ und $\mathbb{B}_\varepsilon(y)$ disjunkt. $\boxtimes$

Übung: Zeige, daß jede Pseudometrik eine Topologie definiert.
Konstruiere so ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist.

Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

Def: Zwei Folgen x_* und y_* heißen *Cauchy-parallel* (wir schreiben $x_* \| y_*$), wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i, j \geq n : d(x_i, y_j) < \varepsilon$$

Eine Folge, die zu sich selbst Cauchy-parallel ist heißt *Cauchy-Folge*.

Also x_* ist eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i, j \geq n : d(x_i, x_j) < \varepsilon$$

Prop: Seien x_* und y_* zwei Folgen, die beide gegen $z \in X$ konvergieren. Dann sind x_* und y_* Cauchy-parallel. Insbesondere ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall i \geq n : d(x_i, z) < \varepsilon/2$$

$$\forall j \geq n : d(y_j, z) < \varepsilon/2$$

Es folgt mit Δ-Ungleichung

$$d(x_i, y_j) \leq d(x_i, z) + d(y_j, z) < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

<u>Warnung</u>: Es gibt metrische Räume, in denen nicht jede Cauchy-Folge konvergiert.

<u>Def</u>: Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt <u>vollständig</u>.

<u>Bsp</u>: $(\mathbb{Q}, d(p,q) := |p-q|)$ ist ein unvollständiger metrischer Raum.

$(\mathbb{R}, d(x,y) := |x-y|)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Banachscher Fixpunktsatz

Satz (Kontraktionssatz, Banachscher Fixpunktsatz)

Sei X ein vollständiger $\mathbb{R}$-metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Dann gilt:

1) Die Funktion f hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.
2) Für jeden Punkt $x_0 \in X$ konvergiert die Folge x_*, rekursiv definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)$, gegen den Fixpunkt.
3) Es gilt dabei die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

Bew Eindeutigkeit:

Seien x und $\bar{x}$ Fixpunkte. Dann ist $d(x, \bar{x}) = d(f(x), f(\bar{x})) \leq L\, d(x, \bar{x})$.

Da $L<1$ ist, folgt $d(x,\bar{x})=0$ und damit $x=\bar{x}$ (Definitheit).

Nun zur Existenz und den weiteren Aussagen. Zunächst ist

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_0),f(x_1)) \le L\, d(x_0,x_1)$$
$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1),f(x_2)) \le L^2 d(x_0,x_1)$$
$$\vdots$$

Also folgt mit Δ-Ungleichung für $m \le n$:

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\le d(x_m,x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1},x_n) \\ &\le \left(L^m + L^{m+1} + \dots + L^{n-1}\right) d(x_0,x_1) \\ &\le L^m \left(1+L+L^2+\cdots\right) d(x_0,x_1) \\ &= \frac{L^m}{1-L} d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}$ ist $\frac{L^m}{1-L} d(x_0,x_1)$ eine Nullfolge.

Darum ist x_* eine Cauchy-Folge.

X ist vollständig. Sei x der Grenzwert von x_*.

<u>Beh</u>: x ist Fixpunkt von f.

$\ulcorner$ f ist Lipschitz-stetig

$\Rightarrow$ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist folgenstetig.

$$x_* \longrightarrow x \quad \Rightarrow \quad f(x_*) \to f(x)$$

Nun ist $f(x_*) = (x_1, x_2, \dots)$ ein Folgenrest und konvergiert auch gegen x.

Da Grenzwerte in metrischen Räumen eindeutig sind, folgt $f(x) = x$. $\lrcorner$

Damit ist auch (2) gezeigt.

Die Abschätzung $d(x_m, x) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_0, x_1)$ ergibt sich wiefolgt:

$$d(x_m, -) : X \to \mathbb{R} \text{ ist (folgen)stetig}$$

$$\Rightarrow \quad d(x_m, x_*) \longrightarrow d(x_m, x)$$

Nun ist $d(x_m, x_n) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_0, x_1)$ unabhängig von n. Darum bleibt die Abschätzung auch nach Grenzübergang gültig. $\boxtimes$

Beob: Cauchy-Parallelität ist symmetrisch und transitiv. Insbesondere ist Cauchy-Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchy-Folgen.

Bew: Seien x_*, y_* und z_* Folgen in X mit $x_* \| y_*$ und $y_* \| z_*$.

1) $y_* \| x_*$ gilt wegen $d(x_i, y_j) = d(y_j, x_i)$

2) $x_* \| z_*$ gilt wegen Δ-Ungleichung:

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt m und n mit

$$\forall i, j \geq m : d(x_i, y_j) < \varepsilon/2$$
$$\forall j, k \geq n : d(y_j, z_k) < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall i, k \geq \max(m, n) :$$
$$d(x_i, z_k) < d(x_i, y_j) + d(y_j, z_k) < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Prop: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und X ein vollständiger $\mathbb{K}$-metrischer Raum, und seien x_* und $\bar{x}_*$ zwei Punktfolgen in X. Dann sind äquivalent:

1) x_* und $\bar{x}_*$ sind Cauchy-parallel

2) x_* und $\bar{x}_*$ konvergieren beide und für jedes $x \in X$ gilt:
$$x_* \to x \iff \bar{x}_* \to x$$

3) x_* und $\bar{x}_*$ haben genau einen gemeinsamen Grenzwert.

4) x_* und $\bar{x}_*$ haben einen gemeinsamen Grenzwert.

Bew: $\underline{1 \Rightarrow 2}$: $\quad x_* \| \bar{x}_*$, $\bar{x}_* \| x_* \Rightarrow x_* \| x_*$

Also: x_* ist Cauchy-Folge.

X ist vollständig. Sei x Grenzwert von x_*.

Beh: x ist Grenzwert von $\bar{x}_*$.

⌜ Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, daß

1) $d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \geq n$

2) $d(x_i, \bar{x}_j) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i, j \geq n$

$\Rightarrow d(\bar{x}_j, x) \leq d(\bar{x}_j, x_n) + d(x_n, x) < \varepsilon$ ⌟

Also: Jeder Grenzwert von x_* ist auch Grenzwert von $\bar{x}_*$.

Symmetrisch argumentieren wir für die Umkehrung.

2 ⇒ 3 ⇒ 4: metr. ⇒ hausd. ⇒ Lim. eind.

4 ⇒ 1: Sei x gemeinsamer Limes von x_* und $\bar{x}_*$. Sei $\varepsilon > 0$.

Es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

1) $d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \geq n$

2) $d(\bar{x}_j, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq n$

Dann ist für $i, j \geq n$:

$$d(x_i, \bar{x}_j) \leq d(x_i, x) + d(x, \bar{x}_j) < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Lemma: X: metr. Raum

x_*: Cauchy-Folge in X

$y_* := x_{n_*}$ unendl. Teilfolge

n_*: streng monotone Folge in $\mathbb{N}$

Dann gilt $x_* \parallel y_*$.

Bew: Da n_* streng monoton steigt, ist $n_i \geq i$ $\forall i$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall i, j \geq n : d(x_i, x_j) < \varepsilon$$

Dann gilt aber auch

$$d(x_i, y_j) = d(x_i, x_{n_j}) < \varepsilon$$

wegen $n_j \geq j \geq n$. $\boxtimes$

Vervollständigung

Def: Sei (X,d) ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum, so heißt

$$\overline{X} := \{\text{Cauchy-Folgen in } X\} \big/ \sim$$

Cauchy-Vervollständigung von X.

Die Abbildung

$$\iota : X \longrightarrow \overline{X}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, mapsto] & & {[* \mapsto x]} \\ & (* \mapsto x) \in \{\text{Cauchy-Folgen}\} \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

heißt kanonische Einbettung.

Bsp: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Durch

$$d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \longmapsto |x-y|$$

ist eine $\mathbb{K}$-wertige Metrik auf $\mathbb{K}$ erklärt. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbb{K}}$ die Vervollständigung von $\mathbb{K}$ bezüglich dieser Metrik.

Def: Sei (X, d) ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum, so heißt

$$\overline{X} := \{\text{Cauchy-Folgen in } X\} / \parallel$$

<u>Cauchy-Vervollständigung</u> von X.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow \overline{X} \\ x &\longmapsto [* \mapsto x] : \parallel\text{-Klasse} \end{aligned}$$

$(* \mapsto x)$: Cauchy-Folge

heißt <u>kanonische Einbettung</u>.

Bsp: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Durch

$$\begin{aligned} d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

ist eine $\mathbb{K}$-wertige Metrik auf $\mathbb{K}$ erklärt. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbb{K}}$ die Vervollständigung von $\mathbb{K}$ bezüglich dieser Metrik.

<u>Lemma:</u> Sei a_* eine Cauchy-Folge im angeordneten Körper $\mathbb{K}$. Dann ist a_* beschränkt, d.h., es gibt $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|a_i| < \alpha \quad \forall i$.

<u>Bew:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$|a_i - a_j| < 1 \qquad \forall i, j \geq n$$

Dann ist

$$|a_j| < |a_n| + 1 \qquad \forall j \geq n$$

Wir setzen also

$$\alpha := \max\{|a_k| + 1 \mid k \leq n\} \quad \boxtimes$$

Beob: Seien a_*, a'_*, b_* und b'_* Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_* \parallel a'_*$ und $b_* \parallel b'_*$. Dann gilt:

$$a_* \pm b_* \parallel a'_* \pm b'_* \quad \text{und} \quad a_* b_* \parallel a'_* b'_*$$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $|a_i - a_j'|, |b_i - b_j'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i, j \geq n$.

Dann ist

$$|a_i + b_i - a_j' + b_j'| \leq |a_i - a_j'| + |b_i - b_j'| < \varepsilon$$

$$|a_i - b_i - (a_j' - b_j')| \leq |a_i - a_j'| + |b_j' - b_i| < \varepsilon$$

Nun zur Multiplikation. Zunächst beobachten wir:

$$|a_i b_i - a_j' b_j'| = |a_i b_i - a_j' b_i + a_j' b_i - a_j' b_j'|$$

$$\leq |a_i - a_j'||b_i| + |a_j'||b_i - b_j'|$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Sei $C \in \mathbb{K}$ eine gemeinsame obere Schranke für $|a_*|$, $|a'_*|$, $|b_*|$ und $|b'_*|$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für $i, j \geq n$ gilt:

$$|a_i - a'_j| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

$$|b_i - b'_j| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

Damit folgt:

$$|a_i b_i - a'_j b'_j| < \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C + \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c = \varepsilon \quad \square$$

Beob.: Seien 0_* und 1_* die Folgen

$$0_* : n \mapsto 0 \qquad 1_* : n \mapsto 1$$

Sei b_* eine Cauchy-Folge mit $b_* \nparallel 0_*$. Dann gibt es eine Cauchy-Folge a_* mit $a_* b_* \parallel 1_*$.

Bew.: $b_* \nparallel 0_*$ heißt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall n \; \exists i, j \geq n : |b_i - 0_j| = |b_i| \geq \delta$$

Also: b_* hat eine unendl. Teilfolge c_* mit $|c_i| \geq \delta > 0$.

Beh.: $a_* := \dfrac{1}{c_*}$ ist Cauchy-Folge.

⌈ Zunächst:

$$\left| \frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_j} \right| = \frac{|c_j - c_i|}{|c_i \, c_j|} \leq \frac{|c_j - c_i|}{\delta^2}$$

Sei also $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, daß für $i, j \geq n$ gilt:

$$|c_j - c_i| < \delta^2 \varepsilon$$

Dann ist

$$|a_i - a_j| = \left| \frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_j} \right| \leq \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta^2} = \varepsilon \quad ⌋$$

Nun ist $c_* \parallel b_*$ und $a_* \parallel a_*$. Also:

$$a_* b_* \parallel a_* c_* = 1_* \qquad \boxtimes$$

<u>Kor</u>: Auf $\overline{\mathbb{K}}$ sind $+, -, \cdot, \div$ wohldefiniert:

$$+ \quad \overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \to \overline{\mathbb{K}}$$
$$([a_*], [b_*]) \mapsto [a_* + b_*]$$

$$- \quad \overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \to \overline{\mathbb{K}}$$
$$([a_*], [b_*]) \mapsto [a_* - b_*]$$

$$\cdot \quad \overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \to \overline{\mathbb{K}}$$
$$([a_*], [b_*]) \mapsto [a_* b_*]$$

Außerdem gibt es in $\overline{\mathbb{K}}_{\neq 0}$ multiplikative Inverse.

<u>Übung</u>: Zeige, daß $\overline{\mathbb{K}}$ mit den so erklärten Rechenoperationen ein Körper ist.

<u>Übung</u>: Zeige, daß die kanonische Einbettung

$$\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$$

ein Körpermorphismus ist.

<u>Lemma:</u> Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Für Cauchy-Folgen a_* und b_* sind folgende Bedingungen äquivalent

1) $\exists\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n \in \mathbb{N} \;\forall\, i, j \geq n : a_i + \varepsilon < b_j$

2) $\exists\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n \in \mathbb{N} \;\forall\, i \geq n : a_i + \varepsilon < b_i$

3) $\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\exists\, i \geq n : a_i + \varepsilon < b_i$

4) $\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\exists\, i, j \geq n : a_i + \varepsilon < b_j$

<u>Bew:</u> $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: klar.

<u>$4 \Rightarrow 1$</u>: Sei $\varepsilon > 0$ wie in (4).

Da a_* und b_* Cauchy-Folgen sind, gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, k, l \geq m : \; |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seien ferner $i, j \geq m$ gewählt mit

$$a_i + \varepsilon < b_j$$

Dann gilt für $k, l \geq m$:

$$a_k + \frac{\varepsilon}{3} < a_i + \frac{2\varepsilon}{3} < b_j - \frac{\varepsilon}{3} < b_l$$

Also folgt (1) mit $\frac{\varepsilon}{3}$. $\boxtimes$

Ziel: Mache $\overline{\mathbb{K}}$ zu einem angeordneten Körper.

Definition der Ordnungsrelation:

Wir definieren auf $\overline{\mathbb{K}}$ eine **Anordnung** vermöge:

$$[a_*] < [b_*] \quad :\Longleftrightarrow$$

$$(\star) \qquad \exists\, \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}\ \forall i, j \geq n: \quad a_i + \varepsilon < b_j$$

Zur Wohldefiniertheit:

$$a_* \parallel a'_* \qquad b_* \parallel b'_*$$

Es gelte $(\star)$ für a_* und b_* mit ε und n.

$$\forall i, j \geq n: \quad a_i + \varepsilon < b_j$$

Es gibt $m \in \mathbb{N}$:

$$|a_i - a'_j| < \varepsilon/3 \qquad \forall i, j \geq m$$

$$|b_i - b'_j| < \varepsilon/3$$

Dann ist für $i, j \geq \max(m, n)$:

$$a'_i + \frac{\varepsilon}{3} < b'_j$$

$\boxtimes$

Lemma: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Für Cauchy-Folgen a_* und b_* sind folgende Bedingungen äquivalent

1) $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, i, j \geq n : a_i + \varepsilon < b_j$

2) $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq n : a_i + \varepsilon < b_i$

3) $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, i \geq n : a_i + \varepsilon < b_i$

4) $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, i, j \geq n : a_i + \varepsilon < b_j$

Bew: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: klar.

$4 \Rightarrow 1$: Sei $\varepsilon > 0$ wie in (4).

Da a_* und b_* Cauchy-Folgen sind, gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, k, l \geq m : \quad |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seien ferner $i, j \geq m$ gewählt mit

$$a_i + \varepsilon < b_j$$

Dann gilt für $k, l \geq m$:

$$a_k + \frac{\varepsilon}{3} < a_i + \frac{2\varepsilon}{3} < b_j - \frac{\varepsilon}{3} < b_l$$

Also folgt (1) mit $\frac{\varepsilon}{3}$. $\boxtimes$

Bem: Wir definieren auf $\overline{\mathbb{K}}$ eine Anordnung vermöge:

$$[a_*] < [b_*] :\Longleftrightarrow$$

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}\ \forall i,j \geq n: \quad a_i + \varepsilon < b_j$$

Bew: Zur Wohldefiniertheit: $\forall i,j \geq n$:

$$a_* \parallel a'_* \qquad b_* \parallel b'_* \qquad a_i + \varepsilon < b_j$$

Es gibt $m \in \mathbb{N}$:

$$|a_i - a'_j| < \varepsilon/3 \qquad \forall i,j \geq m$$

$$|b_i - b'_j| < \varepsilon/3$$

Dann ist für $i,j \geq \max(m,n)$:

$$a'_i + \frac{\varepsilon}{3} < b'_j$$

Irreflexivität: Sei $[a_*] < [a_*]$. Dann folgt

$$\exists\, \varepsilon > 0,\, n \in \mathbb{N}\ \forall i \geq n: \quad \underbrace{a_i + \varepsilon < a_i}_{\text{ähm... nein.}}$$

Vergleichbarkeit: $[a_*] \not< [b_*]$ & $[b_*] \not< [a_*]$

Zu zeigen ist $a_* \parallel b_*$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\quad \forall n\ \exists\, i, j \geq n: \quad a_i + \frac{\varepsilon}{4} \geq b_j$

$$\forall n\ \exists\, i, j \geq n: \quad b_i + \frac{\varepsilon}{4} \geq a_j$$

Ferner gibt es ein $m \in \mathbb{N}: \forall i, j \geq m:$

$$|a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad |b_i - b_j| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Dann folgt

$$|a_i - b_j| < |a_i - a_k| + |a_k - b_\ell| + |b_\ell - b_j| < \varepsilon$$

Transitivität: $a_* < b_*$ & $b_* < c_*$

$$\exists\, \varepsilon > 0,\, n \in \mathbb{N}\ \forall i, j \geq n: \quad a_i + \varepsilon < b_j$$

$$\exists\, \delta > 0,\, m \in \mathbb{N}\ \forall k, \ell \geq m: \quad b_k + \delta < c_\ell$$

$\Rightarrow \qquad a_i + \varepsilon + \delta < c_\ell \qquad$ für i, ℓ groß genug

$\boxed{/}$

Übung: Zeige, daß die kanonische Einbettung

$$\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$$

die Anordnung erhält: $\alpha < \beta \Rightarrow \iota(\alpha) < \iota(\beta)$.

Übung: Zeige, daß $\overline{\mathbb{K}}$ ein angeordneter Körper ist (d.h. die Anordnung ist mit den Grundrechenarten verträglich).

Beob: Gilt $a_i \leq b_i \quad \forall i$, so folgt $[a_*] \leq [b_*]$.

Bew: Wäre $[a_*] > [b_*]$, so folgte $a_i > b_j + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und ein Paar $i, j \in \mathbb{N}$. $\boxed{\checkmark}$

<u>Bsp.:</u> $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

<u>Bew.:</u> 1) Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Cauchy-Folge reeller Zahlen.

2) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ (und in $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$) sind Cauchy-parallel genau dann, wenn sie denselben Grenzwert haben.

3) Jede Cauchy-Folge konvergiert.

<u>Also:</u> $\lim : \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$

ist (3) wohldef.
(1) surjektiv

<u>Und:</u> Wegen (2) ist $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/_{\parallel} \longrightarrow \mathbb{R}$ wohldef. und bijektiv.

$\boxtimes$

Beob: $\mathbb{K}$: angeordneter Körper

$\overline{\mathbb{K}}$ sei die Vervollständigung. Vermöge $\iota: \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ fassen wir $\mathbb{K}$ als Teilkörper von $\overline{\mathbb{K}}$ auf. Dann gibt es zu jedem $\overline{\varepsilon} > 0$ in $\overline{\mathbb{K}}$ ein $\delta > 0$ in $\mathbb{K}$ mit: $0 < \delta < \overline{\varepsilon}$.

Bew: Sei $\overline{\varepsilon}$ repräsentiert durch die Cauchy-Folge ε_* in $\mathbb{K}$. Wir buchstabieren aus, was $0 < [\varepsilon_*]$ bedeutet:

$$\exists\, \delta > 0,\ n \in \mathbb{N}\ \forall i \geq n: \quad \varepsilon_i > 2\delta$$

Dann aber ist $\forall i \geq n: \ \varepsilon_i - \delta > \delta$

Daraus folgt: $\overline{\varepsilon} = [\varepsilon_*] > \delta > 0$. $\boxtimes$

Interpretation: $\iota: \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ ist stetig bei 0.

Übung: Zeige $\iota: \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ ist (überall) stetig.

Kor: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $\overline{\mathbb{K}}$ seine Vervollständigung. Vermöge der kanonischen Einbettung $\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ fassen wir $\mathbb{K}$ als Teilmenge von $\overline{\mathbb{K}}$ auf. Dann gilt:

Jede Nullfolge in $\mathbb{K}$ ist eine Nullfolge in $\overline{\mathbb{K}}$.

Bew: $\iota : \mathbb{K} \to \overline{\mathbb{K}}$ stetig bei 0.

$\Rightarrow \iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ folgenstetig bei 0. $\boxtimes$

Analog: Sei a_* eine Folge in $\mathbb{K}$, die gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann konvergiert a_*, aufgefaßt als Folge in $\overline{\mathbb{K}}$, immer noch gegen a, aufgefaßt als Element von $\overline{\mathbb{K}}$.

Bem: Also, Folgen, die schon in $\mathbb{K}$ konvergieren, konvergieren in $\overline{\mathbb{K}}$ immer noch und bekommen keine neuen Grenzwerte.

<u>Prop</u>: Sei a_* eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Wir fassen $\mathbb{K}$ als Teilmenge von $\overline{\mathbb{K}}$ auf vermöge $\iota : \mathbb{K} \to \overline{\mathbb{K}}$. Dann ist a_* eine konvergente Folge in $\overline{\mathbb{K}}$ und $[a_*]$ ist ihr Grenzwert.

⌈<u>D.h.</u>: $\iota(a_*)$ konvergiert gegen $[a_*]$⌋

<u>Bew</u>: Sei $\overline{\varepsilon} > 0$ in $\overline{\mathbb{K}}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{K}$ mit $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$.

Da a_* eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall i, j \geq n : \ |a_i - a_j| < \varepsilon/2$$

Dann ist für $k \geq n$:

$$|a_k - [a_*]| = |[a_k - a_*]|$$

$$= [\,|a_k - a_*|\,] < [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots] = \varepsilon$$

$\boxtimes$

<u>Prop</u>: Sei a_* eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Wir fassen $\mathbb{K}$ als Teilmenge von $\overline{\mathbb{K}}$ auf vermöge $\iota : \mathbb{K} \to \overline{\mathbb{K}}$. Dann ist a_* eine konvergente Folge in $\overline{\mathbb{K}}$ und $[a_*]$ ist ihr Grenzwert.

⌜<u>D.h.</u>: $\iota(a_*)$ konvergiert gegen $[a_*]$ ⌟

<u>Bew</u>: Sei $\overline{\varepsilon} > 0$ in $\overline{\mathbb{K}}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{K}$ mit $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$.

Da a_* eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall i,j \geq n : \quad |a_i - a_j| < \varepsilon/2$$

Dann ist für $k \geq n$:

$$|a_k - [a_*]| = |[a_k - a_*]|$$

$$= [\,|a_k - a_*|\,] < [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots] = \varepsilon$$

$\square$

<u>Kor:</u> $\mathbb{K}$ ist <u>dicht</u> in $\overline{\mathbb{K}}$, d.h.:
jede nicht-leere offene Menge $\overline{U} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ hat nicht-leeren Schnitt mit $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$.

Ausbuchstabiert:

$$\forall\, \overline{\alpha} \in \overline{\mathbb{K}} \ \forall\, \overline{\varepsilon} > 0 \text{ in } \overline{\mathbb{K}}:$$

$$\mathbb{B}_{\overline{\varepsilon}}(\overline{\alpha}) \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$$

<u>Bew:</u> Sei $[a_*] = \overline{\alpha}$ für eine Cauchy-Folge a_* in $\mathbb{K}$.
Dann ist a_* eine Cauchy-Folge in $\overline{\mathbb{K}}$ mit Grenzwert $\overline{\alpha}$.
Insbesondere liegen fast alle $a_i \in \mathbb{K}$ in $\mathbb{B}_{\overline{\varepsilon}}(\overline{\alpha})$. $\boxtimes$

Prop: $\mathbb{K}$: angeordneter Körper

$\overline{\mathbb{K}} := \mathrm{Cauchy}(\mathbb{K}) / \parallel$: Vervollständigung.

In $\mathbb{K}$ gebe es eine streng monotone Nullfolge

$$\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots \longrightarrow 0$$

$\ulcorner \Rightarrow \delta_i > 0$ für jedes $i \lrcorner$

Dann ist $\overline{\mathbb{K}}$ vollständig bezüglich der Betragsnorm.

Bew: Sei $\overline{a}_*$ eine Cauchy-Folge in $\overline{\mathbb{K}}$.

Da $\mathbb{K}$ dicht in $\overline{\mathbb{K}}$ ist, wählen wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $b_k \in \mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ mit $|b_k - \overline{a}_k| < \delta_k$.

Beh: b_* und $\overline{a}_*$ sind Cauchy-parallel.

Insbesondere konvergiert $\overline{a}_*$ gegen $[b_*]$.

$\ulcorner$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

1 $\forall i, j \geq n: \quad |\overline{a}_i - \overline{a}_j| < \varepsilon/3$

2 $\forall k \geq n: \quad \delta_k < \varepsilon/3$

Dann gilt für $i,j \geq n$:

$$|b_i - b_j| \leq |b_i - \bar{a}_i| + |\bar{a}_i - \bar{a}_j| + |\bar{a}_j - b_j|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad \lrcorner \quad \boxtimes$$

Satz: Ist $\mathbb{K}$ archimedisch angeordnet und Cauchy-vollständig, so ist $\mathbb{K}$ ordnungsvollständig.

Bew: Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{K}$ nach oben beschränkt.

Zu zeigen: A hat ein Supremum.

Dazu wähle $a_0 \in A$ und eine obere Schranke $b_0 \in \mathbb{K} - A$.

Setze $c_0 := \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ $\qquad a_0 < c_0 < b_0$

ist c_0 auch obere Schranke, setze

$$a_1 := a_0 \qquad b_1 := c_0$$

ist c_0 nicht obere Schranke, setze

$$a_1 := c_0 \qquad b_1 := c_0$$

Setze $c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ und fahre so fort.

Beob: $|a_i - b_i| = 2^{-i} |a_0 - b_0|$

$\Rightarrow$ a_* und b_* sind Cauchy-parallel.

Der Limes ist das Supremum. $\square$

<u>Übung</u>: $\mathbb{K}$ archim. geordnet $\Rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ arch. geord.

<u>Also</u>: $\overline{\mathbb{Q}}$ ist ordnungsvollständiger, archimedisch angeordneter Körper.

<u>Sprich</u>: Es gibt die reellen Zahlen tatsächlich!

<u>Kor:</u> Sei X ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum, d.h., wir haben eine Metrik

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

Dann ist $\iota \circ d : X \times X \xrightarrow{\mathbb{K} \searrow} \overline{\mathbb{K}}$ eine $\overline{\mathbb{K}}$-wertige Metrik auf X.

Zwei Punktfolgen x_* und y_* sind $\mathbb{K}$-Cauchy-parallel genau dann, wenn sie $\overline{\mathbb{K}}$-Cauchy-parallel sind.

<u>Übung:</u> $\overline{\mathbb{Q}}$ ist archimedisch angeordnet.

$\ulcorner$ $\forall\, \bar{\varepsilon} \in \overline{\mathbb{Q}}_{>0} \;\; \exists\, \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} : 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \frac{q}{p} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{p} \overset{(!)}{<} \bar{\varepsilon}$$

$\lrcorner$

Satz: Sei $(X, d : X \times X \to \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum. Dann ist $\overline{X}$ ein $\overline{\mathbb{K}}$-metrischer Raum vermöge:

$$\begin{aligned} \overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} &\longrightarrow \overline{\mathbb{K}} \\ ([x_*], [x'_*]) &\mapsto [d(x_*, x'_*)] \end{aligned}$$

Ferner sind die kanonischen Einbettungen $\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ und $\iota : X \hookrightarrow \overline{X}$ verträglich:

$$\begin{tikzcd} d : X \times X \arrow[r] \arrow[d, "\iota \times \iota"] & \mathbb{K} \arrow[d, hook, "\iota"] \\ \overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \arrow[r] & \overline{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

D.h.: $\overline{d}(\iota(x_1), \iota(x_2)) = \iota\, d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

$\iota(X)$ ist <u>dicht</u> in $\overline{X}$, d.h.

$$\forall \overline{x} \in \overline{X} \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X : \overline{d}(\overline{x}, \iota(x)) < \varepsilon$$

Bew

Zunächst zur Wohldefiniertheit.

$x_* \parallel y_*$ und $x'_* \parallel y'_*$

Beh: $d(x_*, x'_*) \parallel d(y_*, y'_*)$

⌜ Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n, so daß $\forall i, j \geq n$:

$$d(x_i, y_j) < \varepsilon/2 \quad d(y_j', x_i') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow d(x_i, x_i') \leq \underbrace{d(x_i, y_j)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + d(y_j, y_j') + \underbrace{d(y_j', x_i')}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< d(y_j, y_j') + \varepsilon$$

symmetrisch: $d(y_j, y_j') < d(x_i, x_i') + \varepsilon$

Also: $|d(x_i, x_i') - d(y_j, y_j')| < \varepsilon$ ⌟

Verträglichkeit der Einbettungen:

$$\bar{d}(z(x), z(y))$$

$$= \bar{d}([* \mapsto x], [* \to y])$$

$$= [* \mapsto d(x, y)]$$

$$= z(d(x, y))$$

$\bar{d}$ ist eine Metrik:

1) $d(x_i, x_i') \geq 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \quad [d(x_*, x_*')] \geq 0$$

2) Dreiecksungleichung.

Seien x_*, y_*, z_* Cauchy-Folgen in X.

z.z:

$$[d(x_*, z_*)] \leq [d(x_*, y_*) + d(y_*, z_*)]$$

⌜ Das folgt, weil

$$d(x_i, z_i) \leq d(x_i, y_i) + d(y_i, z_i) \quad \forall i$$

ist. ⌟

3) Definitheit:

z.z. : $[d(x_*, x_*')] = 0 \Rightarrow x_* \parallel x_*'$

⌜ $d(x_*, x_*') \parallel 0_*$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i, j \geq n:$$

$$d(x_i, x_i') < \varepsilon/2$$

x'_*: Cauchyfolge :

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall k,l \geq m: \ d(x'_k, x'_l) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also für $i,j \geq \max(m,n)$:

$$d(x_i, x'_j) \leq d(x_i, x'_i) + d(x'_i, x'_j) < \varepsilon \quad \lrcorner$$

4) Symmetrie

z.z. $[d(x_*, x'_*)] = [d(x'_*, x_*)]$

aber $d(x_k, x'_k) = d(x'_k, x_k) \quad \forall k$

$\Rightarrow d(x_*, x'_*) = d(x'_*, x_*)$

$\Rightarrow [d(x_*, x'_*)] = [d(x'_*, x_*)]$

5) Selbstabstand

z.z. $[d(x_*, x_*)] = [0, 0, \dots]$

aber $d(x_k, x_k) = 0 \quad \forall k$

$\Leftrightarrow [d(x_*, x_*)] = [0, 0, 0, \dots]$

Satz: Sei $(X, d : X \times X \to \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-metrischer Raum. Dann ist $\overline{X}$ ein $\overline{\mathbb{K}}$-metrischer Raum vermöge:

$$\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$$
$$([x_*], [x'_*]) \mapsto [d(x_*, x'_*)]$$

Ferner sind die kanonischen Einbettungen $\iota : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ und $\iota : X \hookrightarrow \overline{X}$ verträglich:

$$\begin{tikzcd}
d : X \times X \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota \times \iota"] & \mathbb{K} \arrow[d, hook, "\iota"] \\
\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \arrow[r] & \overline{\mathbb{K}}
\end{tikzcd}$$

__D.h.:__ $\overline{d}(\iota(x_1), \iota(x_2)) = \iota\, d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

$\iota(X)$ ist __dicht__ in $\overline{X}$, d.h.

$$\forall \bar{x} \in \overline{X} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : \overline{d}(\bar{x}, \iota(x)) < \varepsilon$$

Schließlich: $\iota(X)$ ist dicht in $\overline{X}$

Sei $[x_*]$ ein Punkt in $\overline{X}$.

Dann ist $\iota(x_*)$ eine Folge in $\iota(X) \subseteq \overline{X}$, die gegen $[x_*]$ konvergiert. Also

$$\forall \overline{\varepsilon} > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \forall i \geq n : \overline{d}([x_*], \iota(x_i)) < \overline{\varepsilon}$$

$\square$

Frage: Wann ist $\overline{X}$ vollständig?

<u>Satz:</u> $\mathbb{K}$: angeordneter Körper
mit Nullfolge
$$\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$$
(X, d) : $\mathbb{K}$-metrisch.
$(\bar{X}, \bar{d} : \bar{X} \times \bar{X} \to \overline{\mathbb{K}})$: Vervollständigung
Dann ist $\bar{X}$ vollständig.

<u>Bew:</u> Das Bild $\iota(X)$ ist dicht in $\bar{X}$.
Sei $\bar{x}_*$ eine Cauchy-Folge in $\bar{X}$.
Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ wähle $x_m \in X$ mit
$$\bar{d}(\bar{x}_m, \iota(x_m)) < \iota(\delta_i / 2)$$

<u>Beh:</u> $\iota(x_*) \parallel \bar{x}_*$

$\ulcorner$ Sei $\varepsilon > 0$ (O.B.d.A $\varepsilon \in \iota(\mathbb{K})$)
Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit
$$\forall\, i, j \geq n : \bar{d}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) < \varepsilon/2$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(\delta_m) < \varepsilon/2$

Dann gilt für $i,j \geq \max(m,n)$:

$$\bar{d}(\bar{x}_i, \iota(x_j)) \leq \bar{d}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + d(\bar{x}_j, \iota(x_j))$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \lrcorner$$

<u>Kor</u>: $\iota(x_*)$ und damit x_* sind Cauchy-Folgen.

<u>Aber</u>: $\iota(x_*)$ konvergiert in $\bar{X}$ gegen $[x_*]$ und damit konvergiert auch $\bar{x}_*$ gegen $[x_*]$. $\boxtimes$

Das Wichtigste über $\mathbb{R}$-Vektorräume

Def Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine Menge V, zusammen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und zwei Operationen

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

so daß gilt

1) $(V, 0, +)$ ist abelsche Gruppe

2) $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

$0 \cdot \underline{v} = 0$

$\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$

$(\alpha + \beta) \underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u}$

$\alpha(\beta \underline{u}) = (\alpha \beta) \underline{u}$

Def: Eine Abbildung $\varphi : E \to F$ zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist <u>linear</u>, wenn gilt:

$$\varphi(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha \varphi(\underline{u}) + \beta \varphi(\underline{v})$$

Eine Abbildung

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$$

heißt <u>multilinear</u>, wenn gilt:

$$\forall\, \underline{u}_1 \in E_1,\ \underline{u}_2 \in E_2, \ldots, \underline{u}_n \in E_n \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\begin{aligned} E_i &\longrightarrow F \quad \text{ist linear} \\ \underline{w} &\longmapsto \varphi(\underline{u}_1, \ldots, \underline{w}, \ldots, \underline{u}_n) \end{aligned}$$

⌜multilinear = linear in jedem einzelnen Argument.⌟

Ist $F = \mathbb{R}$, so heißt φ Multilinear<u>form</u>.

<u>Bsp</u>:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha\beta \end{aligned}$$

<u>bi</u>linear

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &\longmapsto aa' + bb' \end{aligned}$$

bilinear

<u>Def</u>: Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt <u>Basis</u>, wenn jeder Vektor $\underline{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \alpha_{\underline{b}} \underline{b}$$

hat, in der fast alle Koeffizienten verschwinden.

Existenz der Darst : B spannt V auf

Eindeutigkeit : B ist linear unabhängig.

<u>Fakt</u>: Jeder Vektorraum hat eine Basis. [Äquivalent (!) zum Auswahlaxiom]

Alternative Ansicht

X: Menge

$$\mathbb{R}^X = \{ \alpha_* : X \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \alpha_x = 0 \text{ für fast} \\ \text{alle } x \in X \text{ (alle bis} \\ \text{auf höchstens endl. viele)} \end{array} \}$$

$\mathbb{R}^X$ ist Vektorraum:

$$0 : x \mapsto 0$$

$$\alpha_* + \beta_* : x \mapsto \alpha_x + \beta_x$$

$$\lambda(\alpha_*) : x \mapsto \lambda \alpha_x$$

Sei nun $B \subseteq V$. Dann betrachten wir die Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev} : \mathbb{R}^B \to V$$

$$\alpha_* \mapsto \sum_{\alpha_{\underline{b}} \neq 0} \alpha_{\underline{b}} \, \underline{b} \qquad \text{endl. Summe}$$

B ist Basis genau dann, wenn $\mathrm{ev}: \mathbb{R}^B \to V$ bijektiv ist.

<u>Bsp:</u> $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$

Die Menge $\mathcal{E} := \left\{ \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heißt

<u>Standardbasis</u>.

Lineare Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind <u>genau</u> diejenigen, die sich als Multiplikation mit einer festen Matrix beschreiben lassen.

Matrizen beschreiben auch Bilinearformen vermöge

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \cdots x_m)\, M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jede Bilinearform $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ läßt sich so beschreiben.

Banach-Räume

Def: Ein Banach-Raum ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der als metrischer Raum (Metrik kommt mit der Norm!) vollständig ist.

Bsp: $\mathbb{R}^n$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\left\| \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \right\| := \max\{ |x^i| \mid i = 1, \dots, n \}$$

Bew: Sei $\underline{v}_* = \begin{pmatrix} x^1_* \\ \vdots \\ x^n_* \end{pmatrix}$ eine Cauchy-Folge.

Dann ist jede Koordinatenfolge x^i_* eine Cauchy-Folge, und zwar mit Limes

$$\underline{w} := \begin{pmatrix} w^1 := \lim x^1_* \\ \vdots \\ w^n := \lim x^n_* \end{pmatrix}$$

$\boxed{\not\,}$

Einschub:

Def: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ heißen <u>äquivalent</u>, wenn es eine reelle Konstante $C>0$ gibt, so daß für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\|\underline{v}\| \leq C\,|\underline{v}| \;\&\; |\underline{v}| \leq C\,\|\underline{v}\|$$

d.h.: $\frac{1}{C}\|\underline{v}\| \leq |\underline{v}| \leq C\|\underline{v}\|$

äquiv: $\frac{1}{C}|\underline{v}| \leq \|\underline{v}\| \leq C|\underline{v}|$

Beob: Seien $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ zwei äquivalente Normen auf V. Dann sind zwei Folgen $\underline{u}_*$ und $\underline{v}_*$ genau dann Cauchy-parallel bez. $\|\cdot\|$, wenn sie Cauchy-parallel bez. $|\cdot|$ sind.

Bew: Sei $C>0$ mit

$$|\underline{w}| \leq C\|\underline{w}\| \qquad \forall \underline{w} \in V$$

Ist nun $\underline{u}_*$ || $\underline{v}_*$ bez. $\|\cdot\|$, so gilt

$$\forall \varepsilon>0 \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i,j \geq n: \; \|\underline{u}_i - \underline{v}_j\| < \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$|\underline{u}_i - \underline{v}_j| < \varepsilon$$

Also ist $\underline{u}_* \| \underline{v}_*$ bez. $|\cdot|$.

Die Umkehrung folgt mit symmetrische Argumentation.

Kor: Sind $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen auf V, so gilt:

1) Eine Folge $\underline{u}_*$ ist Cauchy-Folge bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn sie Cauchy-Folge bez. $|\cdot|$ ist.

2) Eine Folge $\underline{u}_*$ konvergiert

gegen $\underline{w}$ bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn $\underline{u}_*$ gegen $\underline{w}$ konvergiert bez. $|\cdot|$.

$\Rightarrow$ 3) V ist vollständig bez. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn V vollständig ist bez. $|\cdot|$.

Bew: $\underline{u}_*$ ist eine $\|\cdot\|$ Cauchy-Folge

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_* \parallel \underline{u}_*$ bez. $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_* \parallel \underline{u}_*$ bez. $|\cdot|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_*$ ist $|\cdot|$-Cauchy-Folge.

$\underline{u}_*$ konvergiert gegen $\underline{w}$ in $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_* \parallel [\underline{w}, \underline{w}, \cdots]$ bez. $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_* \parallel [\underline{w}, \underline{w}, \cdots]$ bez. $|\cdot|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{u}_*$ konvergiert gegen $\underline{w}$ in $|\cdot|$

V : vollst bez. $\|\cdot\|$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \underline{y}_* : \|\cdot\|\text{-Cauchy } \exists \underline{w} : \underline{y}_* \xrightarrow[\|\cdot\|]{} \underline{w}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \underline{y}_* : |\cdot|\text{-Cauchy } \exists \underline{w} : \underline{y}_* \xrightarrow[|\cdot|]{} w$$

$$\Leftrightarrow \quad V : \text{vollst. bez. } |\cdot| \qquad \boxtimes$$

<u>Fakt</u> Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm vollständig.

<u>Def</u>: Seien E und F Banach-Räume und $U \subseteq E$ offen. Eine Abbildung

$$f : U \to F$$

! heißt <u>linear approximierbar</u> an der Stelle $\underline{u} \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ gibt, die eine Approximation von höherer als erster Ordnung für die Abbildung

$$\underline{h} \mapsto f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})$$

ist. <u>D. h.:</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underline{h} \in E, \ \|\underline{h}\|_E < \delta :$$

$$\| f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u}) - \varphi(\underline{h}) \|_F \le \varepsilon \|\underline{h}\|_E^{1}$$

!

Die lineare Abbildung $f: E \to F$ heißt **Ableitung** von f **an der Stelle $\underline{u}$**. Wir notieren sie mit $\underline{D_{\underline{u}} f}: E \to F$.

Die **Ableitung** von f ist die Abbildung

$$\begin{aligned} Df: U &\longrightarrow \mathrm{Hom}(E; F) \\ \underline{u} &\longmapsto D_{\underline{u}} f \end{aligned}$$

Diese Begriffsbildungen wollen wir uns für stetige lin. approximierbare Funktionen aufheben.

<u>Bsp</u>: $E = \mathbb{R}^2$ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_E := \max(|x|, |y|)$$

$F = \mathbb{R}$ mit $\|(z)\| = |z|$

$U := E$

$$f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2$$

<u>Beh</u> f ist linear approximierbar an jeder Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit Ableitung

$$D_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2ux + 2vy$$

<u>Bew</u>: Wir schätzen für $\underline{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ab:

$$\left\| f\begin{pmatrix} u+a \\ v+b \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_F$$
$$= |(u+a)^2 + (v+b)^2 - u^2 - v^2 - 2ua - 2vb|$$
$$= |a^2 + b^2| \leq 2 \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2$$

Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $\left\|\binom{a}{b}\right\| < \delta$:

$$\left\| f\binom{u+a}{v+b} - f\binom{u}{v} - \varphi\binom{a}{b} \right\|_F \le 2 \left\|\binom{a}{b}\right\|_E^2$$

$$= 2 \underbrace{\left\|\binom{a}{b}\right\|_E}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} \left\|\binom{a}{b}\right\|_E$$

$$\le \varepsilon \left\|\binom{a}{b}\right\|_E$$

<u>Bem:</u> Die lineare Bestapproximation ist hier die Abbildung

$$\binom{x}{y} \mapsto f\binom{u}{v} + \varphi\binom{x-u}{y-v} \qquad (*)$$

$$\ulcorner \binom{x}{y} = \binom{u}{v} + \binom{a}{b} \lrcorner$$

$(*)$ beschreibt die Tangentialebene an das Paraboloid $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ im Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$.

<u>Bsp:</u> $E = \mathbb{R}^2$ mit

$$\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|_E := \max(|x|, |y|)$$

$F = \mathbb{R}$ mit $\|(z)\| = |z|$

$U := E$

$$f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2$$

<u>Beh</u> f ist differenzierbar an jeder Stelle $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ mit Ableitung

$$D_{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}} f : E \longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto 2ux + 2vy$$

<u>Bew:</u> Wir schätzen für $\underline{h} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ab:

$$\left\| f\begin{pmatrix}u+a\\v+b\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \right\|_F$$
$$= \left| (u+a)^2 + (v+b)^2 - u^2 - v^2 - 2ua - 2vb \right|$$
$$= \left| a^2 + b^2 \right| \leq 2 \left\| \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \right\|^2$$

Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| < \delta$:

$$\left\| f\begin{pmatrix} u+a \\ v+b \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_F \leq 2 \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|_E^2$$

$$= 2 \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|_E}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|_E$$

$$\leq \varepsilon \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|_E$$

<u>Bem:</u> Die lineare Bestapproximation ist hier die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\ulcorner \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \lrcorner$$

$(*)$ beschreibt die Tangentialebene an das Paraboloid $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

im Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$.

<u>Def:</u> V: normierter Raum.

Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn

$$\{ \|\underline{m}\| \mid m \in M \} \subseteq \mathbb{R}$$

(von oben) beschränkt ist.

Eine Folge $\underline{v}_*$ in V heißt <u>beschränkt</u>, wenn die Folge reeller Zahlen $\|\underline{v}_*\|$ (von oben) beschränkt ist.

<u>Beob:</u> In $\mathbb{R}^n$ hat jede bez. der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge (und somit einen Häufungspunkt).

<u>Bew:</u> Sei $\underline{v}_*$ eine $\|\cdot\|_\infty$-beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Seien $v_{1*}, \ldots, v_{n*}$ die Koordinatenfolgen. Aus

$$\|\underline{v}_k\| = \max_{i=1}^{n} |v_{ik}|$$

folgt, daß alle Folgen v_{i*} beschränkt sind. Dann hat v_{1*} eine konvergente Teilfolge v_{1a_*}. Sei

$$\underline{w}_* := v_{a_*}$$

die dadurch ausgewählte Teilfolge von $\underline{v}_*$. Analog hat $\underline{w}_*$ eine Teilfolge, für die die ersten beiden Koordinatenfolgen konvergieren.
So fahren wir fort und erhalten eine Teilfolge, für die <u>alle</u> Koordinatenfolgen konvergieren.
Aber diese Teilfolge konvergiert dann in der Norm $\|\cdot\|_\infty$. $\boxtimes$

Def: V: $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ Normen auf V.

$\|\cdot\|$ dominiert $|\cdot|$, wenn:

$$\exists C \in \mathbb{R} \ \forall \underline{v} \in V: \ |\underline{v}| \leq C \|\underline{v}\|$$

Prop: V: $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\|\cdot\|$, $|\cdot|$ Normen. $\|\cdot\|$ dominiert $|\cdot|$.

Dann ist $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion in der $\|\cdot\|$-Metrik.

Bew: Sei $C > 0$ mit

$$|\underline{v}| \leq C \|\underline{v}\| \qquad \forall \underline{v} \in V$$

zu zeigen:

$$\exists L : \ \big|\, |\underline{v}| - |\underline{u}| \,\big| \leq L \, \|\underline{v} - \underline{u}\|$$

Nun ist

$$|\underline{v}| \leq |\underline{v} - \underline{u}| + |\underline{u}|$$

$$\Rightarrow \quad |\underline{v}| - |\underline{u}| \leq |\underline{v} - \underline{u}|$$

Analog: $|\underline{u}| - |\underline{v}| \leq |\underline{u} - \underline{v}| = |\underline{v} - \underline{u}|$

Also:

$$\big|\, |\underline{v}| - |\underline{u}| \,\big| \leq |\underline{v} - \underline{u}| \leq C \| \underline{v} - \underline{u} \|$$

Sprich: $L := C$ tut's. $\boxtimes$

<u>Beob:</u> Auf $\mathbb{R}^n$ dominiert $\|\cdot\|_\infty$ jede Halbnorm $\|\cdot\|$.

<u>Bew:</u> Setze

$$C := n \cdot \max\{ \|\underline{e}_i\| \mid i = 1, \dots, n \}$$

$\ulcorner \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $i$ter Standardbasisvektor $\lrcorner$

Dann ist für $\underline{v} = \sum \alpha_i \underline{e}_i$:

$$\begin{aligned} \|\underline{v}\| &= \|\textstyle\sum \alpha_i \underline{e}_i\| \\ &\leq \textstyle\sum \|\alpha_i \underline{e}_i\| = \sum |\alpha_i| \|\underline{e}_i\| \\ &\leq \textstyle\sum |\alpha_i| \frac{C}{n} = C \frac{\sum|\alpha_i|}{n} \\ &\leq C \max|\alpha_i| = C \|\underline{v}\|_\infty \end{aligned}$$ $\boxtimes$

<u>Kor:</u> Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist stetig in der Topologie, die von $\|\cdot\|_\infty$ kommt. $\boxtimes$

Prop: Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ dominiert $\|\cdot\|_\infty$

Bew: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Die $\|\cdot\|_\infty$ - Einheitssphäre

$$S := \{ \underline{v} \mid \|\underline{v}\|_\infty = 1 \}$$

ist beschränkt.

Setze

$$\lambda := \inf \{ \|\underline{v}\| \mid \underline{v} \in S \} \geq 0$$

Beh: $\lambda > 0$

Andernfalls betrachte eine Folge $\underline{v}_*$ in S mit

$$\|\underline{v}_*\| \longrightarrow 0$$

Da S $\|\cdot\|_\infty$-beschränkt ist, können wir zu einer $\|\cdot\|_\infty$ konvergenten Teilfolge übergehen — also o.B.d.A.: $\underline{v}_* \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} \underline{v}$

Nun ist $\|\cdot\|$ stetig bez. $\|\cdot\|_\infty$. Somit ist $\|\underline{v}\| = 0$ also $\underline{v} = 0$.

Auf der anderen Seite ist $\|\cdot\|_\infty$ stetig und es folgt $\|\underline{v}\|_\infty = 1$ ↯ $\lrcorner$

Nun setze

$$C := 1/\lambda$$

Dann ist für $\underline{v} \neq 0$:

$$\|\underline{v}\|_\infty \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|_\infty} = \|\underline{v}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\underline{v}\|_\infty \lambda \leq \|\underline{v}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\underline{v}\|_\infty \leq C\|\underline{v}\| \qquad (*)$$

Für $\underline{v} = 0$ gilt $(*)$ offenbar auch. $\boxtimes$

<u>Alternative Def</u>: Zwei Normen heißen äquivalent, wenn sie einander wechselseitig dominieren.

<u>Kor</u>: Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

<u>Bem</u>: Das gilt <u>nicht</u> für Halbnormen.

Prop. Jede lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

ist stetig.

Bew: Die Abbildung

$$\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{v} \longmapsto \| \varphi(\underline{v}) \|$$

ist eine Halbnorm:

$$\ell(\underline{u} + \underline{v}) = \| \varphi(\underline{u} + \underline{v}) \| = \| \varphi(\underline{u}) + \varphi(\underline{v}) \|$$
$$\leq \| \varphi(\underline{u}) \| + \| \varphi(\underline{v}) \| = \ell(\underline{u}) + \ell(\underline{v})$$

$$\ell(0) = 0$$

$$\ell(\underline{u}) \geq 0$$

$$\ell(\alpha \underline{u}) = \| \varphi(\alpha \underline{u}) \| = \| \alpha \varphi(\underline{u}) \| = |\alpha| \, \| \varphi(\underline{u}) \|$$
$$= |\alpha| \, \ell(\underline{u})$$

Also dominiert $\| \cdot \|_\infty$ die Halbnorm ℓ:

$$\exists C > 0 \;\; \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n : \; \| \varphi(\underline{u}) \| \leq C \, \| \underline{u} \|_\infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \varphi(\mathbb{B}_{\varepsilon/C}(0_{\mathbb{R}^n})) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0_{\mathbb{R}^m})$$

$\blacksquare$

<u>Bem:</u> Für Banach-Räume unendlicher Dimension gibt es (viele) unstetige lineare Abbildungen.

Sei E ein Banach-Raum. Die Abbildung

$$\begin{aligned} 0 : E &\to \mathbb{R} \\ \underline{e} &\mapsto 0 \end{aligned}$$

ist stetig. Aber die ~~bloße~~ Existenz weiterer stetiger Abbildungen erfordert das Auswahlaxiom!

<u>Def</u>: Seien E und F Banach-Räume und $\mathcal{U} \subseteq E$ offen. Eine Abbildung

$$f : \mathcal{U} \to F$$

! heißt <u>linear approximierbar</u> an der Stelle $\underline{u} \in \mathcal{U}$, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ gibt, die eine Approximation von höherer als erster Ordnung für die Abbildung

$$\underline{h} \mapsto f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})$$

ist. <u>D.h.:</u>

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists \delta>0 \; \forall \underline{h} \in E, \; \|\underline{h}\|_E < \delta :$$

$$\| f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u}) - \varphi(\underline{h}) \|_F \leq \varepsilon \|\underline{h}\|_E^{1}$$

! Die lineare Abbildung $f: E \to F$ heißt Ableitung von f an der Stelle $\underline{u}$. Wir notieren sie mit $D_{\underline{u}} f : E \to F$.

Die Ableitung von f ist die Abbildung

$$Df : U \longrightarrow \mathrm{Hom}(E;F)$$
$$\underline{u} \longmapsto D_{\underline{u}} f$$

Diese Begriffsbildungen wollen wir uns für stetige lin. approximierbare Funktionen aufheben.

Def: E, F: Banach-Räume

$U \subseteq E$ offen

Die Abbildung $f: U \to F$ nennen wir <u>differenzierbar an der Stelle</u> $\underline{u} \in U$, wenn gilt:

1) An der Stelle $\underline{u} \in U$ ist f linear approximierbar.

2) Die linear approximierende Funktion
$$D_{\underline{u}} f : E \to F$$
ist stetig.

Bem: In einer Übungsaufgabe soll gezeigt werden: Ist $f: U \to F$ an der Stelle $\underline{u} \in U$ linear approximierbar, so sind äquivalent

1) f ist an der Stelle $\underline{u}$ stetig.

2) $D_{\underline{u}} f$ ist stetig / beschränkt

In der Literatur wird oft gefordert, daß f stetig auf ganz U ist. Ich bin neugierig, wo das wichtig wird. Darum probieren wir es erstmal so. Wenn wir auf ein Hindernis stoßen, müssen wir die Definition von Differenzierbarkeit vielleicht nochmal verschärfen.

Notation: $(\Delta_{\underline{x}} f)(\underline{h}) := f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x})$

also bedeutet lineare Approximierbarkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \|\underline{h}\| < \delta :$$

$$\|(\Delta_{\underline{x}} f)(\underline{h}) - (D_{\underline{x}} f)(\underline{h})\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|$$

D.h.: $\Delta_{\underline{x}} f$ wird für kleine $\underline{h}$ $(\|\underline{h}\| < \delta)$ also an der Stelle $\underline{h} = 0$ linear approximiert durch $D_{\underline{x}} f : E \to F$

Die Kettenregel

E, F, G : Banach-Räume

$U \subseteq E$, $V \subseteq F$ offen

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G$$

Die Abbildung f sei differenzierbar an der Stelle $\underline{x}$ mit Ableitung $D_{\underline{x}} f$, und die Abbildung g sei differenzierbar an der Stelle $f(\underline{x})$ mit Ableitung $D_{f(\underline{x})} g$. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle $\underline{x}$ mit Ableitung

$$D_{\underline{x}}(g \circ f) = \left(D_{f(\underline{x})} g\right) \circ \left(D_{\underline{x}} f\right) : E \to G$$

<u>Bew</u>: Zunächst sind $D_{\underline{x}} f : E \to F$ und $D_{f(\underline{x})} g : F \to G$ stetig, also beschränkt. Es gibt also ein $C > 0$

mit

$$\|(D_{\underline{y}}f)(\underline{h})\|_F \leq C\|\underline{h}\|_E$$

$$\|(D_{f(\underline{y})}g)(\underline{k})\|_G \leq C\|\underline{k}\|_F$$

Die zentrale Rechnung lautet wiefolgt.
Für $\underline{h} \in E$ setzen wir zunächst:

$$\underline{k}_1 := f(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) = (\Delta_{\underline{y}} f)(\underline{h}) \qquad \underline{k}_2 := (D_{\underline{y}}f)(\underline{h})$$

Dann ist $\|\underline{k}_2 - \underline{k}_1\|_F$ klein für $\|\underline{h}\|_E$ klein.

Wir rechnen:

$$\| g(f(\underline{y}+\underline{h})) - g(f(\underline{y})) - D_{f(\underline{y})}g(D_{\underline{y}}f(\underline{h}))\|_G =$$

$$= \| g(f(\underline{y})+\underline{k}_1) - g(f(\underline{y})) - (D_{f(\underline{y})}g)(\underline{k}_2)\|_G$$

$$\leq \| g(f(\underline{y})+\underline{k}_1) - g(f(\underline{y})) - (D_{f(\underline{y})}g)(\underline{k}_1)\|_G +$$

$$+ \| D_{f(\underline{y})}g(\underline{k}_2 - \underline{k}_1)\|_G$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3C}\|\underline{k}_1\|_F + C\|\underline{k}_2 - \underline{k}_1\|_F$$

für $\|\underline{k}_1\|$ klein genug. Genauer:

Wähle $\delta_F > 0$, so daß für $\|\underline{k}\| < \delta_F$

gilt:

$$\| g(f(\underline{u}) + \underline{k}) - g(f(\underline{u})) - (D_{f(\underline{u})} g)(\underline{k}) \| \leq \frac{\varepsilon}{3C} \|\underline{k}\|$$

Nun wähle $\delta_E > 0$, so daß gilt.

1) $\| \underbrace{f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})}_{\underline{k}_1} - \underbrace{(D_{\underline{u}} f)(\underline{h})}_{\underline{k}_2} \| \leq \frac{\varepsilon}{3C} \|\underline{h}\|$

für $\|\underline{h}\| < \delta_E$

2) $\left(\frac{\varepsilon}{3C} + C \right) \delta_E \leq \delta_F$

Dann ist

$$\| k_1 \| \leq \| \underline{k}_1 - \underline{k}_2 \| + \| \underline{k}_2 \| \leq \frac{\varepsilon}{3C} \|\underline{h}\| + C \|\underline{h}\|$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{3C} + C \right) \delta_E \leq \delta_F$$

und somit

$$\| g(f(\underline{u}+\underline{h})) - g(f(\underline{u})) - D_{f(\underline{u})} g (D_{\underline{u}} f(\underline{h})) \|_G \leq$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3C}\left(\frac{\varepsilon}{3C}+C\right)\|\underline{h}\| + C\,\frac{\varepsilon}{3C}\|\underline{h}\|$$

$$= \left(\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon^2}{9C^2}\right)\|\underline{h}\| \le \varepsilon\,\|\underline{h}\|$$

für ε klein genug. $\square$

Prop: $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ offen

$$\left.\begin{array}{l} f : U \to V \text{ stetig} \\ g : V \to U \text{ stetig} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{invers zueinander} \\ f \circ g = id_V \\ g \circ f = id_U \end{array}$$

Sei f differenzierbar in $\underline{u} \in U$ mit stetig (!) invertierbarer Ableitung $D_{\underline{u}} f : E \to F$. Dann ist g in $f(\underline{u})$ differenzierbar mit Ableitung $D_{f(\underline{u})} g = (D_{\underline{u}} f)^{-1}$.

Bew: Stetige Invertierbarkeit besagt, daß die Abbildung $D_{\underline{u}} f : E \to F$ invertierbar ist und daß die Inverse $(D_{\underline{u}} f)^{-1} : F \to E$ stetig ist.

Es gibt also $C > 0$ mit

$$\|(D_{\underline{u}} f)(\underline{h})\|_F \leq C \|\underline{h}\|_E \quad \forall \underline{h} \in E$$

$$\|(D_{\underline{u}} f)^{-1}(\underline{k})\|_E \leq C \|\underline{k}\|_F \quad \forall \underline{k} \in F$$

Setze $\underline{v} := f(\underline{u})$. Dann ist $\underline{u} = g(\underline{v})$.

Sei nun $\varepsilon > 0$.

Da g stetig an der Stelle $\underline{v}$ ist, gibt es zu jedem $\lambda > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$g(\mathbb{B}_\delta(\underline{v})) \subseteq \mathbb{B}_\lambda(\underline{u})$$

fix later

Für $\underline{k} \in F$ setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}' := \underline{v} + \underline{k} \\ \underline{u}' := g(\underline{v}') \\ \underline{h} := \underline{u}' - \underline{u} \end{array}\right\}$$

O.B.d.A. δ so klein, daß $\mathbb{B}_\delta(\underline{v}) \subseteq V$

Dann ist

$$f(\underline{u} + \underline{h}) = f(\underline{u}') = \underline{v}' = \underline{v} + \underline{k}$$

$$f(\underline{u}) = \underline{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{k} = f(\underline{u} + \underline{h}) - f(\underline{u})$$

Also: $f(\underline{u} + \underline{h}) - f(\underline{u}) - (D_{\underline{u}} f)(\underline{h}) = \underline{k} - (D_{\underline{u}} f)(\underline{h})$

Und: $g(\underline{v} + \underline{k}) - g(\underline{v}) - (D_{\underline{u}} f)^{-1}(\underline{k}) = \underline{h} - (D_{\underline{u}} f)^{-1}(\underline{k})$

$$= - (D_{\underline{u}} f)^{-1}\left(\underline{k} - (D_{\underline{u}} f)(\underline{h})\right)$$

Für $\|\underline{k}\| < \lambda$ ist also

$$\| g(\underline{v}+\underline{k}) - g(\underline{v}) - (D_{\underline{u}}f)^{-1}(\underline{k}) \| \leq C \, \| \underline{k} - D_{\underline{u}}f(\underline{h}) \|$$

$$\leq C \cdot \lambda \, \| \underline{h} \|$$

$$\| \underline{h} - (D_{\underline{u}}f)^{-1}(\underline{k}) \| \leq C \| \underline{k} - (D_{\underline{u}}f)(\underline{h}) \|$$

<u>Problem</u>: $\| \underline{h} \| \leq 2C \, \| \underline{k} \|$ oder so.

$$\| \underline{h} \| \leq C \, \| (D_{\underline{u}}f)(\underline{h}) \|$$

$$\| (D_{\underline{u}}f)(\underline{h}) \| - \underbrace{\| \underline{k} - (D_{\underline{u}}f)(\underline{h}) \|}_{\leq \lambda \| \underline{h} \|} \leq \| \underline{k} \|$$

$$\Rightarrow C \| (D_{\underline{u}}f)(\underline{h}) \| - \lambda C \| \underline{h} \| \leq C \| \underline{k} \|$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda C) \| \underline{h} \| \leq C \| \underline{k} \|$$

$$\Rightarrow \| \underline{h} \| \leq \frac{C}{1 - \lambda C} \| \underline{k} \|$$

$$\Rightarrow \| g(\underline{v}+\underline{k}) - g(\underline{v}) - (D_{\underline{u}}f)^{-1}(\underline{k}) \| \leq \frac{C^2 \lambda}{1 - \lambda C} \| \underline{k} \|$$

<u>Also</u>: Wähle $\lambda > 0$ so daß $0 < \dfrac{C^2 \lambda}{1 - \lambda C} < \varepsilon$

$\boxtimes$

Def: E, F, G : $\mathbb{R}$-Vektorräume

$\boxtimes : E \times F \to G$ heißt <u>bilinear</u>,

wenn gilt:

$\underline{e} \boxtimes - : F \to G$ lin. $\forall \underline{e} \in E$

$- \boxtimes \underline{f} : E \to G$ lin. $\forall \underline{f} \in F$

Bem: E, F, G: Banachräume.

$E \times F$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (häufig auch notiert als $E \oplus F$). Auf $E \oplus F$ ist eine Norm erklärt durch:

$$\|(\underline{e}, \underline{f})\| := \max(\|\underline{e}\|_E, \|\underline{f}\|_F)$$

Dadurch sind auf $E \times F$ eine Metrik und eine Topologie erklärt.

Beh: Für eine bilineare Abb.

$$\boxtimes : E \times F \to G$$
$$(\underline{e}, \underline{f}) \mapsto \underline{e} \boxtimes \underline{f}$$

sind äquivalent:

1) $\boxtimes$ ist stetig an der Stelle $(0,0) \in E \times F$

2) $\boxtimes$ ist stetig

3) $\boxtimes$ ist <u>beschränkt</u>, d.h., es gibt $C > 0$ mit

$$\|\underline{e} \boxtimes \underline{f}\| \leq C \|\underline{e}\| \, \|\underline{f}\|$$

<u>Bew</u>: $3 \Rightarrow 2$:

Sei $\varepsilon > 0$. Stetigkeit an der Stelle $(\underline{e}, \underline{f})$:

$$\|\underline{e} + \underline{h} \boxtimes \underline{f} + \underline{k} - \underline{e} \boxtimes \underline{f}\| =$$

$$= \|\underline{h} \boxtimes \underline{f} + \underline{e} \boxtimes \underline{k} + \underline{h} \boxtimes \underline{k}\|$$

$$\leq C \left(\|\underline{h}\| \, \|\underline{f}\| + \|\underline{e}\| \, \|\underline{k}\| + \|\underline{h}\| \, \|\underline{k}\| \right)$$

$$\leq C \left(\|(\underline{e}, \underline{f})\| + \|(\underline{h}, \underline{k})\| \right) \|(\underline{h}, \underline{k})\|$$

$\leq \varepsilon$ für $\|(\underline{h}, \underline{k})\|$ klein genug

$2 \Rightarrow 1$: klar

$1 \Rightarrow 3$:

Seien $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so gewählt, daß gilt:

$$\|(\underline{e}, \underline{f})\| \leq \delta \implies \|\underline{e} \boxtimes \underline{f}\| \leq \varepsilon$$

Damit ist für $(\underline{e}, \underline{f}) \neq (0,0)$:

$$\left\| \frac{\delta}{2} \left(\frac{\underline{e}}{\|\underline{e}\|}, \frac{\underline{f}}{\|\underline{f}\|} \right) \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\implies \left\| \frac{\delta\, \underline{e}}{2\|\underline{e}\|} \boxtimes \frac{\delta\, \underline{f}}{2\|\underline{f}\|} \right\| < \varepsilon$$

$$\implies \|\underline{e} \boxtimes \underline{f}\| \leq \underbrace{\frac{4\varepsilon}{\delta^2}}_{=:C} \|\underline{e}\| \, \|\underline{f}\|$$

$\boxtimes$

Produktregel E, F_1, F_2, G: Banachräume

$$\underline{u} \in U \subseteq E : \text{offen}$$

$$\underbrace{f : U \to F_1 \qquad g : U \to F_1}_{\text{differenzierbar an der Stelle } \underline{u}.}$$

$$\boxtimes : F_1 \times F_2 \longrightarrow G \quad \text{stetig, bilinear.}$$

Dann ist

$$f \boxtimes g : U \longrightarrow G$$
$$\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) \boxtimes g(\underline{x})$$

differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$ mit Ableitung

$$D_{\underline{u}}(f \boxtimes g) : \underline{h} \longmapsto D_{\underline{u}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{u}) + f(\underline{u}) \boxtimes D_{\underline{u}} g(\underline{h})$$

$$\ulcorner D_{\underline{u}} f \boxtimes g = D_{\underline{u}} f \boxtimes g(\underline{u}) + f(\underline{u}) \boxtimes D_{\underline{u}} g \lrcorner$$

Bew Zunächst zur Stetigkeit von $f \boxtimes g$ an der Stelle $\underline{u}$. Die Abb. $f \boxtimes g$ ist eine Verkettung

$$U \xrightarrow{f \times g} F_1 \times F_2 \xrightarrow{\boxtimes} G$$

Dabei ist $\boxtimes : F_1 \times F_2 \to G$ stetig.

Es reicht also zu zeigen, daß

$$f \times g : U \longrightarrow F_1 \oplus F_2$$
$$\underline{x} \longmapsto (f(\underline{x}), g(\underline{x}))$$

stetig an der Stelle $\underline{y} \in U$ ist.

Wir arbeiten mit Folgenstetigkeit.

Sei also $\underline{y}_*$ eine Folge, die gegen $\underline{y}$ konvergiert. Denn gilt

$$f(\underline{y}_*) \longrightarrow f(\underline{y})$$
$$g(\underline{y}_*) \longrightarrow g(\underline{y})$$

D.h.: $\| f(\underline{y}) - f(\underline{y}_*) \|$ ist Nullfolge
$\| g(\underline{y}) - g(\underline{y}_*) \|$ ist Nullfolge

Also:

$$\| (f(\underline{y}), g(\underline{y})) - (f(\underline{y}_*), g(\underline{y}_*)) \| =$$
$$= \| (f(\underline{y}) - f(\underline{y}_*), g(\underline{y}) - g(\underline{y}_*)) \|$$
$$= \max (\| f(\underline{y}) - f(\underline{y}_*) \|, \| g(\underline{y}) - g(\underline{y}_*) \|)$$
$$\longrightarrow 0$$

Darum: $(f(\underline{y}_x), g(\underline{y}_x)) \longrightarrow (f(\underline{y}), g(\underline{y}))$

d.h. $f \times g$ ist folgenstetig bei $\underline{y}$.

Nun zur linearen Approximation:

$$\Delta_{\underline{y}}(f \boxtimes g)(\underline{h}) = f(\underline{y}+\underline{h}) \boxtimes g(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) \boxtimes g(\underline{y})$$

$$= f(\underline{y}+\underline{h}) \boxtimes g(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) \boxtimes g(\underline{y}+\underline{h})$$
$$+ f(\underline{y}) \boxtimes g(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) \boxtimes g(\underline{y})$$

$$= \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{y}+\underline{h}) + f(\underline{y}) \boxtimes \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h})$$

$$= \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes (g(\underline{y}) + \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h})) + f(\underline{y}) \boxtimes \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h})$$

Also:

$$\Delta_{\underline{y}} f \boxtimes g(\underline{h}) = \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{y}) + f(\underline{y}) \boxtimes \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h}) + \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h})$$

Dann ist

$$\Delta_{\underline{y}} f \boxtimes g(\underline{h}) - D_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{y}) - f(\underline{y}) \boxtimes D_{\underline{y}} g(\underline{h}) =$$

$$= \left[\Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) - D_{\underline{y}} f(\underline{h})\right] \boxtimes g(\underline{y}) \quad + \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) \boxtimes \Delta_{\underline{y}} g(\underline{h})$$
$$+ f(\underline{y}) \boxtimes \left[\Delta_{\underline{y}} g(\underline{h}) - D_{\underline{y}} g(\underline{h})\right]$$

Es gibt $C > 0$ mit:

$$\|D_{\underline{u}} f(\underline{h})\| \le C\|\underline{h}\| \quad \text{und} \quad \|D_{\underline{u}} g(\underline{h})\| \le C\|\underline{h}\|$$

wählen wir später

Zu $\lambda > 0$, sei $\delta > 0$ so, daß für $\|\underline{h}\| < \delta$ gilt:

abh. von λ

$$\|\Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f(\underline{h})\| < \lambda \|\underline{h}\|$$

$$\|\Delta_{\underline{u}} g(\underline{h}) - D_{\underline{u}} g(\underline{h})\| < \lambda \|\underline{h}\|$$

Dann ist insbesondere

$$\|\Delta_{\underline{u}} f(\underline{h})\| \le C\|\underline{h}\| + \lambda\|\underline{h}\|$$

$$\|\Delta_{\underline{u}} g(\underline{h})\| \le C\|\underline{h}\| + \lambda\|\underline{h}\|$$

und somit

$$\|\Delta_{\underline{u}} f(\underline{h})\| \, \|\Delta_{\underline{u}} g(\underline{h})\| \le (C+\lambda)^2 \|\underline{h}\|^2$$

Schließlich sei $D > 0$ so gewählt, daß

$$\|\underline{f} \boxtimes \underline{g}\| \le D \|\underline{f}\| \, \|\underline{g}\|$$

ist.

Dann folgt für $\|\underline{h}\| < \delta$:

$$\|\Delta_u f \boxtimes g(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{u}) - f(\underline{u}) \boxtimes D_{\underline{u}} g(\underline{h})\| \leq$$

$$\leq \|[\Delta_u f(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f(\underline{h})] \boxtimes g(\underline{u})\|$$

$$+ \|f(\underline{u}) \boxtimes [\Delta_{\underline{u}} g(\underline{h}) - D_{\underline{u}} g(\underline{h})]\|$$

$$+ \|\Delta_u f(\underline{h}) \boxtimes \Delta_u g(\underline{h})\|$$

$$\leq D \lambda \|g(\underline{u})\| \|\underline{h}\|$$

$$+ D \lambda \|f(\underline{u})\| \|\underline{h}\|$$

$$+ (C+\lambda)^2 \|\underline{h}\|^2$$

Wähle $\lambda > 0$ so daß:

$$0 < D \lambda [\|g(\underline{u})\| + \|f(\underline{u})\|] < \frac{\varepsilon}{2}$$

und verkleinere daß zugehörige δ, so daß auch noch gilt:

$$(C+\lambda)^2 \|\underline{h}\| \leq (C+\lambda)^2 \delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann folgt

$$\|\Delta_u f \boxtimes g(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f(\underline{h}) \boxtimes g(\underline{u}) - f(\underline{u}) \boxtimes D_{\underline{u}} g(\underline{h})\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|$$

$\boxtimes$

Matrixdarstellung der Ableitung

$E = \mathbb{R}^m \qquad F = \mathbb{R}^n$

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

$f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$

$\rightsquigarrow \quad D_{\underline{u}} f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + \cdots + x_m \underline{e}_m$$

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{te}} \text{ Zeile}$$

Beob: Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann ist

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \varphi\left(\sum x_j \underline{e}_j\right) = \sum x_j \, \varphi(\underline{e}_j)$$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad \varphi(\underline{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Also: Die Ableitung $D_y f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ wird durch eine $n \times m$-Matrix beschrieben.

Ziel: Gegeben f (z.B.: $f : \binom{x}{y} \mapsto \binom{xy}{x+y}$), bestimme diese Matrix.

Bsp:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\binom{u}{v} \mapsto u^2 + v^2$$

hatte die Ableitung

$$D_{\binom{u}{v}} f : \binom{x}{y} \mapsto 2ux + 2vy = \underbrace{\begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix}}_{A} \binom{x}{y}$$

Hm...

$$2u = \frac{d}{du}\, u^2 + v^2$$
$$2v = \frac{d}{dv}\, u^2 + v^2$$

Das kann kein Zufall sein !

Matrixdarstellung der Ableitung

$E = \mathbb{R}^m \qquad F = \mathbb{R}^n$

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

$f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$

$\rightsquigarrow D_{\underline{u}} f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_m \underline{e}_m$$

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{te}} \text{ Zeile}$$

<u>Beob:</u> Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann ist

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \varphi\left(\sum x_j \underline{e}_j\right) = \sum x_j \varphi(\underline{e}_j)$$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad \varphi(\underline{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

<u>Also:</u> Die Ableitung $D_y f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ wird durch eine $n \times m$-Matrix beschrieben.

<u>Ziel:</u> Gegeben f (z.B.: $f: \binom{x}{y} \mapsto \binom{xy}{x+y}$), bestimme diese Matrix.

<u>Bsp:</u>
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\binom{u}{v} \mapsto u^2 + v^2$$

hatte die Ableitung
$$D_{\binom{u}{v}} f: \binom{x}{y} \mapsto 2ux + 2vy = \underbrace{(2u \quad 2v)}_{A} \binom{x}{y}$$

Hm...
$$2u = \frac{d}{du} u^2 + v^2$$
$$2v = \frac{d}{dv} u^2 + v^2$$

Das kann kein Zufall sein ¡

Def: $U \subseteq E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$: offen

$f : U \to F$ differenzierbar an der Stelle $\underline{u} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m)$

$D_{\underline{u}} f : E_1 \oplus \cdots \oplus E_m \to F$ Ableitung.

Die i-te partielle Ableitung von f ist dann

$$D^i_{\underline{u}} f : E_i \longrightarrow F$$
$$\underline{e}_i \mapsto D_{\underline{u}} f(0, \ldots, \underline{e}_i, \ldots 0)$$

Bem: $\iota_i : E_i \to E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$

$$D^i_{\underline{u}} f = D_u f \circ \iota_i$$

$\pi_i : E_1 \oplus \cdots \oplus E_m \to E_i$

$$D_u f = \sum_{i=1}^{m} D^i_u f \circ \pi_i$$

Zerlegung von Vektorräumen

$$F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_i : F &\longrightarrow F_i \\ (f_1, \dots, f_n) &\longmapsto f_i \end{aligned}\right\} \text{ kanonische Projektion}$$

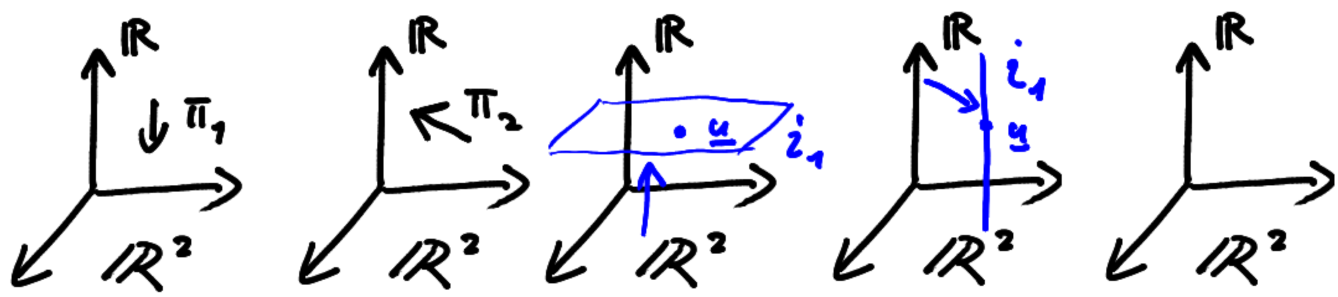
$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \in F$$

$$\begin{aligned} \iota_i^{\underline{u}} : F_i &\longrightarrow F \\ \underline{f}_i &\longmapsto (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{i-1}, \underline{f}_i, \underline{u}_{i+1}, \dots, \underline{u}_n) \end{aligned}$$

__Prob:__ $\iota_i^{\underline{u}}(u_i) = \underline{u}$

Inklusion durch den Punkt $\underline{u}$

__Bsp:__ $F_1 = \mathbb{R}^2 \qquad F_2 = \mathbb{R} \qquad F = F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$



Koordinatenabbildungen

$E, F_1, \ldots, F_n$: Banachräume

$F := F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$: Banachraum bez

$$\left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right\| := \max(\|f_1\|, \ldots, \|f_n\|)$$

$\pi_i : F \to F_i$ Projektion auf die

$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \mapsto f_i$ $i$te Komponente

Bem: $\pi_i : F \to F_i$ ist stetig, denn

$$\begin{array}{ccc} \left\| \pi_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right\| & \leq & 1 \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right\| \\ \| & & \shortparallel \\ \|f_i\| & & \max(\|f_1\|, \ldots, \|f_n\|) \end{array}$$

Def: $U \subseteq E$ offen $f : U \to F$ Abb.

Dann nennen wir die Verkettung

$$f_i := \pi_i \circ f : U \to F_i$$

die $i$te Koordinatenabbildung von f.

Also: $$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

<u>Bem:</u> Äquivalent sind

1) f ist stetig (an der Stelle $\underline{u}$).

2) Alle f_i sind stetig (an der Stelle $\underline{u}$).

<u>Bew:</u> <u>$1 \Rightarrow 2$</u> weil π_i stetig ist.

<u>$2 \Rightarrow 1$</u> Folgt aus der Aussage

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_*^1 \\ \vdots \\ \underline{u}_*^n \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} \underline{v}_*^1 \\ \vdots \\ \underline{v}_*^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{u}_*^i \| \underline{v}_*^i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

was wieder folgt, weil

$$\left\| \begin{pmatrix} \underline{u}_k^1 \\ \vdots \\ \underline{u}_k^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{v}_\ell^1 \\ \vdots \\ \underline{v}_\ell^n \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \| \underline{u}_k^i - \underline{v}_\ell^i \| < \varepsilon \quad \forall i$$

$\boxtimes$

<u>Prop:</u> $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \to F$ ist differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$ genau dann, wenn alle $f_i : U \to F_i$ an der Stelle $\underline{u}$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$D_{\underline{u}} f(\underline{h}) = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1(\underline{h}) \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n(\underline{h}) \end{pmatrix} \quad \forall \underline{h} \in E$$

<u>Bew:</u> „$\Rightarrow$" Stetigkeit der f_i bei $\underline{u}$ haben wir oben gesehen.

Die Projektion $\pi_i : F \to F_i$ ist stetig und linear, also differenzierbar mit Ableitung $D\pi_i = \pi_i : F \to F_i$. Dann folgt mit der Kettenregel, daß $f_i = \pi_i \circ f$ differenzierbar bei $\underline{u}$ ist mit Ableitung

$$D_{\underline{u}} f_i = D_{f(\underline{u})} \pi_i \circ D_{\underline{u}} f = \pi_i \circ D_{\underline{u}} f$$

Also ist $D_{\underline{a}} f_i$ die i^{te} Koordinatenfunktion von $D_{\underline{u}} f$.

„$\Leftarrow$" Seien alle f_i differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$. Dann ist f stetig bei $\underline{u}$.

<u>Beob:</u> $\Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) = f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})$

$$= \begin{pmatrix} f_1(\underline{u}+\underline{h}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{u}+\underline{h}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\underline{u}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{u}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_{\underline{u}} f_1(\underline{h}) \\ \vdots \\ \Delta_{\underline{u}} f_n(\underline{h}) \end{pmatrix}$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\|\underline{h}\| < \delta \Rightarrow \| \Delta_{\underline{u}} f_k(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f_k(\underline{h}) \| \leq \varepsilon \|\underline{h}\| \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Dann ist aber nach Def. der Maximumsnorm auf F:

$$\left\| \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) - \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1(\underline{h}) \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n(\underline{h}) \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|$$

für $\|\underline{h}\| < \delta$

<u>D.h.:</u> $\begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix}$ ist eine lineare Approximation für $\Delta_{\underline{u}} f$. Also ist f bei $\underline{u} \in U$ differenzierbar mit

$$D_{\underline{u}} f = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Partielle Ableitungen

$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$, F : Banachräume

$\underline{u} \in U \subseteq E$ offen $\quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_m \end{pmatrix}$

$f : U \to F$ stetig an der Stelle $\underline{u}$

$$\begin{aligned} \iota_i : E_i &\longrightarrow E \\ \underline{e} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underline{e} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{te}} \text{ Stelle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_i^{\underline{u}} : E_i &\longrightarrow E \\ \underline{e} &\longmapsto \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{e} \\ \vdots \\ \underline{u}_m \end{pmatrix} = \underline{u} + \iota_i(\underline{e} - \underline{u}_i) \end{aligned}$$

Bem: $\iota_i : E_i \to E$ ist linear und beschränkt:

$$\| \iota_i(\underline{e}) \| = \| \underline{e} \|$$

D.h.: ι_i ist sogar eine isometrische Einbettung.

Insbesondere sind ι_i und $\iota_i^{\underline{u}}$ stetig.

Also: $U_i := \{ \underline{e} \in E_i \mid \iota_i^{\underline{u}}(\underline{e}) \in U \}$ ist offen.

$$f^i := f \circ \iota_i^{\underline{u}} : U_i \xrightarrow{\iota_i^{\underline{u}}} U \xrightarrow{f} F$$

ist also stetig an der Stelle $\underline{u}_i$.

Def: Ist f^i differenzierbar an der Stelle $\underline{u}_i$, so sagen wir, die $i$te partielle Ableitung von f existiere:

$$D_{\underline{u}}^i f := D_{\underline{u}_i} f^i : E_i \to F$$

Prop: Ist f an der Stelle $\underline{u} \in U$ differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen und es gilt:

$$D_{\underline{u}} f \begin{pmatrix} \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{h}_m \end{pmatrix} = D_{\underline{u}}^1 f(\underline{h}_1) + \cdots + D_{\underline{u}}^m f(\underline{h}_m)$$

In Matrixnotation

$$D_u f = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}}^1 f & \cdots & D_u^m f \end{pmatrix}$$

$$D_u f \begin{pmatrix} \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{h}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}}^1 f & \cdots & D_u^m f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{h}_m \end{pmatrix}$$

Bew: Die Inklusion $\iota_i^{\underline{u}} : U_i \to E$ ist affin: $\iota_i^{\underline{u}}(\underline{e}) = \underline{u} + \iota_i(\underline{e} - \underline{u}_i)$

$$\iota_i^{\underline{u}} = (\underline{u} + *) \circ \iota_i \circ (* - \underline{u}_i)$$

Also ist $\iota_i^{\underline{u}}$ differenzierbar mit Ableitung $\iota_i : E_i \to E$. Die Kettenregel impliziert damit, daß $f^i = f \circ \iota_i^{\underline{u}}$ differenzierbar an der Stelle $u_i \in U_i$ ist mit Ableitung

$$D_{\underline{u}}^i f = D_{u_i} f^i = D_{\underline{u}} f \circ \iota_i$$

Andererseits ist

$$\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{m} \iota_i \circ \pi_i$$

$\ulcorner \underline{h} = \iota_1(\underline{h}_1) + \dots + \iota_m(\underline{h}_m)$ mit $\underline{h}_i = \pi_i(\underline{h})$ $\lrcorner$

Also: $D_{\underline{u}} f = D_{\underline{u}} f \circ \mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{m} D_{\underline{u}} f \circ \iota_i \circ \pi_i$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_{\underline{u}}^i f \circ \pi_i$$

$$\Rightarrow \quad D_{\underline{u}} f = \left(D_{\underline{u}}^1 f \ \cdots \ D_{\underline{u}}^m f \right)$$

$\boxtimes$

<u>Kor</u>: $\underline{U} \subseteq E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ offen $\underline{u} \in U$

$f : U \to F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ differenzierbar an der Stelle $\underline{u}$.

Dann wird die Ableitung $D_{\underline{u}} f$ beschrieben durch die (Block)-Matrix

$$\begin{pmatrix} D^1_{\underline{u}} f_1 & \cdots & D^m_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D^1_{\underline{u}} f_n & \cdots & D^m_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix}$$

$D^j_{\underline{u}} f_i : E_j \to F_i$ ist dabei die j<u>te</u> partielle Ableitung der i<u>ten</u> Koordinatenfunktion. ☑

<u>Spezialfall</u> $\quad U \subseteq E = \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$

$$F = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$$

$$f : U \to \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Hier können wir f als Funktion in m reellen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ auffassen. Die partiellen Ableitungen

$$D^j_{\underline{u}} f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sind durch eine 1×1 - Matrix, also eine reelle Zahl gegeben. Traditionell wird sie mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

notiert. Wir fassen sie als Abbildungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$$

auf, wenn sie auf ganz U existieren.

Satz: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

stetig auf ganz $\mathcal{U}$. Ferner gelte

1) In jedem Punkt $\underline{y} \in \mathcal{U}$ existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

2) Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

sind stetige Funktionen auf $\mathcal{U}$.

Dann ist f in jedem Punkt $\underline{y} \in \mathcal{U}$ differenzierbar mit Ableitung

$$D_{\underline{y}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\underline{y}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{y}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

stetig auf ganz U. Ferner gelte

1) In jedem Punkt $\underline{y} \in U$ existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

2) Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$$

sind stetige Funktionen auf U.

Dann ist f in jedem Punkt $\underline{y} \in U$ differenzierbar mit Ableitung

$$D_{\underline{y}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\underline{y}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{y}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

Bew: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar genau dann, wenn alle f_i differenzierbar sind. In diesem Fall gilt.

$$D_{\underline{u}} f = \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} f_1 \\ \vdots \\ D_{\underline{u}} f_n \end{pmatrix} \qquad D_{\underline{u}} f_i : \text{ i-te Zeile}$$

Also: o. B. d. A. $\boxed{n = 1}$

Sei also $f : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Für $\underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ist

$$\Delta_{\underline{u}} f \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_m + h_m \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$= f \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_m + h_m \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} + h_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$+ f \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} + h_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_{m-2} + h_{m-2} \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots$$

$$= \int_0^{h_m} \frac{\partial f}{\partial x_m} \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} + h_{m-1} \\ u_m + t \end{pmatrix} dt$$

$$+ \int_0^{h_{m-1}} \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}} \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ \vdots \\ u_{m-2} + h_{m-2} \\ u_{m-1} + t \\ u_m \end{pmatrix} dt$$

$$+ \cdots$$

Mit dem Mittelwertsatz ist also

$$\Delta_{\underline{y}} f\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_m}(\underline{v}_m)\, h_m + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{v}_1)\, h_1$$

für $\underline{v}_i$ mit $\|\underline{v}_i - \underline{y}\|_\infty \leq \|\underline{h}\|_\infty$

Nun sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{v}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{y}) \right| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{für } \|\underline{v} - \underline{y}\| < \delta$$

Für $\|\underline{h}\| < \delta$ ist dann

$$\left\| \Delta_{\underline{y}} f(\underline{h}) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{y})\, h_j \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{v}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{y}) \right] h_j \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{v}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{y}) \right| |h_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} |h_j| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|_\infty$$

Also ist f an der Stelle $\underline{y}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

$\boxtimes$

Kurven in Banachräumen

$U \subseteq \mathbb{R} = E$ offen $\quad F$: Banachraum

$f : U \to F$ differenzierbar bei $t \in U$

Def: $D_t f : E \to F$ linear

$$f'(t) := D_t f\,(1)$$

Bem: $D_t f(\alpha) = f'(t)\,\alpha$

Mittelwertsatz

$f : [a,b] \to F$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \sup_{t \in (a,b)} \| f'(t) \| \, (b-a)$$

Bew: Es ist nur etwas zu zeigen, wenn $\| f'(t) \|$ auf (a,b) beschränkt ist. Sei also $C > \| f'(t) \| \quad \forall t \in (a,b)$

$$S := \{ (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq s \leq t \leq b, \| f(t) - f(s) \| \leq C(t-s) \}$$

Beob: $(s,s) \in S \quad \forall s \quad \Rightarrow \quad S \neq \emptyset$

Beob: S ist abg.

$\ulcorner$ $(s,t) \notin S \quad \Rightarrow \quad \| f(t) - f(s) \| > C(t-s)$

$\Rightarrow \quad \| f(t) - f(s) \| - C(t-s) > \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ bleibt gültig für (s',t') nahe bei (s,t)

f, $\|\cdot\|$ stetig $\lrcorner$

Sei nun $(s,t) \in S$, $a < s \le t < b$ und

$$0 < \varepsilon < C - \| f'(s) \|$$
$$0 < \varepsilon < C - \| f'(t) \|$$

Dann gibt es $\delta > 0$ mit

$$0 \le h < \delta \Rightarrow \quad \| f(s-h) - f(s) + h f'(s) \| \le \varepsilon h$$
$$\| f(t+h) - f(t) - h f'(t) \| \le \varepsilon h$$

$$\Rightarrow \quad \| f(t+h) - f(s-h) \| \le C h + C(t-s) + C h$$
$$= C(t+h - (s-h))$$

$\Rightarrow \quad \sup \{ t - s \mid (s,t) \in S \} = b - a$

$\Rightarrow \quad (a,b) \in S$, weil S abg. ist.

Also: $\| f(b) - f(a) \| \le C(b-a)$ für <u>jede</u> obere Schranke von $\{ \| f'(t) \| \mid t \in (a,b) \}$. $\boxed{/}$

Kor: Sei $f : U \to F$ differenzierbar auf U. U enthalte die Strecke $[\underline{u}, \underline{w}]$. Dann gilt für jeden Punkt $\underline{v} \in [\underline{u}, \underline{w}]$:

$$\| f(\underline{w}) - f(\underline{u}) - D_{\underline{v}} f(\underline{w} - \underline{u}) \| \leq \| \underline{w} - \underline{u} \| \sup_{x \in [\underline{u}, \underline{w}]} \| D_{\underline{x}} f - D_{\underline{v}} f \|_{op}$$

Bew: Betrachte $g(t) := f(\underline{u} + t(\underline{w} - \underline{u})) - t D_{\underline{v}}(\underline{w} - \underline{u})$

Dann ist

$$\| f(\underline{w}) - f(\underline{u}) - D_{\underline{v}}(\underline{w} - \underline{u}) \| = \| g(1) - g(0) \|$$

$$\leq \sup_{t \in (0,1)} \| g'(t) \|$$

$$= \sup_{t \in (0,1)} \| D_{\underline{u} + t(\underline{w} - \underline{u})} f(\underline{w} - \underline{u}) - D_{\underline{v}} f(\underline{w} - \underline{u}) \|$$

$$= \sup_{\underline{x} \in [\underline{u}, \underline{w}]} \| (D_{\underline{x}} f - D_{\underline{v}} f)(\underline{w} - \underline{u}) \|$$

$$\leq \| \underline{w} - \underline{u} \| \sup_{\underline{x} \in [\underline{u}, \underline{w}]} \| D_{\underline{x}} f - D_{\underline{v}} f \|_{op}$$ ☒

Insb:

$$\boxed{\| \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) - D_{\underline{u}} f(\underline{h}) \| \leq \| \underline{h} \| \sup_{\underline{x} \in [\underline{u}, \underline{u} + \underline{h}]} \| D_{\underline{x}} f - D_{\underline{u}} f \|_{op}}$$

Die Operatornorm

$$\mathcal{B}(E;F) := \{\varphi : E \to F \mid \varphi : \text{stetig \& linear}\}$$

$$\|\varphi\|_{op} := \inf\{C \geq 0 \mid \forall_{\underline{u} \in E} \ \|\varphi(\underline{u})\| \leq C\|\underline{u}\|\}$$

Übung $\|\varphi\|_{op} = \sup\{\|\varphi(\underline{e})\| \mid \underline{e} \in E, \|\underline{e}\| = 1\}$

Übung: $\|*\|_{op}$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(E;F)$.
Mit dieser Norm ist $\mathcal{B}(E;F)$ ein Banachraum.

Die Operatornorm

$$B(E;F) := \{\varphi : E \to F \mid \varphi : \text{stetig \& linear}\}$$

$$\|\varphi\|_{op} := \inf\{C \geq 0 \mid \forall_{\underline{u} \in E} \; \|\varphi(\underline{u})\| \leq C\|\underline{u}\|\}$$

Übung: $\|*\|_{op}$ ist eine Norm auf $B(E;F)$.

Mit dieser Norm ist $B(E;F)$ ein Banachraum.

Beob: Für $\varphi \in B(E;E)$ gilt:

$$\|id_E - \varphi\|_{op} < 1 \Rightarrow \varphi \text{ injektiv}$$

Bew: φ nicht injektiv

$\Rightarrow \exists \, \underline{u} \neq 0 : \varphi(\underline{u}) = 0$

$\Rightarrow \exists \, \underline{u} \neq 0 : id_E(\underline{u}) - \varphi(\underline{u}) = \underline{u}$

$\Rightarrow \|id_E - \varphi\|_{op} \geq 1$ ☒

Kor: Für $\varphi \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\|\varphi - id_{\mathbb{R}^m}\| < 1 \Rightarrow \varphi \text{ ist invertierbar.}$$

Bew: Dimensionsformel. ☒

Übung: Die Operatornorm ist submultiplikativ:

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G \quad :$$

$$\|\psi \circ \varphi\|_{op} \leq \|\psi\|_{op} \|\varphi\|_{op}$$

Bew: $\forall \underline{e} \in E: \quad \|\psi(\varphi(\underline{e}))\| \leq \|\psi\|_{op} \|\varphi(\underline{e})\|$

$$\leq \|\psi\|_{op} \|\varphi\|_{op} \|\underline{e}\|$$

Kor: $\varphi \in B(E; E), \quad \|\varphi\| < 1$

$\Rightarrow$ $id_E + \varphi + \varphi^2 + \dots$ konvergiert in der Operatornorm

$\psi := id_E + \varphi + \varphi^2 + \dots$

$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \varphi + \varphi^2 + \dots = \psi - id_E$

$\Rightarrow \quad id_E = \psi \circ (id_E - \varphi) = (id_E - \varphi) \circ \psi$

$\Rightarrow \quad \psi = (id_E - \varphi)^{-1}$

Übung: $GL_m(\mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \mid \varphi \text{ invertierbar}\}$

Zeige:

1) $GL_m(\mathbb{R}) \subseteq B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ ist offen.

2) $*^{-1}: GL_m(\mathbb{R}) \to GL_m(\mathbb{R})$ ist stetig

$$\varphi \longmapsto \varphi^{-1}$$

Höhere Ableitungen

$U \subseteq E$ offen, E, F : Banachräume

Def: $f : U \to E$ heißt stetig differenzierbar auf U, wenn gilt

(1) f ist stetig auf U)

2) f ist an jeder Stelle $\underline{u} \in U$ differenzierbar.

3) $Df : U \longrightarrow B(E; F)$ ist stetig auf ganz U.

Def: Sei $f : U \to F$ stetig differenzierbar. Dann ist f 2-fach differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$, wenn

$$Df : U \to B(E; F)$$

differenzierbar an der Stelle $\underline{u}$ ist. Wir setzen

$$D^{(2)}_{\underline{u}} f := D_{\underline{u}} Df$$

Ist Df an jeder Stelle $\underline{u} \in U$ differenzierbar, und ist

$$D^{(2)}f : U \to B(E; B(E; F))$$

stetig, so nennen wir f <u>2-fach stetig differenzierbar</u>.

<u>Allgemein:</u> f ist k-fach stetig differenzierbar auf U, wenn f stetig differenzierbar ist und $Df : U \to B(E; F)$ $(k-1)$-fach stetig differenzierbar ist.

<u>Bem:</u> $B(E; B(E'; F))$ kann identifiziert werden mit den stetigen bilinearen Abb.

$$E \times E' \to F$$

vermöge:

$$BB(E \times E'; F) \longrightarrow B(E; B(E'; F))$$

$$\beta \longmapsto \underline{e} \mapsto \beta(\underline{e}, *)$$

$$(\underline{e}, \underline{e}') \mapsto (\Phi(\underline{e}))(\underline{e}') \longleftarrow\!\shortmid \; \Phi : E \to B(E'; F)$$

Bew: Sei $\Phi : E \to \mathcal{B}(E';F)$ beschränkt,

d.h.: $\exists\, C>0$:

$$\|\Phi(\underline{e})\|_{op} \leq C\|\underline{e}\|$$

Dann ist für $(\underline{e},\underline{e}') \in E\times E'$

$$\begin{aligned}\|\Phi(\underline{e})(\underline{e}')\| &\leq \|\Phi(\underline{e})\|_{op}\,\|\underline{e}'\| \\ &\leq C\|\underline{e}\|\,\|\underline{e}'\|\end{aligned}$$

Umgekehrt sei $\beta : E\times E' \to F$ beschränkt.

D.h. $\exists\, C>0$: $\|\beta(\underline{e},\underline{e}')\| \leq C\|\underline{e}\|\,\|\underline{e}'\|$.

Dann ist $\|\beta(\underline{e},*)\|_{op} \leq C\|\underline{e}\|$ und

somit ist $\underline{e} \mapsto \beta(\underline{e},*)$ beschränkt.

Die Konstruktionen sind ersichtlich

invers zueinander. $\boxtimes$

Familien von Funktionen

Bsp: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 - a^2$$

eine Funktion.

Es ist aber Willkür, in dem Ausdruck $ax^2 - a^2$ den Buchstaben x als Unbekannte und a als Parameter aufzufassen.

„Eigentlich" müßte man doch die Funktion

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, x) \mapsto ax^2 - a^2 = f_a(x)$$

betrachten.

Hm... man kann aber auch anders auf die Situation schauen.

$$\mathrm{Abb}(X; Y) := \{ g : X \to Y \}$$

Dann haben wir eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R};\mathbb{R})$$
$$a \mapsto f_a$$

<u>Beob:</u> Eine Abbildung in zwei Argumenten läßt sich uminterpretieren als eine „abbildungswertige" Abbildung in einem Argument:

$$\mathrm{Abb}(A \times B; D) = \mathrm{Abb}(A; \mathrm{Abb}(B;D))$$
$$\parallel$$
$$\mathrm{Abb}(B; \mathrm{Abb}(A;D))$$

<u>Formalisierung</u>

$$\Phi : \mathrm{Abb}(X \times Y; Z) \to \mathrm{Abb}(X; \mathrm{Abb}(Y;Z))$$
$$F \longmapsto x \mapsto f_x \text{ mit}$$
$$f_x : Y \to Z$$
$$y \mapsto F(x,y)$$

$$\Psi : \mathrm{Abb}(X; \mathrm{Abb}(Y;Z)) \to \mathrm{Abb}(X \times Y; Z)$$
$$f : x \mapsto f_x \longmapsto F : X \times Y \to Z$$
$$(x,y) \mapsto f_x(y)$$

Dann sind Φ und Ψ zueinander invers:

$$\Psi(\Phi(F))(x,y) =$$
$$= (\Phi(F))_x(y) = F(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(\Phi(F)) = F$$

$$\Phi(\Psi(f))_x(y) = F(x,y) = f_x(y) \quad \forall x,y$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\Psi(f))_x = f_x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\Psi(f)) = f$$

<u>Also</u>: Φ, Ψ : zueinander inverse <u>Bijektionen</u>

$$\boxed{\mathrm{Abb}(X \times Y; Z) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Abb}(X; \mathrm{Abb}(Y; Z))}$$

Bem: $\mathrm{Lin}(E;F) \subseteq \mathrm{Abb}(E;F)$

Beob: Φ und Ψ schränken sich ein zu Bijektionen:

$$\mathrm{Bil}(E\times E';F) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Lin}(E;\mathrm{Lin}(E';F))$$

und

$$BB(E\times E';F) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} B(E;B(E';F))$$

Bem: Eine lineare Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^m \to F$$

wird bestimmt durch die Werte

$$\underline{f}_i := \varphi(\underline{e}_i) \qquad \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{te Zeile}$$

Denn es ist

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \varphi\Big(\sum_{i=1}^m x_i \underline{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^m x_i \varphi(\underline{e}_i)$$

$$= (f_1 \cdots f_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Also: $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m; F) = \mathbb{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$

Bem: Ist $F = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ so erhalten wir

$$\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) = \mathbb{M}_{1\times m}(\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R}))$$

Die Elemente sind Zeilen von Zeilen.

Bsp: $m = 2 \quad n = 3$

$$((a\ b\ c)\ (d\ e\ f)) \in \mathbb{M}_{1\times 2}(\mathbb{M}_{1\times 3}(\mathbb{R}))$$

$$\left(((a\,b\,c)\ (d\,e\,f))\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= ((a\ b\ c)s + (d\ e\ f)t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (as+dt \quad bs+et \quad cs+ft)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= asx + dtx + bsy + ety + csz + ftz$$

bilinear in $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Bsp: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 e^y$$

$$Df : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) = M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)}f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})) = M_{1\times 2}(M_{1\times 2}(\mathbb{R}))$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} Df & \frac{\partial}{\partial y} Df \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^y & \underline{2xe^y} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{2xe^y} & x^2e^y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Beh: $D^{(2)}f$ ist symmetrisch:

$$D^{(2)}_{\binom{x}{y}} f\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = D^2_{\binom{x}{y}} f\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2e^y s & 2xe^y s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2xe^y t & x^2e^y t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^y s + 2xe^y t & 2xe^y s + x^2e^y t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= 2e^y su + \underline{2xe^y tu} + \underline{2xe^y sv} + x^2e^y tv$$

invariant unter Tausch

$$s \leftrightarrow u$$
$$t \leftrightarrow v$$

Der Grund für die Symmetrie ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

<u>Bem</u>: Traditionell notiert man Bilinearformen durch ihre Gramsche Matrix:

$$(s\ t)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

<u>Rechnung</u>

$$= \big((abc)(def)\big)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Für die zweite Ableitung:

$$H_{\underline{u}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$H_{\underline{u}} f$ heißt <u>Hesse-Matrix</u>.

Die zweite Ableitung

$U \subseteq E$ offen $\qquad E, F$: Banachräume

$f : U \to F$

Beob: $\Delta_{\underline{u}+\underline{h}} f(\underline{k}) = f(\underline{u}+\underline{h}+\underline{k}) - f(\underline{u}) - [f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u})]$

$$= \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}+\underline{k}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h})$$

Def: $\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) := f(\underline{u}+\underline{h}+\underline{k}) - f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u}+\underline{k}) + f(\underline{u})$

$$= \Delta_{\underline{u}+\underline{h}} f(\underline{k}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{k}) =$$

$$= \Delta_{\underline{u}+\underline{k}} f(\underline{h}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h})$$

$$= \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}+\underline{k}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{k})$$

Bem: $\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f = 0 \iff \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}+\underline{k}) = \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) + \Delta_{\underline{u}} f(\underline{k})$

Die Differenz zweiter Ordnung ist ein Maß dafür, wie weit die Differenz erster Ordnung $\Delta_{\underline{u}} f$ von Linearität abweicht:

$$\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f = 0 \iff \Delta_{\underline{u}} f = D_{\underline{u}} f$$

Beob: $\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f$ ist symmetrisch:

$$\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h},\underline{k}) = \Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k},\underline{h})$$

Satz: Sei f zweifach differenzierbar auf ganz U.

Dann ist $D^{(2)}_{\underline{u}} f : E \times E \to F$ eine/die Approximation höherer als zweiter Ordnung für $\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f$. D.h.:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so daß für alle $\underline{h},\underline{k} \in \mathbb{B}_\delta(0)$ gilt:

$$\| \Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h},\underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h},\underline{k}) \| \leq \varepsilon \left[\|\underline{h}\| + \|\underline{k}\| \right]^2$$

Bem: $\|\underline{h}\| + \|\underline{k}\|$ ist eine Norm auf $E \oplus E$.

Bew: Zunächst erinnern wir an folgende Konsequenz des Mittelwertsatzes:

$$(*) \quad \| g(\underline{k}) - g(0) - D_0 g(\underline{k}) \| \leq \|\underline{k}\| \sup_{\underline{x} \in [0,\underline{k}]} \| D_{\underline{x}} g - D_0 g \|_{op}$$

Sei f nun zweifach differenzierbar an der Stelle $\underline{u} \in U$. Zunächst gibt es $r>0$, so daß $\mathbb{B}_{2r}(\underline{u}) \subseteq U$ ist. Im folgenden ist stets $\|\underline{h}\|, \|\underline{k}\| \le r$ angenommen, so daß das Rechteck $[\underline{u}, \underline{u}+\underline{h}, \underline{u}+\underline{k}, \underline{u}+\underline{h}+\underline{k}] \subseteq U$ ist.

Wir wenden $(*)$ an auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{B}_r(0) &\longrightarrow F \\ \underline{k} &\longmapsto f(\underline{u}+\underline{k}+\underline{h}) - f(\underline{u}+\underline{k}) \\ &= \Delta_{\underline{u}+\underline{k}} f(\underline{h}) \\ &= \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}+\underline{k}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{k}) \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\| g(\underline{k}) - g(0) - D_0 g(\underline{k}) \| \le \|\underline{k}\| \sup_{\underline{x} \in [0,\underline{k}]} \| D_{\underline{x}} g - D_0 g \|_{op}$$

Dabei ist

$$g(\underline{k}) - g(0) = \Delta_{\underline{u}+\underline{k}} f(\underline{h}) - \Delta_{\underline{u}} f(\underline{h}) = \Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k})$$

$$D_0 g = D_{\underline{u}+\underline{h}} f - D_{\underline{u}} f = \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h})$$

$$D_{\underline{x}} g = D_{\underline{u}+\underline{h}+\underline{x}} f - D_{\underline{u}+\underline{x}} f = \Delta_{\underline{u}+\underline{x}} Df(\underline{h})$$

$$= \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x}+\underline{h}) - \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x})$$

$$D_{\underline{x}} g - D_0 g = \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x}+\underline{h}) - \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x}) - \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h})$$

<u>Beob</u>: $D_{\underline{u}} Df : E \to \mathcal{B}(E;F)$ ist linear.

Also ist

$$D_{\underline{u}} Df(\underline{x}+\underline{h}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{x}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{h}) = 0$$

<u>Kor</u>:
$$\begin{aligned} D_{\underline{x}} g - D_0 g = &\left[\Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x}+\underline{h}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{x}+\underline{h})\right] \\ &- \left[\Delta_{\underline{u}} Df(\underline{x}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{x})\right] \\ &- \left[\Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{h})\right] \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ sei nun $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ so gewählt, daß für $\underline{e} \in \mathbb{B}_{2\delta}(0)$ gilt

$$\| \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{e}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{e}) \|_{op} \le \frac{1}{4} \varepsilon \|\underline{e}\|$$

Dann ist für $\underline{h}, \underline{k} \in \mathbb{B}_\delta(0)$ wegen

$\underline{x} \in [0, \underline{h}]$ auch $\underline{x}, \underline{x} + \underline{k} \in \mathbb{B}_{2\delta}(0)$. Also gilt:

$$\| D_{\underline{x}} g - D_0 g \|_{op} \le \frac{3}{4} \varepsilon \left[\|h\| + \|\underline{k}\| \right]$$

Damit folgt

$$(\bullet) \qquad \| \underbrace{\Delta_{\underline{u}}^{(2)} f(\underline{h}, \underline{k})}_{g(\underline{k}) - g(0)} - \underbrace{\left(\Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h})\right)(\underline{k})}_{D_0 g(\underline{k})} \| \le \|\underline{k}\| \frac{3}{4} \varepsilon \left[\|h\| + \|\underline{k}\| \right]$$

Nun verkleinern wir nötigenfalls δ und erreichen, daß überdies gilt:

$$\| \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h}) - D_{\underline{u}} Df(\underline{h}) \|_{op} \le \frac{1}{4} \varepsilon \|\underline{h}\|$$

also

$$(\bigstar) \qquad \| \Delta_{\underline{u}} Df(\underline{h}, \underline{k}) - D_{\underline{u}}^{(2)} f(\underline{h}, \underline{k}) \| \le \frac{1}{4} \varepsilon \|\underline{h}\| \|\underline{k}\|$$

Mit Dreiecksungleichung folgt aus $(\bullet)$ und $(\bigstar)$ wie versprochen:

$$\| \Delta_{\underline{u}}^{(2)} f(\underline{h}, \underline{k}) - D_{\underline{u}}^{(2)} f(\underline{h}, \underline{k}) \| \le \varepsilon \left[\|\underline{h}\| + \|\underline{k}\| \right]^2 \qquad \blacksquare$$

Kor: $D^{(2)}_{\underline{u}} f : E \times E \to F$ ist symmetrisch:

$$D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) = D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h})$$

Bew: Seien $\underline{h}, \underline{k} \in E$ beliebig. Da $\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f$ symmetrisch ist, gilt zunächst

$$\begin{aligned} D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h}) &= \\ &= \left[\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h})\right] \\ &\quad - \left[\Delta^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k})\right] \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta > 0$, so daß für $t \in (-\delta, \delta)$ gilt:

$$\| D^{(2)}_{\underline{u}} f(t\underline{h}, t\underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(t\underline{k}, t\underline{h}) \| \le \varepsilon \left[\|t\underline{h}\| + \|t\underline{k}\| \right]^2$$

$$(*) \quad \cancel{t^2} \| D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h}) \| \le \varepsilon \cancel{t^2} \left[\|\underline{h}\| + \|\underline{k}\| \right]^2$$

Da $(*)$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\| D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h}, \underline{k}) - D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{k}, \underline{h}) \| = 0 \qquad \boxtimes$$

Kor: $f : U \to F$ k-fach differenzierbar.

Dann ist für jedes $\underline{y} \in U$

$$D^{(k)}_{\underline{y}} f : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$$

eine symmetrische multilineare Abbildung.

Bew: Sei

$$\mathcal{B}_n(E;F) := \left\{ \varphi : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n} \to F \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ linear im} \\ \text{jedem Argument} \\ \text{und stetig} \end{array} \right\}$$

Insbesondere ist $B_1(E;F) = B(E;F)$

und $B_2(E;F) = BB(E \times E; F)$.

Nun ist

$$B(E; B_{n-1}(E;F)) = B_n(E;F)$$

und darum können wir die höheren Ableitungen als Abbildungen

$$D^n f : U \to B_n(E;F)$$

auffassen.

Zur Symmetrie:

Wir schreiben

$$D_*^k f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$$

für die Abbildung $\underline{v} \mapsto D_{\underline{v}}^k f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$

Dann ist

$$D_{\underline{u}}^{k+1} f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{k+1}) = D_{\underline{u}} \left(D_*^k(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)\right) (\underline{e}_{k+1})$$

dies verwendet Aufgabe (7.8) aus dem Steinbruch

!

Damit erhalten wir

nicht gut

$$D_{\underline{u}}^n f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n) =$$

$$= D_{\underline{u}}^{n-i-2}\left(D_*^2\left(D_*^{i-1} f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1})\right)(\underline{e}_i, \underline{e}_{i+1})\right)(\underline{e}_{i+2}, \dots, \underline{e}_n)$$

$$= D_{\underline{u}}^{n-i-2}\left(D_*^2\left(D_*^{i-1} f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1})\right)(\underline{e}_{i+1}, \underline{e}_i)\right)(\underline{e}_{i+2}, \dots, \underline{e}_n)$$

$$= D_{\underline{u}}^n f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i+1}, \underline{e}_i, \dots, \underline{e}_n)$$

Also ist $D_{\underline{u}}^n f$ invariant unter Tausch benachbarter Argumente. Durch Nachbartausch läßt sich aber jede Permutation realisieren. $\boxtimes$

Zur Symmetrie

$$D^{(n)}_{\underline{u}} f = D^{(i)}_{\underline{u}} \; D^{(2)} \, D^{(n-i-2)} f$$

$$\in \mathcal{B}_i(E; BSym_2(E; B_{n-i-2}(E;F)))$$

$$= \left\{ \varphi : E^n \to F \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi: n\text{-fach multilin} \\ \varphi: \text{beschränkt} \\ \varphi: \text{inv. unter Tausch} \\ \quad \text{der Argumente } i+1 \\ \quad \text{und } i+2 \end{array} \right\}$$

Notation mit Argumenten

$$D^{(n)}_{\underline{u}} f(e_1, \dots, e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n) =$$

$$= D^{(i)}_{\underline{u}}(D^{(n-i)} f)(e_1, \dots, e_i)(e_{i+1}, \dots, e_n)$$

$$= D^{(i)}_{\underline{u}}(D^{(2)} D^{(n-i-2)} f)(e_1, \dots, e_i)(e_{i+1}, e_{i+2})(e_{i+3}, \dots, e_n)$$

$$= D^{(i)}_{\underline{u}}(D^{(2)} D^{(n-i-2)} f)(e_1, \dots, e_i)(e_{i+2}, e_{i+1})(e_{i+3}, \dots, e_n)$$

$$= D^{(n)}_{\underline{u}} f(e_1, \dots, e_i, e_{i+2}, e_{i+1}, e_{i+3}, \dots, e_n)$$

besser, weil ohne $*$

Also: $D^{(n)}_{\underline{u}} f$ ist symmetrisch in je zwei benachbarten Argumenten.

Aber: Jede Reihenfolge von Argumenten läßt sich durch Tauschen benachbarter Argumente herstellen. $\boxtimes$

<u>Bem</u> (höhere Ableitungen sind kompliziert ☺)

<u>Beob:</u> $\boxtimes : \mathcal{B}(E;F) \times E \longrightarrow F$

$$(\varphi, \underline{h}) \longmapsto \varphi \boxtimes h := \varphi(\underline{h})$$

ist bilinear und beschränkt.

$\ulcorner$ $(\lambda\varphi + \mu\psi)(\underline{h}) = \lambda\varphi(\underline{h}) + \mu\psi(\underline{h})$

$\varphi(\alpha\underline{h} + \beta\underline{k}) = \alpha\varphi(\underline{h}) + \beta\varphi(\underline{k})$

$\|\varphi(\underline{h})\| \leq 1 \|\varphi\|_{op} \|\underline{h}\|$ $\lrcorner$

Betrachte nun die Ableitung Df als Funktion in <u>zwei</u> Argumenten:

$$g : U \times E \longrightarrow F$$
$$(\underline{u}, \underline{h}) \longmapsto D_{\underline{u}}f(\underline{h})$$

<u>Frage</u>: Wenn f zweifach differenzierbar ist, ist g dann differenzierbar? Wenn ja, was ist Dg?

$pr_1 : E \oplus E \to E$, $\begin{pmatrix} \underline{h} \\ \underline{k} \end{pmatrix} \mapsto \underline{h}$ $\qquad$ $pr_2 : E \oplus E \to E$, $\begin{pmatrix} \underline{h} \\ \underline{k} \end{pmatrix} \mapsto \underline{k}$

linear, beschränkt, differenzierbar

$D_{\binom{\underline{h}}{\underline{k}}} pr_1 = pr_1$ $\qquad$ $D_{\binom{\underline{h}}{\underline{k}}} pr_2 = pr_2$

$$g\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix} = D_{pr_1\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}} f\left(pr_2\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(Df\circ pr_1\right)\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix} \boxtimes pr_2\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}$$

Ketten- und Produktregel:

g ist differenzierbar, wenn

Df differenzierbar ist

$$D_{\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}} g\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix} = D_{\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}}(Df\circ pr_1)\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix} \boxtimes pr_2\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix} +$$

$$+ \left(Df\circ pr_1\right)\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix} \boxtimes D_{\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}} pr_2\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix}$$

$$= D_{\underline{u}} Df\left(D_{\begin{pmatrix}\underline{u}\\\underline{h}\end{pmatrix}} pr_1\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix}\right) \boxtimes \underline{h} + D_{\underline{u}} f \boxtimes pr_2\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix}$$

$$= D_{\underline{u}} Df(\underline{k}_1) \boxtimes \underline{h} + D_{\underline{u}} f \boxtimes \underline{k}_2$$

$$= D^{(2)}_{\underline{u}} f(\underline{h})(\underline{k}_1) + D_{\underline{u}} f(\underline{k}_2)$$

$$= \begin{pmatrix} D_{\underline{u}} Df(\underline{h}) & D_{\underline{u}} f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{k}_1\\\underline{k}_2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} D_{\underline{u}} f(\underline{h}) = D_{\underline{u}}(Df)(\underline{h}) \in \mathcal{B}(E;F)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{h}} D_{\underline{u}} f(\underline{h}) = D_{\underline{u}} f \in \mathcal{B}(E;F)$$

Integration vektorwertiger Funktionen

F: Banachraum

$I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall

$f: I \to F$ Kurve in F

Ziel: Definiere $\int_a^b f(t)\,dt$.

Bem: Für $F = \mathbb{R}^n$ „wissen" wir schon, was rauskommen soll:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 : I \to F \\ \vdots \\ f_n : I \to F \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten-funktionen}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)\,dt \end{pmatrix}$$

f integrierbar $:\Longleftrightarrow$ alle f_i integrierbar

So haben wir das Problem in der Analysis I behandelt.

Also: Was tun für andere Banachräume F?

Das Cauchy-Integral

Def: Eine Treppenfunktion ist eine Abbildung $f: I \to F$, wenn es eine Unterteilung $\mathfrak{U} = (a_0 < a_1 < \dots < a_n)$ von I gibt, so daß f konstant ist auf den Unterteilungsstücken (a_i, a_{i+1}):

$$\exists\, x_i \in (a_i, a_{i+1})\ \forall t \in (a_i, a_{i+1}) : f(t) = f(x_i)$$

Wir sagen, die Unterteilung $\mathfrak{U}$ bezeuge, daß f eine Treppenfunktion ist.

Mithilfe des Zeugen $\mathfrak{U}$ definieren wir das Integral

$$\int_I f := \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, f(x_i) \quad \text{mit } x_i \in (a_{i-1}, a_i)$$

Bem: Genau wie in Analysis I beobachtet man, daß das Integral sich bei Verfeinerung der Unterteilung nicht ändert.

Da je zwei Unterteilungen eine

gemeinsame Verfeinerung haben folgt die Wohldefiniertheit des Integrals für Treppenfunktionen.

Notation: $\mathcal{T}(I;F) = \{f : I \to F \mid f : \text{Treppenfunktion}\}$

Bem: Das Integral definiert eine Funktion

$$\int : \mathcal{T}(I;F) \to \mathbb{R}.$$
$$f \longmapsto \int_I f$$

Def: Sei X eine Menge. Eine Abbildung $f : X \to F$ heißt beschränkt, wenn $\{\|f(t)\| \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

$$\mathcal{L}^\infty(X;F) := \{f : I \to F \mid f : \text{beschränkt}\}$$

Bem: Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\| \mid t \in X\}$$

wird eine Norm (<u>Supremumsnorm</u>)

auf $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ definiert.

Jede Treppenfunktion ist beschränkt.

Linearkombinationen von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Also:

$$\mathcal{T}(I;F) \leq \mathcal{L}^\infty(I;F) \text{ ist}$$

ein Untervektorraum.

Da eine Treppenfunktion nur endlich viele Werte annimmt ist das Supremum hier ein Maximum:

$$\|f\|_\infty = \max\{f(t) \mid t \in I\}$$

für $f \in \mathcal{T}(I;F)$

Programm:

Satz: $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ ist vollständig.

Satz: Jede stetige Funktion $f: I \to F$ ist Limes in $\mathcal{L}^\infty(I;F)$ einer Cauchyfolge in $\mathcal{T}(I;F)$.

⌈ Insbesondere: $\mathcal{T}(I;F)$ ist nicht abgeschlossen. ⌋

Prop: Sind f_* und g_* zwei Folgen in $\mathcal{T}(I;F)$ so gilt:

$$f_* \parallel g_* \Rightarrow \int_I f_* \parallel \int_I g_*$$

Kor: Ist f_* Cauchyfolge in $\mathcal{T}(I;F)$, so ist $\int_I f_*$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.

⌈ f_* Cauchyfolge

$$\Leftrightarrow f_* \parallel f_* \Rightarrow \int_I f_* \parallel \int_I f_*$$

$$\Leftrightarrow \int_I f_* \text{ Cauchyfolge}$$ ⌋

Def: $f \in \mathcal{L}^\infty(I;F)$ heißt Cauchy-integrierbar, wenn $f = \lim\limits_{*} f_*$ für eine Folge von Treppenfunktionen ist.

In diesem Fall setzen wir

$$\int_I f := \lim_{*} \int_I f_*$$

⌜Existenz: $\int_I f_*$ ist Cauchyfolge und darum konvergent.

Unabhängigkeit von der Wahl der Folge f_*:

ist $f = \lim f_* = \lim g_*$

$$\Rightarrow \quad f_* \parallel g_*$$

$$\underset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \quad \int_I f_* \parallel \int_I g_*$$

$$\Rightarrow \quad \lim \int_I f_* = \lim \int_I g_*$$

⌟

Lemma: Seien f_* und g_* zwei Folgen in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$, die bez. $\|\cdot\|_\infty$ Cauchy-parallel sind. Zeige, daß für jedes $x \in X$ die Folgen von Vektoren $f_*(x)$ und $g_*(x)$ Cauchy-parallel $\Big($$\underbrace{\text{und damit kokonvergent}}_{F:\ \text{vollständig}}$$\Big)$ sind.

Bew: Sei $x \in X$ beliebig. Wir rechnen:

$$f_* \parallel g_*$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall i,j \geq N : \|f_i - g_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$\ulcorner \|f_i - g_j\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_i(x) - g_j(x)\| \lrcorner$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall i,j \geq N : \|f_i(x) - g_j(x)\| < \varepsilon \quad \boxtimes$$

Satz: $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ ist ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.

Bew: Sei f_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$. Unsere erste Aufgabe ist, eine Grenzfunktion zu erraten. Das Lemma hilft: Für jedes $x \in X$ ist $f_*(x)$

eine Cauchyfolge. Definiere

$$f(x) := \lim f_*(x)$$

<u>Beh:</u> $f \in L^\infty(X; F)$

<u>Beh:</u> $f = \lim f_*$

Lemma: Seien f_* und g_* zwei Folgen in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$, die bez. $\|\cdot\|_\infty$ Cauchy-parallel sind. Zeige, daß für jedes $x \in X$ die Folgen von Vektoren $f_*(x)$ und $g_*(x)$ Cauchy-parallel $\underbrace{\text{(und damit kokonvergent}}_{F:\text{ vollständig}})$ sind.

Bew: Sei $x \in X$ beliebig. Wir rechnen:

$$f_* \parallel g_*$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall i, j \geq N : \|f_i - g_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$\ulcorner \|f_i - g_j\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_i(x) - g_j(x)\| \lrcorner$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall i, j \geq N : \|f_i(x) - g_j(x)\| < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

Satz: $\mathcal{L}^\infty(X;F)$ ist ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.

Bew: Sei f_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^\infty(X;F)$. Unsere erste Aufgabe ist, eine Grenzfunktion zu erraten. Das Lemma hilft: Für jedes $x \in X$ ist $f_*(x)$

eine Cauchyfolge. Definiere

$$f(x) := \lim f_*(x)$$

<u>Beh:</u> $f \in L^\infty(X; F)$

<u>Beh:</u> $f = \lim f_*$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, daß gilt:

$$\forall i,j \geq N : \quad \|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \ \forall i,j \geq N : \quad \|f_i(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/2$$

$$\overset{j \to \infty}{\Rightarrow} \forall x \in X \ \forall i \geq N : \quad \|f_i(x) - f(x)\| \leq \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad 1) \ \|f(x)\| \leq \|f_i(x)\| + \varepsilon/2 \leq \|f_i\|_\infty + \varepsilon$$

also: f ist beschränkt

$$2) \ \|f_i - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

also $f = \lim f_*$ $\boxtimes$

Satz: Sei Y ein metrischer Raum.
Für eine Teilmenge $X \subseteq Y$ sind äquivalent:

1a) X ist folgenkompakt.
⌜Jede Folge x_* in X hat eine Teilfolge, die gegen einen Punkt in X konvergiert.⌟

1b) X ist abzählbar kompakt
⌜Jede Folge x_* in X hat einen Häufungspunkt in X.⌟

2) X ist kompakt.
⌜Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.⌟

Bew: $1a \Rightarrow 1b$

Hat eine Folge eine konvergente Teilfolge mit Limes in X, so ist dieser Limes ein Häufungspunkt der Folge.

1b ⇒ 1a:

Sei x_* eine Folge und $x \in X$ Häufungspunkt. Dann gibt es eine Teilfolge x_{i_*} mit

$$x_{i_j} \in \mathbb{B}_{\frac{1}{j+1}}(x)$$

Dann ist x Grenzwert dieser Teilfolge.

nicht 1 ⇒ nicht 2:

Sei a_* eine Folge in X ohne Häufungspunkt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \ni x$, die nur endlich viele Folgenglieder enthält. Insbesondere kann eine Vereinigung endlich vieler solcher Umgebungen U_x nicht alle (d.h. insbesondere unendlich viele) Folgenglieder a_i enthalten. Also ist $\{U_x \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

nicht 2 $\Rightarrow$ nicht 1:

Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

Für $\varepsilon > 0$ setze

$$V(\varepsilon) := \bigcup \{ \mathbb{B}_\varepsilon(y) \mid \exists U \in \mathcal{U} : \mathbb{B}_{2\varepsilon}(y) \subseteq U \}$$

Bem: $V(\varepsilon)$ ist offen als Vereinigung offener Mengen.

Jeder Punkt $x \in X$ liegt in einem $U \in \mathcal{U}$. Da U offen ist, gibt es also $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Somit: $\boxed{X \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} V(\varepsilon)}$

Fall 1: $\forall \varepsilon > 0 : X \not\subseteq V(\varepsilon)$

Dann gibt es eine Nullfolge

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$$

und Punkte

$$x_0 \in V(\varepsilon_0)$$
$$x_1 \in V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_0)$$
$$x_2 \in V(\varepsilon_2) - V(\varepsilon_1)$$
$$\vdots$$

Für $x \in X$ gibt es ein $V(\varepsilon_i)$ mit $x \in V(\varepsilon_i)$. Da die offene Menge $V(\varepsilon_i)$ nur endl. viele Folgenglieder enthält, ist x kein Häufungspunkt.

<u>Fall 2:</u> $\exists\ \varepsilon > 0 : \quad X \subseteq V(\varepsilon)$

<u>Bem:</u> $V(\varepsilon) = \bigcup \{ \mathbb{B}_\varepsilon(x) \mid \mathbb{B}_{2\varepsilon}(x) \subseteq U \in \mathcal{U} \}$

<u>d.h.</u> Zu jedem $v \in V(\varepsilon) = X$ existiert $y \in Y$ und $U \in \mathcal{U}$ mit

$$v \in \mathbb{B}_\varepsilon(y) \quad \text{und} \quad \mathbb{B}_{2\varepsilon}(y) \subseteq U$$

Also insbesondere $\mathbb{B}_\varepsilon(v) \subseteq U$!!

<u>Nun:</u> Zu $x_0 \in X$ gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U_0$.

$X \not\subseteq U_0$. Also gibt es $x_1 \in X - U_0$ und $U_1 \in \mathcal{U}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(x_1) \subseteq U_1$.

$X \not\subseteq U_0 \cup U_1$. Also gibt es $x_2 \in X - U_0 - U_1$ und $U_2 \in \mathcal{U}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(x_2) \subseteq U_2$.

Wegen $\mathbb{B}_\varepsilon(x_i) \subseteq U_i$ und

$$x_{n+1} \notin U_0 \cup \dots \cup U_n$$

ist $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon \quad \forall i \leq n$.

Darum hat x_n keine Teilfolge, die Cauchyfolge ist. $\boxtimes$

Kor: Ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist kompakt: jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

<u>Anwendung</u>: Sei $g: I \to F$ stetig und $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in I$ gibt es $\delta_t > 0$ mit $g(I \cap \mathbb{B}_{\delta_t}(t)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(g(t))$.

Dann ist $\{\mathbb{B}_{\delta_t}(t) \mid t \in I\}$ eine offene Überdeckung, aus der eine endliche Teilüberdeckung

$$I \subseteq \mathbb{B}_1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_n$$

ausgewählt werden kann.

Wir können also eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

von $I = [a,b]$ finden, so daß jedes Unterteilungsstück in einem $\mathbb{B}_i$ liegt.

Damit gibt es eine Treppenfunktion, die in der Supremumsnorm ε-nahe bei g liegt.

<u>Kor</u>: Jede stetige Funktion $g: I \to F$ liegt im $\overline{\mathcal{J}}(I;F)$ und ist Cauchy-integrierbar.

Beob: Für zwei Treppenfunktionen

$$f, g : [a,b] \to F$$

und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Bew: Die Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

sei Zeuge für f <u>und</u> g. Dann ist sie auch Zeuge für $\alpha f + \beta g$ und es ist mit $t_i \in (a_{i-1}, a_i)$:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(t_i)(a_i - a_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^n g(t_i)(a_i - a_{i-1})$$

$$= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Kor (Linearität des Integral)

Für Cauchy-integrierbare Funktionen

$$f, g : [a,b] \to F$$

und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

<u>Bew:</u> Seien f_* und g_* Cauchyfolgen von Treppenfunktionen mit

$$f_* \to f \quad \text{und} \quad g_* \to g$$

Dann konvergiert $\alpha f_* + \beta g_*$ gegen $\alpha f + \beta g$ und es ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \lim \int_a^b (\alpha f_* + \beta g_*) \\
&= \lim \alpha \int_a^b f_* + \beta \int_a^b g_* \\
&= \alpha \lim \int_a^b f_* + \beta \lim \int_a^b g_* \\
&= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Beob Für Treppenfunktionen

$$f, g : [a,b] \to F$$

gilt:

$$(*) \qquad \|f-g\|_\infty \leq \varepsilon \implies \left\| \int_a^b f - \int_a^b g \right\| \leq (b-a)\,\varepsilon$$

⌜**Übung:** Folgere, daß (*) für beliebige Cauchy-integrierbare Funktionen gilt.⌟

Bew: Mit $h := f-g$ und der Linearität des Integral ist zu zeigen:

$$\|h\|_\infty \leq \varepsilon \implies \left\| \int_a^b h \right\| \leq \varepsilon$$

Das folgt mit der Dreiecksungleichung. Sei nämlich die Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

ein Zeuge für h, so ist

$$\left\| \int_a^b h \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n h(t_i)(a_i - a_{i-1}) \right\| \qquad t_i \in (a_{i-1}, a_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|h_i(t_i)\| \, (a_i - a_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon\,(b-a) \qquad \boxtimes$$

Stammfunktionen

Def: I: Intervall (offen, abg, ... egal)

$f: I \to F$ Cauchy-integrierbar auf jedem $[a,b] \subseteq I$

Eine Funktion $g: I \to F$ heißt unbestimmtes Integral von f, wenn für jedes $[a,b] \subseteq I$ gilt

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Ist I offen und $g: I \to F$ auf I differenzierbar, so nennen wir g eine Stammfunktion von f, wenn $f = g'$ ist.

Hauptsatz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f: I \to F$ stetig. Dann sind für eine Funktion $g: I \to F$ äquivalent:

1) g ist unbestimmtes Integral von f.

2) g ist Stammfunktion von f.

Bew: **1 ⟹ 2:** Sei g unbestimmtes Integral,

d.h.: $$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \quad \forall\, a,b \in I$$

Wir zeigen, daß g differenzierbar mit Ableitung f ist. Dazu beachte

$$g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad g(x+h) - g(x) - h f(x) = \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \; dt$$

Aber zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so daß für $t \in \mathbb{B}_\delta(x)$ gilt:

$$\| f(t) - f(x) \| < \varepsilon$$

Dann ist für $|h| < \delta$:

$$\| g(x+h) - g(x) - h f(x) \| \leq h\,\varepsilon$$

Das ist aber gerade die Bedingung linearer Approximierbarkeit: g ist differenzierbar mit $g'(x) = f(x)$.

<u>2 ⇒ 1:</u> Sei nun g differenzierbar mit $g' = f$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\tilde{f} : [a,b] \to F$ eine Treppenfunktion mit $\| f|_{[a,b]} - \tilde{f} \|_\infty < \varepsilon$.

Dann ist zunächst

$$(\star) \quad \left\| \int_a^b f - \int_a^b \tilde{f} \right\| < (b-a)\,\varepsilon$$

Sei $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ ein Zeuge dafür, daß $\tilde{f}$ eine Treppenfunktion ist. Sei ferner $x_i \in (a_{i-1}, a_i)$. Dann ist

$$g(b) - g(a) - \int_a^b \tilde{f} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(a_i) - g(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})\, \tilde{f}(x_i)$$

Mit dem Mittelwertsatz ist

$$\| g(a_i) - g(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})\, f(x_i) \| \leq$$

$$\leq (a_i - a_{i-1}) \sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} \| f(t) - f(x_i) \|$$

$$\leq 2\varepsilon\, (a_i - a_{i-1})$$

Also

$$\left\| g(b) - g(a) - \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(x_i) \right\| < 2\varepsilon(b-a)$$

Nun ist $\|\tilde{f}(x_i) - f(x_i)\| < \varepsilon$. Also:

$$\left\| \int_a^b \tilde{f} - \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(x_i) \right\| < \varepsilon(b-a)$$

Dreiecksungleichung:

$$(*) \quad \left\| g(b) - g(a) - \int_a^b \tilde{f} \right\| < 3\varepsilon(b-a)$$

Aus $(*)$ und $(\bigstar)$ folgt:

$$\left\| g(b) - g(a) - \int_a^b f \right\| \leq 4\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \square$$

Der Satz von Taylor

$\boxtimes : E \times F \to G$ stetig, bilinear

$g: I \to E$, $h: I \to F$ $k+1$ mal stetig differenzierbar

$g'(t) := (D_t g)(1)$ $h'(t) := (D_t h)(1)$

$g' : I \to E$ $h' : I \to F$

Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(g(t) \boxtimes h(t)) = g'(t) \boxtimes h(t) + g(t) \boxtimes h'(t)$$

Damit:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k-i)}(t)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left[g^{(i+1)}(t) \boxtimes h^{(k-i)}(t) + g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k+1-i)}(t)\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k+1-i)}(t) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i g^{(i)}(t) h^{(k+1-i)}(t)$$

$$= g(t) \boxtimes h^{(k+1)}(t) - (-1)^{k+1} g^{(k+1)}(t) \boxtimes h(t)$$

Der Satz von Taylor

$\boxtimes : E \times F \to G$ stetig, bilinear

$g : I \to E$, $h : I \to F$ $k+1$ mal stetig differenzierbar

$g'(t) := (D_t g)(1)$ $h'(t) := (D_t h)(1)$

$g' : I \to E$ $h' : I \to F$

Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(g(t) \boxtimes h(t)) = g'(t) \boxtimes h(t) + g(t) \boxtimes h'(t)$$

Damit:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k-i)}(t)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left[g^{(i+1)}(t) \boxtimes h^{(k-i)}(t) + g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k+1-i)}(t)\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k+1-i)}(t) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i g^{(i)}(t) h^{(k+1-i)}(t)$$

$$= g(t) \boxtimes h^{(k+1)}(t) - (-1)^{k+1} g^{(k+1)}(t) \boxtimes h(t)$$

Anwenden mit $\boxtimes : \mathbb{R} \times F \to F$

$(\lambda, \underline{v}) \mapsto \lambda v$

$$g : t \longmapsto \frac{(x-t)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\vdots$$

$$g^{(i)}(t) = (-1)^i \frac{(x-t)^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$g^{(k)}(t) = (-1)^k$$

$$g^{(k+1)}(t) = 0 \qquad\qquad \underset{o}{\nabla}$$

<u>Also:</u> $$\frac{(x-t)^k}{k!} h^{(k+1)}(t) =$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i g^{(i)}(t) \boxtimes h^{(k-i)}(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} g^{(k-j)}(t) \boxtimes h^{(j)}(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-t)^j}{j!} h^{(j)}(t)$$

<u>Also:</u> $$\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} h^{(k+1)}(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{(x-t)^j}{j!} h^{(j)}(t)\right]_a^x$$

$$= h(x) - h(a) - \frac{x-t}{1} h'(a) - \frac{(x-t)^2}{2!} h''(a) - \dots - \frac{(x-t)^k}{k!} h^{(k)}(a)$$

Satz Ist $h : I \to F$ $k+1$ mal stetig differenzierbar, so ist für $x, a \in I$:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$$

Nun: $U \subseteq E$ offen E, F: Banach

$f : U \to F$ $k+1$ mal stetig differenzierbar

Wende Taylor auf $h : t \mapsto f(\underline{u} + t\underline{h})$ an:

Mit Kettenregel ist

$$h'(t) = D_{\underline{u}+t\underline{h}} f(\underline{h})$$

$$h''(t) = D^{(2)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f(\underline{h}, \underline{h})$$

$$\vdots$$

$$h^{(k)}(t) = D^{(k)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f[\underline{h}]^k$$

$$[\underline{h}]^k = (\underbrace{\underline{h}, \dots, \underline{h}}_{k \text{ mal}})$$

Bem: $h'(t) = \left(D_{\underline{u}+t\underline{h}} f\right)(\underline{h})$

$\underline{h}$: innere Ableitung

$D_{\underline{u}+t\underline{h}}$: äußere Ableitung

$h''(t) = D^{(2)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f(\underline{h}, \underline{h})$

$\underline{h}$: innere Ableitung

$D^{(2)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f(\underline{h}, *)$: äußere Ableitung

Und:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} h^{(k+1)}(t)\, dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{(k+1)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f[\underline{h}]^k\, dt$$

Allgemeiner Taylorscher Satz:

Seien E und F Banachräume. $U \subseteq E$ sei offen, die Strecke $[\underline{u}, \underline{u}+\underline{h}]$ sei ganz in U enthalten. Sei ferner

$$f : U \to F$$

$k+1$ mal auf ganz U stetig differenzierbar.

Dann ist mit $[\underline{h}]^i = (\underbrace{\underline{h}, \ldots, \underline{h}}_{i \text{ mal}})$

$$f(\underline{u}+\underline{h}) = f(\underline{u}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k!} D_{\underline{u}}^{(i)} f[\underline{h}]^i \quad + R_{k+1}$$

mit dem Restglied:

$$R_{k+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D_{\underline{u}+t\underline{h}}^{(k+1)} f[\underline{h}]^{k+1} \, dt \qquad \square$$

Prop: Seien E und F Banachräume, $U \subseteq E$ sei offene Umgebung des Punktes $\underline{y} \in U$. Die Funktion $f: U \to F$ sei k mal stetig differenzierbar. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $\mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \subseteq U$, so daß für $|\underline{h}| < \delta$ gilt:

$$\left\| f(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D_{\underline{y}}^{(i)} f[\underline{h}]^i \right\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|^k$$

Also: Die Taylorentwicklung ist an der Stelle $\underline{y}$ eine Approximation höherer als k-ter Ordnung.

In der o-Notation heißt das:

$$f(\underline{y}+\underline{h}) = f(\underline{y}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D_{\underline{y}}^{(i)} f[\underline{h}]^k + o(\|\underline{h}\|^k)$$

<u>Notation:</u> $f : \mathbb{B}_\delta(0) \to F$. Wir sagen

$$f(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^k)$$

wenn

$$\underline{h} \mapsto \frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|^k}$$

an der Stelle $\underline{h} = 0$ durch $0 \in F$ stetig fortgesetzt wird:

$$\frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|^k} \to 0 \quad \text{für} \quad \underline{h} \to 0$$

Allgemeiner Taylorscher Satz:

Seien E und F Banachräume. $U \subseteq E$ sei offen, die Strecke $[\underline{u}, \underline{u}+\underline{h}]$ sei ganz in U enthalten. Sei ferner

$$f : U \to F$$

$k+1$ mal auf ganz U stetig differenzierbar.

Dann ist mit $[\underline{h}]^i = (\underbrace{\underline{h}, \dots, \underline{h}}_{i \text{ mal}})$

$$f(\underline{u}+\underline{h}) = f(\underline{u}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k!} D_{\underline{u}}^{(i)} f[\underline{h}]^i + R_{k+1}$$

mit dem Restglied:

$$R_{k+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D_{\underline{u}+t\underline{h}}^{(k+1)} f[\underline{h}]^{k+1} \, dt \qquad \square$$

Übung: Seien $E, F, U, f, \underline{u}$ und $\underline{h}$ wie im Taylorschen Satz. Zeige:

$$R_{k+1} \leq \left(\sup_{\underline{v} \in [\underline{u}, \underline{u}+\underline{h}]} \left\| D_{\underline{v}}^{(k+1)} f[\underline{h}]^{k+1} - D_{\underline{u}}^{(k+1)} f[\underline{h}]^{k+1} \right\| \right) \frac{\|\underline{h}\|^k}{k!}$$

Übung:

$$f : I \to \mathcal{B}(E;F)$$
$$t \mapsto f_t$$

$$\left(\int_I f\right)(\underline{e}) = \int_I f_t(\underline{e})\, dt$$

Bew: gilt für Treppenfunktionen

Notation: $f : B_\delta(0) \to F$. Wir sagen

$$f(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^k)$$

wenn

$$\underline{h} \mapsto \frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|^k}$$

an der Stelle $\underline{h} = 0$ durch $0 \in F$ stetig fortgesetzt wird:

$$\frac{f(h)}{\|\underline{h}\|^k} \to 0 \text{ für } \underline{h} \to 0$$

Prop: Seien E und F Banachräume, $U \subseteq E$ sei offene Umgebung des Punktes $\underline{y} \in U$. Die Funktion $f: U \to F$ sei k mal stetig differenzierbar. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $\mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \subseteq U$, so daß für $\|\underline{h}\| < \delta$ gilt:

$$\left\| f(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D^{(i)}_{\underline{y}} f[\underline{h}]^i \right\| \leq \varepsilon \|\underline{h}\|^k$$

Also: Die Taylorentwicklung ist an der Stelle $\underline{y}$ eine Approximation höherer als k-ter Ordnung.

In der o-Notation heißt das:

$$f(\underline{y}+\underline{h}) = f(\underline{y}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D^{(i)}_{\underline{y}} f[\underline{h}]^k + o(\|\underline{h}\|^k)$$

Bew: Wegen $[\underline{y}, \underline{y}+\underline{h}] \subseteq \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \subseteq U$ können wir den Taylorschen Satz anwenden. Bloß bei der Differenzierbarkeitsordnung müssen wir aufpassen. Wir erhalten:

$$f(\underline{y}+\underline{h}) = f(y) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} D_{\underline{y}}^{(i)} f[\underline{h}]^i + R_k$$

$$= f(y) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D_{\underline{y}}^{(i)} f[\underline{h}]^i + R_k - \frac{1}{k!} D_{\underline{y}}^{(k)} f[\underline{h}]^k$$

Also:

$$f(\underline{y}+\underline{h}) - f(\underline{y}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D_{\underline{y}}^{(i)} f[\underline{h}]^i = R_k - \frac{1}{k!} D_{\underline{y}}^{(k)} f[\underline{h}]^k$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D_{\underline{y}+t\underline{h}}^{(k)} f[\underline{h}]^k - \frac{1}{k!} D_{\underline{y}}^{(k)} f[\underline{h}]^k \, dt$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt = \frac{1}{k!}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(D_{\underline{y}+t\underline{h}}^{(k)} f[\underline{h}]^k - D_{\underline{y}}^{(k)} f[\underline{h}]^k \right) dt$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(D_{\underline{y}+t\underline{h}}^{(k)} f - D_{\underline{y}}^{(k)} f \right) dt \right)}_{\text{Integration in } \mathcal{B}(E;\mathcal{B}(E;\cdots;\mathcal{B}(E;F))\cdots)} [\underline{h}]^k$$

Nun wähle $\delta > 0$ so, daß für $\|\underline{h}\| < \delta$ gilt:

$$\left\| D_{\underline{y}+\underline{h}}^{(k)} f - D_{\underline{y}}^{(k)} f \right\|_{op} < \varepsilon$$

Mit $0 \le (1-t)^{k-1} \le 1$ für $t \in [0,1]$ folgt

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\| \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(D_{\underline{y}+t\underline{h}}^{(k)} f - D_{\underline{y}}^{(k)} f \right) \right\|_{op} < \varepsilon$$

Mit dem Mittelwertsatz schließen wir:

$$\left\| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left(D^{(k)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f - D^{(k)}_{\underline{u}} f\right) dt \right\|_{op} < \varepsilon$$

Und somit

$$\left\| R_k - \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\underline{u}} f[\underline{h}]^k \right\| =$$

$$= \left\| \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left(D^{(k)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f - D^{(k)}_{\underline{u}} f\right) dt \right) [\underline{h}]^k \right\|$$

$$\leq \left\| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left(D^{(k)}_{\underline{u}+t\underline{h}} f - D^{(k)}_{\underline{u}} f\right) dt \right\|_{op} \|\underline{h}\|^k$$

$$\leq \varepsilon \|\underline{h}\|^k$$

$\boxtimes$

Def: Sei $\langle -,- \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ eine symmetrische bilineare Abbildung.

Dann heißt

$$q : E \to \mathbb{R}$$
$$\underline{u} \mapsto \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle$$

die zugehörige quadratische Form.

Beob: $q(0) = \langle 0,0 \rangle = 0$

Die quadratische Form q / die Bilinearform $\langle -,- \rangle$ heißt

- positiv definit, wenn $q(\underline{h}) > 0$ für $\underline{h} \neq 0$
- positiv semidefinit, wenn $q(\underline{h}) \geq 0$ für $\underline{h} \neq 0$
- negativ definit, wenn $q(\underline{h}) < 0$ für $\underline{h} \neq 0$
- negativ semidefinit, wenn $q(\underline{h}) \leq 0$ für $\underline{h} \neq 0$
- indefinit, wenn $\exists\, \underline{u}, \underline{v} \neq 0$: $q(\underline{u}) < 0$ $q(\underline{v}) > 0$

<u>Prop:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für $\underline{u} \in U$ verschwinde die Ableitung $D_{\underline{u}} f : E \to \mathbb{R}$.

a) Ist die zweite Ableitung $D_{\underline{u}}^{(2)} f : E \times E \to \mathbb{R}$ positiv (negativ) definit, dann hat die Funktion f an der Stelle $\underline{u}$ ein isoliertes lokales Minimum (Maximum)

b) Ist die zweite Ableitung $D_{\underline{u}}^{(2)} f : E \times E \to \mathbb{R}$ indefinit, dann hat f an der Stelle $\underline{u}$ kein lokales Extremum.

<u>Bew:</u> a) Sei $q(\underline{h}) := D_{\underline{u}}^{(2)} f(\underline{h}, \underline{h})$ die zu $D_{\underline{u}}^{(2)} f$ gehörige positiv definite quadratische Form.

Dann ist $\underline{h} \mapsto \sqrt{q(\underline{h})}$ eine Norm. Auf $\mathbb{R}^m$ sind alle Normen äquivalent.

Darum ist $o(\|\underline{h}\|^2) = o(q(\underline{h}))$ und es ist

$$f(\underline{u} + \underline{h}) = f(\underline{u}) + \frac{1}{2} q(\underline{h}) + o(q(\underline{h}))$$
$$= f(\underline{u}) + q(\underline{h}) \left(\frac{1}{2} + g(\underline{h}) \right)$$

wobei $g: \mathbb{B}_\delta(0) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(0) = 0$ ist. Also ist $\frac{1}{2} + g(\underline{h}) > 0$ für kleine $\underline{h}$ und somit $f(\underline{u}+\underline{h}) - f(\underline{u}) = q(\underline{h})(1/2 + g(\underline{h})) > 0$ für kleine $\underline{h} \neq 0$. D.h. f hat an der Stelle $\underline{u}$ ein isoliertes lokales Minimum.

b) Übungsaufgabe. $\boxtimes$

Bem: $f: U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

$\Rightarrow f(\underline{u}+\underline{h}) = f(\underline{u}) + D_{\underline{u}}f(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|)$

Ist $D_{\underline{u}}f \neq 0$, so wächst/fällt $D_{\underline{u}}f(\underline{h})$ schneller als $o(\|\underline{h}\|)$.

Also: $D_{\underline{u}}f \neq 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle $\underline{u}$ kein Extremum.

Def: $\underline{u} \in U$ heißt kritischer Punkt, wenn $D_{\underline{u}}f = 0$ ist.

<u>Frage</u>: Wie stellt man fest, ob eine Bilinearform pos. def. ist?

Man schreibt die Bilinearform als quadratische Matrix (im Fall der zweiten Ableitung ist das die Hesse-Matrix).

<u>Kriterium</u>: pos. def. $\Leftrightarrow$ Alle Hauptminoren haben pos. Determinante

<u>Bsp</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Hauptminoren

Determinanten:

1   -1 -6 nicht pos. def

<u>Bem</u>: Es gibt weitere Kriterien:

- alle Eigenwerte reell (das ist bei symmetrischen Matrizen automatisch der Fall) <u>und positiv</u>.
- alternierende Vorzeichen der Koeffizienten im char. Polynom (mit Regeln für verschwindende Koeffizienten).

Bsp:
$$f_\pm : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 \pm y^2$$

$$D_{\binom{x}{y}} f_\pm = \begin{pmatrix} 2x & \pm 2y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D_{\binom{0}{0}} f_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{„\underline{kritische Punkt}"}$$

$$D^{(2)}_{\binom{x}{y}} f_\pm = \big((2 \;\; 0) \; (0 \; \pm 2) \big)$$

$$H_{\binom{x}{y}} f_\pm = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad D^{(2)}_{\binom{0}{0}} f_+$: pos. def $\Rightarrow$ Min bei $\binom{0}{0}$

$D^{(2)}_{\binom{0}{0}} f_-$: indefinit $\Rightarrow$ pos und neg. Werte bel. nahe bei $\binom{0}{0}$.

Vektorfelder und Integralkurven

$U \subseteq E$ offen E: Banachraum

Def: Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung

$$X : U \to E$$

Wir sprechen von stetigen, differenzierbaren, k mal (stetig) differenzierbaren und glatten Vektorfeldern (sind ja bloß Abbildungen).

Von besonderem Interesse sind Lipschitz-stetige Vektorfelder

⌜ $\exists L \; \forall \underline{u}, \underline{v} \in U$:

Lipschitz-Konstante

$$\| X(\underline{u}) - X(\underline{v}) \| \leq L \| \underline{u} - \underline{v} \|$$ ⌟

und lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder

⌜ Jeder Punkt $\underline{u} \in U$ hat eine offene Umgebung V, so daß $X|_V : V \to E$ Lipschitz-stetig ist. ⌟

Bem: Ist das Vektorfeld $X: U \to E$ ((lokal) Lipschitz-stetig, so ist X lokal beschränkt.

Bew: Sei L die Lipschitz-Konstante. Dann ist für $\underline{v} \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y}) \subseteq U$:

$$\begin{aligned}\|X(\underline{v})\| &\leq \|X(\underline{y})\| + \|X(\underline{v}) - X(\underline{y})\| \\ &\leq \|X(\underline{y})\| + L\,\|\underline{v} - \underline{y}\| \\ &\leq \|X(\underline{y})\| + \delta L\end{aligned}$$

Also ist X auf $\overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y})$ beschränkt durch $C := \|X(\underline{y})\| + \delta L$. $\boxtimes$

Def: Eine <u>Integralkurve</u> von X ist eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : I \to U \qquad (I \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall})$$

mit:

$$(*) \qquad \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in I$$

Bem: Für ein stetiges Vektorfeld X können wir (*) mit dem Hauptsatz äquivalent (!) schreiben als: $t_0 \in I$ fest

(o) $$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(\gamma(s))\,ds \quad \forall t \in I$$

Bem: Ist X stetig, so ist $\gamma' = X \circ \gamma$ stetig, also ist γ stetig differenzierbar. Ist X stetig differenzierbar, ist $\gamma' = X \circ \gamma$ stetig differenzierbar, also ist γ zweimal stetig differenzierbar.

...

Die Differenzierbarkeitsordnung einer Integralkurve ist besser als die des Vektorfeldes X; es sei denn, X ist glatt. Dann ist γ auch „bloß" glatt.

Satz (Picard-Lindelöf)

Sei X ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf U. Durch jeden Punkt $\underline{u} \in U$ läuft dann eine Integralkurve, d.h.:

$$\forall\, \underline{u} \in U \ \exists\, \varepsilon > 0,\ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U :$$

1) $\gamma(0) = \underline{u}$ ⌜ γ geht durch $\underline{u}$ ⌟

2) γ ist Integralkurve

Ferner sind Integralkurven lokal eindeutig bestimmt:

oBdA $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$

Sind $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ und $\tilde{\gamma} : [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}] \to U$ Integralkurven durch $\underline{u} = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, so gibt es $\eta > 0$ mit

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall\, t \in [-\eta, \eta]$$

Bew: Sei V eine offene Umgebung von $\underline{u}$, in der X Lipschitz-stetig mit Konstante L ist:

$$\| X(\underline{v}) - X(\underline{v}') \| \leq L \| \underline{v} - \underline{v}' \| \quad \forall \underline{v}, \underline{v}' \in V$$

Lokale Eindeutigkeit:

Seien $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V$ und $\tilde{\gamma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V$ zwei Integralkurven durch $\underline{u}$. Dann ist

$$\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) = \int_0^t X(\gamma(s)) - X(\tilde{\gamma}(s))\, ds$$

$$\leq |t| \sup_{s \in [0,t]} \| X(\gamma(s)) - X(\tilde{\gamma}(s)) \|$$

$$\leq |t| \; L \sup_{s \in [0,t]} \| \gamma(s) - \tilde{\gamma}(s) \|$$

Also

$$\sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \| \leq \varepsilon L \sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \|$$

Für $\boxed{\eta L < 1}$ impliziert das

$$\sup_{t \in [-\eta, \eta]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \| = 0$$

D.h.: $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall\, t \in [-\eta, \eta]$

Existenz von kurzen Integralkurven.

Ein kniffliges Problem liegt darin, $\varepsilon > 0$ so zu wählen, daß wir eine Chance haben, eine Integralkurve auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zu finden.

Wir werden ε falls nötig im Verlauf des Arguments verkleinern.

Da X stetig ist, gibt es $C > 0$ und $\delta > 0$, so daß $\overline{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})} \subseteq \mathbb{B}_{2\delta}(\underline{u}) \subseteq V$ ist und

$$\|X(\underline{v})\| < C \quad \text{für alle } \underline{v} \in \overline{\mathbb{B}_\delta}(\underline{u}) \subseteq \mathbb{B}_{2\delta}(\underline{u})$$

Dann folgt aus $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \overline{\mathbb{B}_\delta}(\underline{u})$:

$$\left\| \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \right\| < \varepsilon\, C \qquad \forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Forderung 1: $\varepsilon C < \delta$

Dann ist $\underline{u} + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \in \overline{\mathbb{B}_\delta}(\underline{u})$ für jedes $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma \text{ stetig} \\ \gamma(0) = \underline{y} \end{array} \right\}$$

mit der Metrik

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) := \sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \|$$

Wir definieren:

$$\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$\gamma \mapsto \underbrace{\left(t \mapsto \underline{y} + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds \right)}_{\Psi_\gamma}$$

Durch $\varepsilon C < \delta$ ist sichergestellt, daß mit $\gamma \in \mathcal{F}$ auch $\Psi_\gamma \in \mathcal{F}$ ist.

<u>Forderung 2</u>: $\varepsilon L < 1$

<u>Beh</u>: $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ist eine Kontraktion.

$\ulcorner$ Seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{\mathbb{B}}_\delta(\underline{y})$ beide im $\mathcal{F}$. Dann gilt:

$$d(\Psi_{\gamma}, \Psi_{\tilde\gamma}) = \sup_t \| \Psi_\gamma(t) - \Psi_{\tilde\gamma}(t) \|$$

$$= \sup_t \left\| \int_0^t X(\gamma(s)) - X(\tilde\gamma(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \sup_t \int_0^t \| X(\gamma(s)) - X(\tilde\gamma(s)) \| \, ds$$

$$\leq \sup_t \int_0^t L \, \| \gamma(s) - \tilde\gamma(s) \| \, ds$$

$$\leq \varepsilon L \sup_t \| \gamma(t) - \tilde\gamma(t) \| = \underbrace{\varepsilon L}_{<1} d(\gamma, \tilde\gamma)$$

$\square$

Also: Für $\gamma_0, \tilde\gamma_0 \in \mathcal{F}$ sind durch

$$\gamma_{i+1} := \Psi_{\gamma_i} \qquad \tilde\gamma_{i+1} := \Psi_{\tilde\gamma_i}$$

zwei Cauchy-parallele Folgen erklärt.

Bem: $\mathcal{F}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Bew: Übung

Lösung: Es gibt zwei Strategien:

1) Benutze, daß $C_b([-\varepsilon;\varepsilon]; E)$ ein

Banachraum ist.

2) Modifiziere den Beweis, daß $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$ ein Banachraum ist.

<u>zu 1:</u> Offenbar ist $\mathcal{F} \subseteq C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$.

Die Metrik auf $\mathcal{F}$ wird induziert von der Norm auf $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$. Sei also γ_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$. Da $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$ vollständig ist, hat γ_* einen Limes γ in $C_b([-\varepsilon,\varepsilon];E)$.

Zu zeigen ist $\gamma \in \mathcal{F}$:

a) $\gamma_* \to \gamma \Rightarrow \gamma_*(0) \to \gamma(0)$

$$\Rightarrow \gamma(0) = \underline{y}$$

b) Für $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$ ist also

$$\underset{\overset{\wedge\!\!|}{\delta}}{\|\gamma_*(t)\|} \longrightarrow \|\gamma(t)\|$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t)\| \leq \delta.$$

zu 2: Sei γ_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$. Für $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist dann $\gamma_*(t)$ eine Cauchyfolge in $\overline{B_\delta(\underline{y})} \subseteq \underline{E}$.

Sei $\gamma(t) := \lim\limits_{* \to \infty} \gamma_*(t)$. Dann ist zunächst wegen Stetigkeit der Norm

$$\underset{\delta}{\underset{\wedge\!\!/\!/}{\|\gamma_*(t)\|}} \longrightarrow \|\gamma(t)\|$$

$$\Longrightarrow \quad \|\gamma(t)\| \leq \delta$$

Also: $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \overline{B_\delta}(\underline{y})$

Zum anderen ist γ stetig, weil γ gleichmäßiger Limes einer Folge γ_* stetiger Funktionen ist (so ist die Metrik auf $\mathcal{F}$ gemacht).

Schließlich ist

$$\gamma_*(0) \longrightarrow \gamma(0)$$

woraus $\gamma(0) = \underline{y}$ folgt.

Also: $\gamma \in \mathcal{F}$

Banachscher Fixpunktsatz:

Φ hat in E (genau) einen Fixpunkt $\gamma = \Psi_\gamma$

Bem: γ ist eine Integralkurve durch den Punkt $\underline{u} = \gamma(0)$.

$\ulcorner$

$$\gamma = \Phi_\gamma \iff \gamma(t) = \Phi_\gamma(t) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$
$$\iff \gamma(t) = \underline{u} + \int_0^t X(\gamma(s))\,ds$$
$$\iff (0)$$

$\lrcorner$ $\boxtimes$

Bsp (homogene lineare DGL)

A: Matrix in $\mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$

$$X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \qquad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$
$$\underline{v} \mapsto A\underline{v}$$

Picard-Iteration

$$\gamma_0(t) := \underline{u} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_{i+1}(t) = \underline{u} + \int_0^t X(\gamma_i(s))\,ds$$
$$= \underline{u} + \int_0^t A\gamma_i(s)\,ds$$
$$= \underline{u} + A\int_0^t \gamma_i(s)\,ds$$

Also: $\gamma_1(t) = \underline{u} + A\int_0^t \underline{u}\,ds = (1+tA)\underline{u}$

$$\gamma_2(t) = \underline{u} + A\int_0^t (1+sA)\,\underline{u}\,ds$$
$$= \underline{u} + A\int_1^t \underline{u}\,ds + A^2\int_0^t s\,\underline{u}\,ds$$
$$= \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2}\right)\underline{u}$$

$$\gamma_3(t) = \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{6}\right)\underline{u}$$

Beh: $\gamma_k(t) = \left(1 + tA + \cdots + \dfrac{(tA)^k}{k!}\right)\underline{u}$

Bem: Aus der lokalen Eindeutigkeit von Integralkurven folgt die globale Eindeutigkeit:

Sei $X: U \to E$ ein Vektorfeld mit lokal eindeutigen Integralkurven, und seien $\gamma, \bar{\gamma}: I \to U$ zwei Integralkurven von X, die zur Zeit $t_0 \in I$ übereinstimmen. Dann ist $\gamma = \bar{\gamma}$.

Bew: Wir zeigen $t > t_0 \Rightarrow \gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$.

Andernfalls betrachte

$$t_1 := \sup\{t \mid \gamma|_{[t_0,t]} = \bar{\gamma}|_{[t_0,t]}\}$$

Aus Stetigkeit von γ und $\bar{\gamma}$ folgt $\gamma(t_1) = \bar{\gamma}(t_1)$. Lokale Eindeutigkeit sagt $\exists\, \varepsilon > 0$: $\gamma|_{[t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon]} = \bar{\gamma}|_{[t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon]}$.

Also: $\gamma|_{[t_0, t_1+\varepsilon]} = \bar{\gamma}|_{[t_0, t_1+\varepsilon]}$

Das aber steht im Widerspruch zur Definition von t_1 als Supremum. $\boxtimes$

Bem: Sei $X: U \to E$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Seien $\gamma: I \to U$ und $\bar{\gamma}: J \to U$ zwei Integralkurven, die zum Zeitpunkt t_0 übereinstimmen: $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0) =: \underline{u}$

Dann ist wegen globaler Eindeutigkeit

$$\gamma|_{I \cap J} = \bar{\gamma}|_{I \cap J}$$

und

$$\tilde{\gamma}: I \cup J \to U$$
$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & : t \in I \\ \bar{\gamma}(t) & : t \in J \end{cases}$$

ist wohldefiniert. Offensichtlich ist $\tilde{\gamma}$ eine Integralkurve mit $\tilde{\gamma}(t_0) = \underline{u}$.

Also: Es gibt eine Integralkurve $\gamma: I \to U$ mit $\gamma(t_0) = \underline{u}$ mit maximalem Definitionsbereich. (Verklebung aller Integralkurven durch $\underline{u}$.)

Prop: Der maximale Definitionsbereich von Integralkurven durch $\underline{u}$ ist ein <u>offenes</u> Intervall I.

Bew: Sei $\gamma: I \to U$ Integralkurve durch $\underline{u}_0 = \gamma(t_0)$. Für $t_1 \in I$ sei $\bar{\gamma}: [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \to U$ Integralkurve durch $\underline{u}_1 := \bar{\gamma}(t_1) = \gamma(t_1)$. Verkleben liefert eine Integralkurve <u>um</u> t_1. $\boxtimes$

Bsp: $E = \mathbb{R} \supseteq U$: offen

$X : U \to \mathbb{R}$

$\gamma : I \to U$ Integralkurve

$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

Differentialgleichung: $y = \gamma(t)$ $\quad \dot{y} = \gamma'(t)$

$\dot{y} = X(y)$

Lösen: $\dfrac{\gamma'(t)}{X(\gamma(t))} = 1 \quad \Big| \int dt$

$\int \dfrac{\gamma'(t)}{X(\gamma(t))} dt = t + C \qquad y = \gamma(t)$

$\int \dfrac{1}{X(y)} dy = t + C$

Bsp: $\dot{y} = y \quad \rightsquigarrow \int \frac{1}{y} dy = t + C$

$\ln(y) = t + C$

$y = Ke^t \qquad K = e^C$

Bsp: $\dot{y} = e^y \quad \rightsquigarrow \int \frac{1}{e^y} dy = t + C$

$-e^{-y} = t + C$

Nur für $\boxed{-C > t} \longrightarrow y = -\ln(-C - t)$

Der Fluß eines Vektorfeldes

$U \subseteq E$ offen

$X : U \to E$ lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld

$\gamma_{\underline{u}} : I_{\underline{u}} \to U$ Integralkurve durch $\underline{u} = \gamma_{\underline{u}}(0)$ mit max. Def.bereich.

Def: Wir setzen

$$D := \{ (t, \underline{u}) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_{\underline{u}} \}$$

Dann heißt die Abbildung

$$\Phi : D \to U$$
$$(t, \underline{u}) \mapsto \gamma_{\underline{u}}(t)$$

der <u>globale Fluß</u> von X.

Bem: Für jedes $\underline{u} \in U$ ist

$$\gamma_{\underline{u}} = \Phi(*, \underline{u})$$

die Integralkurve durch $\underline{u}$

Ziel: Φ ist stetig.

Prop: Sei M ein metrischer Raum und E ein Banachraum. Dann ist

$$C_b(M;E) := \{ f : M \to E \mid f \text{ stetig und beschränkt} \}$$

ein Banachraum mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} \|f(x)\|$$

Bew: $C_b(M;E) \subseteq \mathcal{L}^\infty(M;E)$. Also ist $C_b(M;E)$ ein normierter Raum. Die Vollständigkeit bleibt zu zeigen. Sei also f_* eine Cauchyfolge in $C_b(M;E)$. Zu zeigen ist die Existenz einer Grenzfunktion in $C_b(M;E)$. Nun ist $\mathcal{L}^\infty(M;E)$ ein Banachraum. Sei f der Limes von f_* in $\mathcal{L}^\infty(M;E)$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_i - f\|_\infty < \varepsilon/3$$

zu $x \in M$ gibt es $\delta > 0$, so daß für $d(x,y) < \delta$ gilt: $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon/3$

Dann folgt auch:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f_i(y)\| + \|f_i(y) - f(y)\|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\boxtimes$

E : Banachraum

$U \subseteq E$ offen

$X : U \to E$ L-Lipschitz Vektorfeld

$\underline{y} \in \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \subsetneqq \mathbb{B}_\eta(\underline{y}) \subseteq U$

$E^* := C_b(\mathbb{B}_\delta(\underline{y}); E) = \{ f : \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \to E \mid \text{stetig beschr.} \}$

Banachraum bez. $\|\cdot\|_{sup}$

$\underline{y}^* := id_{\mathbb{B}_\delta(\underline{y})} : \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \to E \in E^*$

$\delta^* := \eta - \delta$

<u>Bem</u> : $\mathbb{B}_{\delta^*}(\underline{y}^*) \subseteq \{ f : \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \to \overset{U}{\overset{\cup\!\shortmid}{\mathbb{B}_\eta(\underline{y})}} \mid \text{stetig beschr.} \}$

$\ulcorner \| f - \underline{y}^* \|_{sup} < \delta^*$

$\Rightarrow \| f(\underline{v}) - \underline{v} \| < \eta - \delta \qquad \forall \underline{v} \in \mathbb{B}_\delta(\underline{y})$

$\Rightarrow \| f(\underline{v}) \| < \| \underline{v} \| - \delta + \eta < \eta$

$\Rightarrow f(\underline{v}) \in \mathbb{B}_\eta(\underline{y}) \subseteq U$ $\lrcorner$

$U^* := \mathbb{B}_{\delta^*}(\underline{y}^*)$

$$\begin{aligned} X^*: \mathcal{U}^* &\longrightarrow E^* \\ f &\longmapsto X \circ f \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} f: \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{B}_\eta(\underline{y}) \subseteq \mathcal{U} \arrow[d, "X"] \\ & E \end{tikzcd}$$

<u>Bem</u>: X^* ist L-Lipschitz Vektorfeld auf $\mathcal{U}^*$

$$\ulcorner \| X^*(f) - X^*(g) \|_{\sup} =$$

$$= \sup_{\underline{v} \in \mathcal{U}^*} \| X(f(\underline{v})) - X(g(\underline{v})) \|$$

$$\leq L \sup_{\underline{v} \in \mathcal{U}^*} \| f(\underline{v}) - g(\underline{v}) \|$$

$$= L \, \| f - g \|_{\sup} \lrcorner$$

<u>Also</u>: Wir wenden Picard-Lindelöf auf X^* an und erhalten eine lokale Integralkurve

$$\begin{aligned} \Phi: [-\varepsilon, \varepsilon] &\longrightarrow \mathcal{U}^* \\ t &\longmapsto \Phi_t \end{aligned}$$

durch $\underline{y}^* = \mathrm{id}_{\mathbb{B}_\delta(\underline{y})}$.

Es gilt also

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X^*(\Phi_t) = X \circ \Phi_t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\Phi_t(\underline{v})\right) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_t\right)(\underline{v}) = X(\Phi_t(\underline{v})) \quad \forall\, \underline{v} \in \mathbb{B}_\delta(\underline{y})$$

⌈ Die Auswertung $ev_{\underline{v}} : E^* \to E$ ist stetig linear, darum glatt. Die Identität folgt damit aus der Kettenregel. ⌋

<u>D.h.:</u> $t \mapsto \Phi_t(\underline{v})$ ist Integralkurve durch $\underline{v} = id_{\mathbb{B}_\delta(\underline{y})}(\underline{v}) = \Phi_0(\underline{v})$.

Nun ist

$$\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \to C_b(\mathbb{B}_\delta(\underline{y}); E)$$

interpretierbar als <u>stetige</u> Abbilung

$$\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \to E$$

<u>Folglich</u>: Zu $\underline{y} \in U$ hat das L-Lipschitz Vektorfeld $X : U \to E$ einen stetigen lokalen Fluß $\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{B}_\delta(\underline{y}) \to U$.

Stetigkeit des Flusses

$X : \mathcal{U} \to E$ lok. Lipschitz-stetiges Vf

$\underline{u} \in \mathbb{B}_\delta(\underline{u}) \subsetneq \mathbb{B}_\eta(\underline{u}) \subseteq \mathcal{U}$ $\quad X|_{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})}$: Lipschitz

$E^* := C_b(\mathbb{B}_\delta(\underline{u}); E)$

$\underline{u}^* := id_{\mathbb{B}_\delta(\underline{u})}$ $\qquad \delta^* := \eta - \delta$

$\mathcal{U}^* := \mathbb{B}_{\delta^*}(\underline{u}^*) \subseteq E^*$

$X^* : \mathcal{U}^* \to E^*$ Lipschitz-stetiges
$\quad f \mapsto X \circ f$ Vektorfeld

$\rightsquigarrow \quad \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathcal{U}^*$ Int.kurve durch $\underline{u}^*$
$\qquad t \to \gamma_t : \mathbb{B}_\delta(\underline{u}) \to E$

Erinnerung: 1) $\operatorname{im} \gamma_t \in \mathbb{B}_\eta(\underline{u}) \subseteq \mathcal{U}$.

2) $\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{B}_\delta(\underline{u}) \to \mathcal{U}$
$\qquad (t, \underline{v}) \longmapsto \gamma_t(\underline{v})$

ist ein lokaler Fluß, definiert auf einer Umgebung von $(0, \underline{u})$.

3) $\Phi(t, \underline{v})$ hängt stetig von t und $\underline{v}$ ab: Abh. von t: $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to E$ stetig

Abh. von $\underline{v}$: $E^* = C_b(\cdots)$ besteht aus stetigen Abbildungen.

Also: Um $(0, y)$ gibt es einen stetigen lokalen Fluß.

Durch Translation in der Zeit:

Sei $D \subseteq I \times U$ Definitionsbereich des globalen Flusses Φ. Für $(t, y) \in D$ gibt es eine offene Menge $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{B}_\delta(y)$ in D, auf der ein lokaler Fluß Ψ von X erklärt ist.

Nun sind Integralkurven von X eindeutig. Also ist $\Psi = \Phi|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{B}_\delta(y)}$.

Darum ist Φ an der Stelle (t, y) stetig:

Satz: Der globale Fluß $\Phi : D \to U$ eines lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeldes ist stetig.

Automomisierung

Bsp: Das konstante Vektorfeld $X: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

hat die Integralkurven

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t + a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ fest}$$

Def: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, P ein metrischer Raum und $U \subseteq E$ eine offene Menge im einem Banachraum. Eine stetige Abbildung

$$X: I \times P \times U \to E$$
$$(t, p, \underline{u}) \mapsto X_t^p(\underline{u})$$

ist eine stetig über P parameterisierte Schar zeitabhängiger Vektorfelder.

Für $\underline{u} \in U$ und $p \in P$ nennen wir

$$\gamma: J \to U$$

eine Integralkurve, wenn gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_t^p(\gamma(t)) \qquad \forall t \in J$$

<u>Satz</u>: Sei $X : I \times P \times U \to E$ eine stetig über P parametrisierte Schar zeitabhängiger Vektorfelder, die in der Raumkoordinate <u>uniform Lipschitz-stetig</u> sind, d.h.

$$\exists L \ \forall t \in I, p \in P :$$

$$X_t^p : U \to E \text{ ist Lipschitz-stetig}$$
$$\text{mit Lipschitz-Konstante } L$$

Dann gibt es zu jedem $(t_0, p, \underline{y}) \in I \times P \times U$ eine (lokal eindeutige) Integralkurve

$$\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$$

mit $\gamma(t_0) = \underline{y}$.

Mehr noch, es gibt eine offene Umgebung $D \subseteq I \times P \times U$ von $(t_0, p, \underline{y}) \in D$ und eine stetige Abbildung

$$\Phi : D \to U \quad (\text{lokaler Fluß})$$

so daß $\gamma : t \mapsto \Phi(t, q, \underline{v})$ für $(t_0, q, \underline{v}) \in D$ eine Integralkurve mit $\gamma(t_0) = \underline{v}$ ist

Methode 1 (falls P offen in einem Banachraum F)

$P \subseteq F$ offen.

Definiere das Vektorfeld

$$Y : I \times P \times U \to \mathbb{R} \times F \times E$$
$$\begin{pmatrix} t \\ \underline{p} \\ \underline{u} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ X(\underline{u}) \end{pmatrix}$$

Dann gibt es eine bijektive Entsprechung von Integralkurven $\eta : [-\varepsilon, \varepsilon] \to I \times P \times U$ von Y und $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ von X

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ p \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \eta_3(t)$$

Also: Ist Y lokal Lipschitz-stetig, so hat X lokale Integralkurven. Y hat einen stetigen Fluß. Also hat X einen stetigen Fluß.

Bem: Daß Y Lipschitz-stetig ist, ist eine stärkere Voraussetzung als die uniforme Lipschitz-Stetigkeit von X im Raum.

Bsp: $A : I \times \mathcal{B}(E;E) \to \mathcal{B}(E;E)$

stetige Familie von Matrizen.

$$X : I \times E \to E$$
$$(t, \underline{u}) \mapsto A(t,\underline{u})\,\underline{u}$$

homogene lineare DGL

$$\gamma(t_0) = \underline{u}_0$$

$$\gamma'(t) = A(t, \gamma(t))\,\gamma(t)$$

spezielle Lösung

$$\Gamma : I \to \mathcal{B}(E;E)$$

$$\Gamma(t_0) = id_E$$

$$\Gamma'(t) = A(t, \Gamma(t))\,\Gamma(t)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(t) = \Gamma(t) \cdot \underline{u}_0$$

hängt stetig von $\underline{u}_0$ ab.

Methode 2

$$E^* := C_b(\cancel{I} \times P \times \mathbb{B}_\delta(\underline{u}); E)$$

$$\underline{u}^* := pr_U : \cancel{I} \times P \times \mathbb{B}_\delta(\underline{u}) \to E$$
$$(\cancel{t}, q, \underline{v}) \mapsto \underline{v}$$

$$X^* : \mathbb{B}_{\delta^*}(\underline{u}^*) \longrightarrow E^*$$
$$f \longmapsto \left[(\cancel{t}, q, \underline{v}) \mapsto X^q_{\cancel{t}}(f(\cancel{t}, q, \underline{v})) \right]$$

Ist X uniform Lipschitz-stetig im Raum, so ist X^* Lipschitz-stetig.

$\rightsquigarrow$ stetige lokaler Fluß von X.

Details: Übung.

Korrektur: Zeitabhängigkeit läßt sich auf diesem Weg leider wohl doch nicht behandeln.

Dafür muß man eine geeignete Version des Picard-Lindelöf beweisen.

Vektorfelder und Differentialgleichungen

Bsp: $f'(t) = f(t)$

$\rightsquigarrow$ $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ $\qquad$ γ: Int. kurve $\Leftrightarrow$ $\underline{\gamma'(t)} = X(\gamma(t)) = \underline{\gamma(t)}$

Bsp: $f'(t) = t f(t)$

$\rightsquigarrow$ $X: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \underset{X_t(x)}{\overset{\shortparallel}{tx}}$ $\qquad$ γ: Intkurve $\Leftrightarrow$ $\gamma'(t) = X_t(\gamma(t))$ $\Leftrightarrow$ $\gamma'(t) = t\gamma(t)$

$\rightsquigarrow$ $X: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ tx \end{pmatrix}$$

Lösen: $\qquad$ $\boxed{\text{Trennen der Veränderlichen}}$

$$f'(t) = t f(t)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = t \qquad \Big| \int dt$$

$y = f(t)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\ln(f(t)) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow \underline{\underline{f(t) = e^{\frac{t^2}{2} + c}}}$$

<u>Bsp:</u> $f''(t) = f(t) \qquad (*)$

$$\rightsquigarrow \left\| \begin{array}{l} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = f(t) \end{array} \right\| \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Lösungen e^t und e^{-t} sieht man mit unbewaffnetem Auge.

$\Rightarrow$ Jede Abb.

$$f : t \mapsto a e^t + b e^{-t}$$

ist Lösung von $(*)$

<u>Bem:</u> Diese Lösungen bilden einen Vektorraum.

⌜Dies ist ein Beispiel für eine homogene lineare DGL ⌟

Lineare Differentialgleichungen

<u>Def</u>: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A : I \to \mathcal{B}(E;E)$$

$$\underline{b} : I \to E$$

stetige Funktionen. Das zeitabhängige Vektorfeld

$$X : I \times E \to E$$

$$(t, \underline{u}) \mapsto A_t(\underline{u}) + \underline{b}_t$$

heißt <u>affin</u>. (Entspricht einer sogenannten linearen DGL.)

<u>Bem</u>: Stetigkeit von A impliziert, daß $X|_{[a,b]\times E}$ stets uniform Lipschitz-stetig im Raum ist.

Also existiert zu jedem Paar (t_0, u_0) eine Integralkurve

$$\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$$

Beweis P.-L.

mit $\gamma(t_0) = u_0$ für $\varepsilon = \frac{1}{L}$ für $t_0 \in [a + \frac{1}{L}, b - \frac{1}{L}]$.

Kor: Integralkurven von X sind auf ganz I fortsetzbar.

Bew: Sie sind fortsetzbar auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq I$. $\boxtimes$

Def: Ist $\underline{b}_t = 0 \ \forall t \in I$, so hat X die Form

$$X_t(\underline{v}) = A_t(\underline{v})$$

und ist also ein lineares Vektorfeld.

Beob: Sei X ein lineares Vektorfeld. Dann ist

$$\overline{E} := \{ \gamma : I \to E \mid \gamma : X\text{-Int.kurve} \}$$

ein Vektorraum. Für jedes $t \in I$ ist die Auswertungsabbildung

$$ev_t : \overline{E} \to E$$
$$\gamma \mapsto \gamma(t)$$

ein Isomorphismus. $\boxtimes$

Beob: Sei $X_t(\underline{y}) = A_t(y) + \underline{b}_t$ ein affines Vektorfeld. Für zwei X-Int.kurven γ und $\bar{\gamma}$ ist dann

$$\frac{d}{dt}(\gamma - \bar{\gamma}) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t - A_t(\bar{\gamma}(t)) - b_t$$
$$= A_t(\gamma(t) - \bar{\gamma}(t))$$

Also ist $\gamma - \bar{\gamma}$ Intkurve des zugehörigen linearen Vektorfeldes.

Also: Haben wir <u>eine</u> Integralkurve γ_{sp} des affinen Vektorfeldes X, so erhalten wir <u>alle</u> Int.kurven durch Addition:

$$\left\{\gamma : I \to E \;\middle|\; \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t\right\} =$$

$$= \left\{\gamma_{sp} + \gamma \;\middle|\; \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t))\right\}$$

Anw: $E = \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \left\{\gamma \mid \frac{d}{dt}\gamma(t) = A_t(\gamma(t))\right\}$ hat Dim. m. Finde eine Basis.

In der Sprache der DGL^n:

Jede Lösung der inhomogenen DGL $\gamma'(t) = A_t(\gamma(t)) + \underline{b}_t$ ergibt sich aus einer speziellen Lösung durch Addition von Lösungen der homogenen DGL. Der VR all dieser Lösungen hat die Dimension von E.

Eine Basis dieses Lösungsraumes heißt Fundamentalsystem.

<u>Bsp</u>: $f''(t) = f(t)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = f(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

Die Gronwallsche Ungleichung

Lemma: $g : I \to \mathbb{R}^+$ sei stetig differenzierbar und erfülle für ein festes $L > 0$:

$$g'(t) \leq L\, g(t) \qquad \forall\, t \geq 0 \in I$$

Dann gilt für $t \geq 0$:

$$g(t) \leq g(0)\, e^{L(t-t_0)}$$

Bew: Setze $\quad h(t) := e^{-Lt} g(t)$

$$\Rightarrow h'(t) = -L e^{-Lt} g(t) + e^{-Lt} g'(t)$$

$$\leq -L h(t) + L \underbrace{e^{-Lt} g(t)}_{= h(t)} = 0$$

Also: h ist monoton fallend für $t \geq 0$. $\boxtimes$

Kor (Gronwallsche Ungleichung)

Sei $f : I \to \mathbb{R}^+$ stetig mit

$$f(t) \leq f(0) + L \int_0^t f(s)\, ds$$

für ein $L > 0$. Dann gilt für $t \geq 0$:

$$f(t) \leq f(0)\, e^{Lt}$$

Bew: Setze $g(t) := f(0) + L\int_0^t f(s)\,ds$.

Dann ist g stetig differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = Lf(t) \leq Lg(t)$$

Also ist mit dem Lemma:

$$f(t) \leq g(t) \leq g(0)e^{Lt} = f(0)e^{Lt} \qquad \boxtimes$$

Kor (Entfernung von Integralkurven)

Sei $X : I \times U \to E$ ein zeitabhängiges Vektorfeld, und für jedes $t \in I$ sei X_t Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$ (unabh. von t). Für zwei Integralkurven $\gamma, \tilde{\gamma} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$ gilt:

$$\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| \leq \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\| e^{L|t-t_0|}$$

Bew: O.B.d.A $t_0 = 0$. Wir betrachten:

$$f : t \mapsto \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\|$$

Dann ist mit (o):

$$f(t) \leq \|\gamma(0) - \tilde{\gamma}(0)\| + \left\| \int_0^t X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde{\gamma}(s))\,ds \right\|$$

$$\le f(0) + \int_0^t \| X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde{\gamma}(s)) \| \, ds$$

$$\le f(0) + L \int_0^t \| \gamma(s) - \tilde{\gamma}(s) \| \, ds$$

$$= f(0) + L \int_0^t f(s) \, ds$$

Also ist für $t \geq 0$:

$$\| \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) \| = f(t) \le f(0) e^{Lt} = \| \gamma(0) - \tilde{\gamma}(0) \| e^{L|t|}$$

Für $t \le 0$ wende man das erzielte Ergebnis auf die Kurven $t \mapsto \gamma(-t)$ und $t \mapsto \tilde{\gamma}(-t)$ an. Das sind nämlich Integralkurven zum Vektorfeld

$$-X : -I \times U \to U$$
$$(t, y) \mapsto -X_{-t}(y)$$

$\square$

Kor: Der Fluß eines (zeitabh.) Vf ist stetig und sogar Lipschitz-stetig „im Raum", d.h. $\Phi(t, t_0, *) : U \to U$ ist Lipschitz-stetig für jedes (t, t_0), allerdings mit einer von (t, t_0) abhängigen Lipschitz-konstanten.

<u>Bem</u>: Es ergibt sich auch ein alternativer Beweis für die Eindeutigkeit von Integralkurven (sogar in stetig parametrisierten Scharen zeitabh. Vektorfelder).

Woher kommen Differentialgleichungen?

Bsp (Funktionalgleichungen)

Gesucht ist eine glatte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit

$$f(a+b) = f(a)\, f(b)$$

Ansatz:

$$f'(a) = \lim_{b\to 0} \frac{f(a+b) - f(a)}{b}$$

$$= \lim_{b\to 0} \frac{f(a)\,(f(b)-1)}{b}$$

$$= f(a) \underbrace{\lim_{b\to 0} \frac{f(b)-1}{b}}_{=:\, K}$$

$$f'(a) = K\, f(a) \qquad \text{DGL}$$

Lösung: $f(a) = e^{Ka}$

Bsp (klassische Mechanik)

Ein System hat endlich viele Massen, die wir uns punktförmig vorstellen. Ihre Orte werden durch Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ beschrieben. Jedes x_i hängt von der Zeit t ab. Die Ableitungen $\dot{x}_i$ beschreiben die Geschwindigkeitsvektoren der Massepunkte.

Zu jedem Zeitpunkt hat das System eine <u>kinetische Energie</u> $T(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ und eine potentielle Energie $U(t, \underline{x}, \underline{\dot{x}})$.

Bsp:

kann nur in einer Richtung schwingen

Das System wird durch <u>eine</u> Koordinate x beschrieben.

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$U = \frac{F}{2}(x-L)^2$$

F: Materialkonstante

L: Länge der unbelasteten Feder

Fakt (Physik)

Die Bewegung des System $\underline{x}(t)$ genügt der Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}}}$$

wobei die Wirkung $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{L} = T - U$$

Bsp (Fortsetzung)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{F}{2}(x-L)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -Fx + FL = F(L-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$(*) \qquad F(L-x) = m\ddot{x} \qquad \underline{\underline{2^{te} \text{ Ordnung!}}}$$

<u>Physik</u>: Das Weltgeschehen ist die Lösung einer DGL 2^{ter} Ordnung.

Wir werden noch sehen, daß diese Aussage der empirischen Überprüfung zugänglich ist.

<u>Bsp</u> (Fortsetzung)

Lösungen von $(*)$ sind:

$$x(t) = L + \alpha \sin\left(\sqrt{\tfrac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\tfrac{F}{m}}\,\alpha\cos\left(\sqrt{\tfrac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{F}{m}\,\alpha\sin\left(\sqrt{\tfrac{F}{m}}(t+\omega_0)\right)$$

|| <u>Insbesondere</u>: Die Frequenz der Schwingung hängt nicht von der Auslenkung ab.

Bsp (Variationsrechnung)

Gegeben sei eine glatte Funktion

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Gesucht ist eine glatte Funktion

$$\underline{y} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \mapsto \underline{y}_a, \quad b \mapsto \underline{y}_b$$

die das Integral

$$I(\underline{y}) := \int_a^b L(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))\, dx$$

minimiert / maximiert.

Ansatz: Sei $\underline{h} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige glatte Funktion mit $\underline{h}(a) = \underline{h}(b) = 0$.

Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\underline{y}_t : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto \underline{y}(x) + t\,\underline{h}(x)$$

Beachte

$$\underline{y}_t(a) = \underline{y}(a) = \underline{y}_a$$
$$\underline{y}_t(b) = \underline{y}(b) = \underline{y}_b$$

Wenn $\underline{y}$ das Integral $I(\underline{y})$ maximiert, hat

$$\ell : t \mapsto L(\underline{y}_t)$$

eine Extremstelle bei $t=0$.

Also gilt:

$$0 = \frac{d\ell}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^b L(x, \underline{y}(x) + t\underline{h}(x), \underline{y}'(x) + t\underline{h}'(x))\, dx \Big|_{t=0}$$

Abhängigkeit von x in der Notation unterdrückt

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h} + \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}'\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}\, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}'\, dx$$

partielle Integration

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}\, dx + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}\right]_a^b}_{=0 \text{ weil } \underline{h}(a) = \underline{h}(b) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\, \underline{h}\, dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}') - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')\right) \underline{h}\, dx$$

Da $\underline{h}$ beliebig ist, folgt

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \underline{y}}(x, \underline{y}, \underline{y}') - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}(x, \underline{y}, \underline{y}')$$

<u>Also:</u>

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \underline{y}} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \underline{y}'}}$$

<u>Bem</u>: Dies ist die Euler-Lagrange-DGL des Variationsproblems. Sie ist eine <u>notwendige Bedingung</u>, die jede Lösung erfüllen muß.

<u>Bem</u>: Vergleiche klassische Mechanik:

! Die Bewegung eines mechanischen System minimiert die Wirkung $L = T - U$.

Erinnerung: Umkehrregel (18.5. seite 9)

Prop: $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ offen

$$\left.\begin{array}{ll} f: U \to V & \text{stetig} \\ g: V \to U & \text{stetig} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{invers zueinander} \\ f \circ g = id_V \\ g \circ f = id_U \end{array}$$

Sei f differenzierbar in $\underline{u} \in U$ mit stetig (!) invertierbarer Ableitung $D_{\underline{u}} f : E \to F$. Dann ist g in $f(\underline{u})$ differenzierbar mit Ableitung $D_{f(\underline{u})} g = (D_{\underline{u}} f)^{-1}$.

Ziel: Gib' ein hinreichendes Kriterium für stetige Invertierbarkeit.

Der Umkehrsatz

Lemma: $0 \in U \subseteq E$ offen

$f : U \to \underline{E}$ stetig differenzierbar

$f(0) = 0$

$D_0 f : E \to E = id_E$

Dann ist f in der Nähe von 0 invertierbar und die Inverse ist stetig. D.h.:

$\exists$ offene Mengen $V, W \subseteq E$ mit:

1) $0 \in V \subseteq U$

2) $f(V) = W$

3) $f|_V : V \to W$ ist bijektiv

4) $(f|_V)^{-1} : W \to V$ ist stetig

Bew: Definiere

$$h : U \to E$$
$$\underline{x} \mapsto \underline{x} - f(\underline{x})$$

Dann ist

$$D_0 h = 0$$

Also gibt es $\delta > 0$, mit:

$$\| D_{\underline{u}} h \|_{op} < \frac{1}{8} \quad \forall\ \underline{u} \in \mathbb{B}_\delta(0)$$

Nach dem Mittelwertsatz ist für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{B}_\delta(0)$

$$\| h(\underline{y}) - h(\underline{x}) - D_{\underline{x}}(\underline{y} - \underline{x}) \| \leq \| \underline{y} - \underline{x} \| \sup_{\underline{v} \in [\underline{x}, \underline{y}]} \| D_{\underline{v}} h - D_{\underline{x}} h \|_{op}$$
$$\leq \frac{1}{4} \| \underline{y} - \underline{x} \|$$

und

$$\| D_{\underline{x}}(\underline{y} - \underline{x}) \| \leq \frac{1}{8} \| \underline{y} - \underline{x} \|$$

Also ist h auf $\mathbb{B}_\delta(0)$ kontrahierend:

$$\| h(\underline{y}) - h(\underline{x}) \| \leq \frac{3}{8} \| \underline{y} - \underline{x} \|$$

⌈ Besser mit Übung:

$$\| h(\underline{y}) - h(\underline{x}) \| \leq \frac{1}{8} \| \underline{y} - \underline{x} \|$$ ⌋

Insbesondere ist

$$\| h(\underline{x}) \| \leq \frac{3}{8} \| \underline{x} \| < \frac{1}{2} \delta \quad \text{für} \quad \| \underline{x} \| < \delta$$

Also ist für $\underline{u} \in \mathbb{B}_{\delta/2}(0)$ und $\underline{x} \in \mathbb{B}_\delta(0)$

$$\underline{u} + h(\underline{x}) \in \mathbb{B}_\delta(0)$$

D.h. für $\underline{u} \in \mathbb{B}_{\delta/2}(0)$ können wir die Kontraktion

$$\begin{aligned} h_{\underline{u}} : \mathbb{B}_\delta(0) &\to \mathbb{B}_\delta(0) \\ \underline{x} &\mapsto \underline{u} + h(x) \end{aligned}$$

definieren.

Banachscher Fixpunktsatz: $h_{\underline{u}}$ hat genau einen Fixpunkt in $\mathbb{B}_\delta(0)$.

$g(\underline{u})$: Fixpunkt von $h_{\underline{u}}$ in $\mathbb{B}_\delta(0)$

<u>D.h.:</u> $h_{\underline{u}}(g(\underline{u})) = g(\underline{u})$

$\iff \underline{u} + g(\underline{u}) - f(g(\underline{u})) = g(\underline{u})$

$\iff \underline{u} = f(g(\underline{u}))$!!!

<u>d.h.</u> $f \circ g = id$ auf $\mathbb{B}_{\delta/2}(0)$

Natürlich sollte g die gesuchte Inverse zu f sein.

<u>Fragen:</u> Ist g auch k-mal stetig diffbar?

Ist auch $g \circ f = id$?

<u>Beh:</u> $f|_{B_\delta(0)}$ ist injektiv

$\ulcorner$ $f(\underline{x}) = f(\underline{y}) \iff f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = 0$

$\iff h(\underline{x}) - h(\underline{y}) = \underline{x} - \underline{y}$

$\Rightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|h(\underline{x}) - h(\underline{y})\| \leq \frac{3}{8}\|\underline{x} - \underline{y}\|$

$\Rightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\| = 0 \implies \underline{\underline{\underline{x} = \underline{y}}}$ $\lrcorner$

<u>Beh:</u> $g \circ f = id$ nahe 0.

$\ulcorner$ $f \circ g = id \Rightarrow f(g(f(\underline{x}))) = f(\underline{x})$ für $f(\underline{x})$ nahe 0

$\underset{f:\text{inj}}{\Rightarrow} g(f(\underline{x})) = \underline{x}$ $\lrcorner$

<u>Also:</u> Nahe 0 ist g Inverse von f.

<u>Beh:</u> g ist stetig.

$\ulcorner$ $h(\underline{u}) = \underline{u} - f(\underline{u}) \Rightarrow \boxed{\underline{u} = f(\underline{u}) + h(\underline{u})}$

h kontrahiert:

$\|h(\underline{x}) - h(\underline{y})\| \leq \frac{3}{8}\|\underline{x} - \underline{y}\|$

$\Rightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|f(\underline{x}) - f(\underline{y}) + h(\underline{x}) - h(\underline{y})\|$

$\leq \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| + \frac{3}{8}\|\underline{x} - \underline{y}\|$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{5}{8}\|\underline{x}-\underline{y}\| \leq \|f(\underline{x})-f(\underline{y})\|$$

$$\Rightarrow \quad \|g(\underline{u})-g(\underline{v})\| \leq \tfrac{8}{5}\|f(g(\underline{u}))-f(g(\underline{v}))\|$$

$$= \tfrac{8}{5}\|\underline{u}-\underline{v}\| \qquad \boxtimes$$

Vorgriff: Die Menge

$$\mathcal{I} := \{ \psi \in B(E;E) \mid \psi \text{ stetig invertierbar} \}$$

ist offen in $B(E;E)$ und Inversion

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{I} &\to \mathcal{I} \\ \psi &\mapsto \psi^{-1} \end{aligned}$$

ist glatt mit Ableitung

$$\begin{aligned} D\iota : \mathcal{I} &\to B(B(E;E);B(E;E)) \\ \psi &\mapsto (\varphi \mapsto -\psi^{-1}\varphi\psi^{-1}) \end{aligned} \qquad \boxtimes$$

Kor: Ist $f : U \to E$ stetig diffbar mit stetig invertierbarer Ableitung $D_{\underline{u}}f$, so ist $D_{\underline{v}}f$ stetig invertierbar in einer für alle $\underline{v} \in B_\delta(\underline{u})$ in einer offenen Umgebung von $\underline{u}$.

Umkehrsatz: Sei $U \subseteq E$ offen und $\underline{u} \in U$. Die Abbildung $g : U \to E$ sei k-fach stetig differenzierbar und $D_{\underline{u}} g : E \to E$ sei stetig invertierbar. Dann ist g in einer offenen Umgebung V von $\underline{u}$ invertierbar und die lokale Inverse ist k-fach stetig differenzierbar mit Ableitung $D_{f(\underline{u})} g^{-1} = (D_{\underline{u}} g)^{-1}$.

Bew: Wir konjugieren uns in die Situation des Lemma. Setze

$$\tau_{\underline{h}} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \underline{v} & \mapsto & \underline{v} + \underline{h} \end{array} \qquad \varphi := (D_{\underline{u}} f)^{-1} : E \to E$$

Dann erfüllt $f := \varphi \circ \tau_{-g(\underline{u})}\, g \circ \tau_{\underline{u}}$ die Voraussetzungen des Lemma:

$$f(0) = \varphi(g(\underline{u}) - g(\underline{u})) = 0$$

$$D_0 f = D_0 \varphi \circ id \circ D_{\underline{u}} g \circ id = (D_{\underline{u}} g)^{-1} \circ D_{\underline{u}} g$$

Also ist f lokal invertierbar mit k-fach stetig differenzierbarer Inverser.

Nun ist

$$g = \varphi^{-1} \circ \tau_{g(y)} \circ f \circ \tau_{-u}$$

lokal invertierbar mit lokaler Inverser

$$g^{-1} = \tau_{u} \circ f^{-1} \circ \tau_{-g(y)} \circ \varphi$$

Offenbar ist g^{-1} Verkettung stetiger Abbildungen und damit stetig.

<u>Noch zu zeigen:</u> g^{-1} ist k-fach stetig differenzierbar.

Umkehrsatz: Sei $U \subseteq E$ offen und $\underline{u} \in U$.

Die Abbildung $g: U \to E$ sei k-fach stetig differenzierbar und $D_{\underline{u}} g: E \to E$ sei stetig invertierbar. Dann ist g in einer offenen Umgebung V von $\underline{u}$ invertierbar und die lokale Inverse ist k-fach stetig differenzierbar mit Ableitung $D_{f(\underline{u})} g^{-1} = (D_{\underline{u}} g)^{-1}$.

Geleistet:

Existenz einer stetigen lokalen Inversen.

Noch zu zeigen:

Die lokale Inverse ist auch k-mal stetig differenzierbar.

Prop: Seien $V \subseteq E$ und $W \subseteq F$ offen. Es seien
$$f : V \to W \quad \text{und} \quad g : W \to V$$
zueinander inverse stetige Funktionen. Ist f k-mal stetig differenzierbar mit stetig invertierbaren Ableitungen $D_{\underline{v}} f$ für alle $\underline{v} \in V$, so ist g auch k-mal stetig differenzierbar.

Bew: Für $k = 1$ ist dies gerade die Umkehrregel. Wir wissen darum auch
$$D_{\underline{v}} g = \left(D_{g(\underline{v})} f\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad Dg = \iota \circ Df \circ g$$

Nun ist ι glatt, Df $(k-1)$-fach stetig differenzierbar, und mit Induktion dürfen wir auch g als $(k-1)$-fach stetig differenzierbar annehmen.

$\boxtimes$

Stetig invertierbare lineare Funktionen

E: Banachraum

$\varphi : E \to E$ linear mit $\|\varphi\|_{op} < 1$

Beob 1: $\psi := id_E + \varphi$ ist stetig linear.

Beob 2: Die Reihe

$$id_E - \varphi + \varphi^2 - \varphi^3 + \cdots$$

konvergiert in $\mathcal{B}(E;E)$ gegen ψ^{-1}.

Insbesondere ist ψ^{-1} stetig (und linear).

Bew: $\| \varphi^n \pm \varphi^{n+1} \mp \varphi^{n+2} \pm \cdots \|_{op} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|\varphi\|_{op}^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\boxtimes$

⌜Submultiplikativität der Operatornorm.⌟

Beob 3: $\mathcal{U} := \{ id_E + \varphi \mid \|\varphi\|_{op} < 1 \} = \mathbb{B}_1(id_E)$

ist eine offene Umgebung von id_E in $\mathcal{B}(E;E)$, und Inversion

$$\iota : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(E;E)$$
$$\psi \mapsto \psi^{-1}$$

ist differenzierbar an der Stelle id_E mit Ableitung

$$D_{id}\, \mathcal{I} : \mathcal{B}(E;E) \to \mathcal{B}(E;E)$$
$$\varphi \longmapsto -\varphi$$

Bew: $\mathcal{I}(id_E + \varphi) = id_E - \varphi + \underbrace{\varphi^2 - \varphi^3 + \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung.}}$ $\boxed{\diagup}$

Beob 4: Sei $\psi : E \to E$ stetig, linear und mit stetiger Inverser $\psi^{-1} \in \mathcal{B}(E;E)$.

Dann ist

$$U_\psi := \{ \psi \circ (id_E + \varphi) \mid \|\varphi\|_{op} < 1 \}$$

eine offene Umgebung von ψ in $\mathcal{B}(E;E)$.

Auf U_ψ ist Inversion gegeben durch

$$[\psi \circ (id + \varphi)]^{-1} = (id + \varphi)^{-1} \circ \psi^{-1}$$
$$= (id - \varphi + \varphi^2 - \varphi^3 + \dots) \circ \psi^{-1}$$
$$= \psi^{-1} - \varphi \circ \psi^{-1} + \varphi^2 \circ \psi^{-1} - \varphi^3 \circ \psi^{-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad (\psi + \lambda)^{-1} = [\psi \circ (id + \psi^{-1}\lambda)]^{-1}$$
$$= \psi^{-1} - \psi^{-1} \circ \lambda \circ \psi^{-1} + \text{höhere Terme}$$

Also ist Inversion an der Stelle ψ differenzierbar mit Ableitung

$$\underline{\underline{\lambda \longmapsto -\psi^{-1} \circ \lambda \circ \psi^{-1}}}$$

Beob 5: Die Abbildungen

$$\begin{aligned} L : B(E;E) &\to B(B(E;E);B(E;E)) \\ \psi &\mapsto [\lambda \mapsto \psi \circ \lambda] \\ R : B(E;E) &\to B(B(E;E);B(E;E)) \\ \psi &\mapsto [\lambda \mapsto \lambda \circ \psi] \end{aligned}$$

sind stetig linear und somit glatt.

Bew: Submultiplikativität der Operatornorm. ☑

Kor: $D2$ ist glatt.

Bew: Induktion:

$$\begin{array}{c} B(E;E) \\ \big\downarrow 2 \qquad \Leftarrow \text{ k-fach stetig differenzierbar} \\ B(E;E) \\ \swarrow R \qquad\qquad L \searrow \\ \underbrace{B(B(E;E);B(E;E)) \qquad B(B(E;E);B(E;E))} \\ \big\downarrow \text{ Verkettung (stetig, bilinear)} \\ B(B(E;E);B(E;E)) \\ \big\downarrow \text{ Vorzeichenwechsel} \\ B(B(E;E);B(E;E)) \end{array}$$

$D2$

$D2$ ist k-fach stetig differenzierbar. ☑

Also: $U := \{ \psi \in B(E;E) \mid \psi \text{ stetig invertierbar} \}$
ist offen in $B(E;E)$ und Inversion

$$\begin{aligned} \iota : U &\longrightarrow U \\ \psi &\longmapsto \psi^{-1} \end{aligned}$$

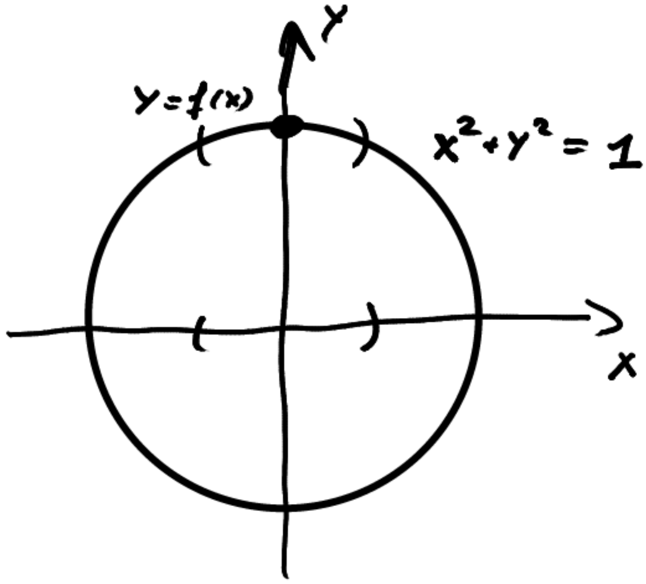
ist glatt mit Ableitung

$$\begin{aligned} D\iota : U &\longrightarrow B(B(E;E);B(E;E)) \\ \psi &\longmapsto (\varphi \mapsto -\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \end{aligned}$$

☑

Anwendung: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$$



$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Dg ist invertierbar, wo $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}$ existiert.

Sei $\overline{g}$ eine lokale Inverse zu g an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. D. h.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\left(\overline{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \underbrace{U}_{\text{Umg. von } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

Wir schreiben $\overline{g}$ im Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \overline{g}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \overline{g}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \overline{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} \overline{g}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \overline{g}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{g}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ F\begin{pmatrix} \overline{g}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \overline{g}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \bar{g}_1\binom{x}{y} \quad \& \quad y = F\binom{x}{\bar{g}_2\binom{x}{y}}$$

Also $\quad y = F\binom{x}{\bar{g}_2\binom{x}{y}}$

Setze $\quad f(x) := \bar{g}_2\binom{x}{y_0}$

Dann: $\quad y_0 = F\binom{x}{f(x)}$

Also: $f(x)$ erfüllt $x^2 + f(x)^2 = y_0$

in einer Umg. von $x_0 = 0$.

Bem: Die implizit definierte Funktion f können wir auch ableiten:

$$D_{g\binom{x}{y}} \bar{g} = \left(D_{\binom{x}{y}} g\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{dF}{dy}\right)^{-1} \frac{dF}{dx} & \left(\frac{dF}{dy}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Also: $\frac{df}{dx} = \frac{d\bar{q}_2}{dx} = -\left(\frac{dF}{dy}\right)^{-1}\frac{dF}{dx}$

Am Beispiel können wir das bestätigen:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x} = -(2y)^{-1}\,2x \qquad \Big|\; y = f(x)$$

$$= -(2f(x))^{-1}\,2x$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bem: Diese Rechnung gilt allgemein!

Satz von der impliziten Funktion

Sei $U \subseteq E_1 \times E_2$ offen und

$$f : U \to F$$

k-fach stetig differenzierbar. An der Stelle $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in W$ sei

$$f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{c}_0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{y}} = D^2_{(\underline{x}_0, \underline{y}_0)} f : E_2 \to F$$

sei stetig invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in V \subseteq E_1 \times E_2$ und $\underline{x}_0 \in W \subseteq E_1$ sowie eine eindeutig bestimmte k-fach stetig differenzierbare Abbildung

$$g : W \to E_2$$

mit:

$$\begin{matrix} (\underline{x}, \underline{y}) \in V \\ \text{und} \\ f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{c}_0 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \underline{x} \in W \\ \text{und} \\ \underline{y} = g(\underline{x}) \end{matrix}$$

Außerdem gilt für alle $\underline{x} \in W$:

$$D_{\underline{x}}\, g = -\left(D^2_{(\underline{x}, g(\underline{x}))} f\right)^{-1} \cdot D^1_{\underline{x}, g(\underline{x})} f$$

Bew: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \times F$$
$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \underline{x} \\ f(\underline{x}, \underline{y}) \end{pmatrix}$$

Beob: $$D_{\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}} h = \begin{pmatrix} id_{E_1} & 0 \\ \frac{df}{d\underline{x}} & \frac{df}{d\underline{y}} \end{pmatrix}$$

ist stetig invertierbar, wenn $\frac{df}{d\underline{y}}$ stetig invertierbar ist. Dann ist die Inverse gegeben durch

$$\left(D_{\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}} h\right)^{-1} = \begin{pmatrix} id_E & 0 \\ -\left(\frac{df}{d\underline{y}}\right)^{-1} \frac{df}{d\underline{x}} & \left(\frac{df}{d\underline{y}}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Dies gilt insbesondere an der Stelle $\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \end{pmatrix}$.

Umkehrsatz: h ist invertierbar bei $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$.

Insbesondere ist für $\underline{x}$ nahe $\underline{x}_0$ die Gleichung

$$h\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{x}\\ f(\underline{x},\underline{y})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{c}_0\end{pmatrix}$$

<u>eindeutig</u> durch ein $\underline{y}$ nahe $\underline{y}_0$ lösbar.

Also ist y eindeutig bestimmt.

<u>Also</u>: Sei $\bar{h} : \bar{V} \to V = V_1 \times V_2$ eine lokale Inverse von h, d.h.:

$$\bar{V} \subseteq E_1 \times F \quad \text{offen}$$

$$V = V_1 \times V_2 \subseteq E_1 \times E_2 \quad \text{offen} \qquad (\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in V$$

$$\left.\begin{array}{ll} h : V \to \bar{V} & \text{bijektiv} \\ \bar{h} : \bar{V} \to V & \text{bijektiv} \end{array}\right\} \text{inverse zueinander}$$

<u>Bem</u>: $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{c}_0 \Rightarrow h\begin{pmatrix}\underline{x}_0\\ \underline{y}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{x}_0\\ \underline{c}_0\end{pmatrix}$

<u>Also</u>: $V \ni \begin{pmatrix}\underline{x}_0\\ \underline{y}_0\end{pmatrix} \underset{\bar{h}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix}\underline{x}_0\\ \underline{c}_0\end{pmatrix} \in \bar{V}$

Wir schreiben $\bar{h}$ in Koordinaten:

$$\bar{h}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{f}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{h}_1(\underline{x}, \underline{f})\\ \bar{h}_2(\underline{x}, \underline{f})\end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{c} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} \bar{h}_1(\underline{x},\underline{c}) \\ \bar{h}_2(\underline{x},\underline{c}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{h}_1(\underline{x},\underline{c}) \\ f(\bar{h}_1(\underline{x},\underline{c}), \bar{h}_2(\underline{x},\underline{c})) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{h}_1(\underline{x},\underline{c}) = \underline{x}$$

und

$$\underline{c} = f(\underline{x}, \bar{h}_2(\underline{x},\underline{c}))$$

Nun ist $W = V_1$ eine offene Umgebung von $\underline{x}_0$ im E_1. Wir definieren:

$$g : W \longrightarrow E_2$$
$$\underline{x} \longmapsto \bar{h}_2(\underline{x}, \underline{c}_0)$$

Dann: $\underline{c}_0 = f(\underline{x}, g(\underline{x}))$

$$\underline{y}_0 = \bar{h}_2(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = g(\underline{x}_0)$$

Bch: $(\underline{x},\underline{y}) \in V$ und $f(\underline{x},\underline{y}) = \underline{c}_0$ $\iff$ $\underline{x} \in W$ und $\underline{y} = g(\underline{x})$

$$\ulcorner \quad \begin{matrix} (\underline{x},\underline{y}) \in V \\ \text{und} \\ f(\underline{x},\underline{y}) = \underline{c}_0 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \underline{x} \in W \\ \text{und} \\ \underline{y} = g(\underline{x}) \end{matrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{matrix} (\underline{x},\underline{y}) \in V \\ \text{und} \\ h\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{c}_0\end{pmatrix} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} (\underline{x},\underline{y}) \in V \\ \text{und} \\ \begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \bar{h}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{c}_0\end{pmatrix} \end{matrix} \quad \lrcorner$$

<u>Beh</u>: Für $\underline{x} \in W$ gilt

$$D_{\underline{x}}\, g = -\left(D^2_{(\underline{x},g(\underline{x}))} f\right)^{-1} \circ D^1_{\underline{x},g(\underline{x})} f$$

$$= -\left(\left.\frac{df}{d\underline{y}}\right|_{(\underline{x},g(\underline{x}))}\right)^{-1} \circ \left.\frac{df}{d\underline{x}}\right|_{(x,g(\underline{x}))}$$

$\ulcorner$ Umkehrregel:

$$D_{h\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}} \bar{h} = D_{\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}} h^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} id_E & 0 \\ -\left(\frac{df}{d\underline{y}}\right)^{-1} \frac{df}{d\underline{x}} & \left(\frac{df}{d\underline{y}}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$g(\underline{x}) = \overline{h}_2(\underline{x}, \underline{c}_0)$$

$$D_{\underline{x}}\, g = D^1_{\binom{\underline{x}}{\underline{c}_0}} \overline{h}_2 = \underbrace{- \left(\frac{df}{d\underline{y}}\right)^{-1} \circ \frac{df}{d\underline{x}}}$$

an der Stelle $\underline{y} = g(\underline{x})$

d.h.: $h\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \binom{\underline{x}}{\underline{c}_0}$

$\boxtimes$

Bem: In der Situation des Satzes betrachten wir die Lösungsmenge

$$\mathcal{M} := \{ (\underline{x}, \underline{y}) \in U \mid f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{c}_0 \}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} p : W &\to V \subseteq E_1 \times E_2 \\ \underline{x} &\mapsto \binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \end{aligned}$$

ist eine Parametrisierung der Menge $\mathcal{M} \cap V$. Wir nennen p darum auch ein <u>System lokaler Koordinaten</u> auf $\mathcal{M}$.

Def: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\quad m \leq n$

$f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar

Wir nennen einen Punkt $\underline{u} \in U$ regulär, wenn $D_{\underline{u}} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist (d.h. als Matrix hat $D_{\underline{u}} f$ vollen Rang m).

Bem: An einem regulären Punkt $\underline{u} \in U$ ist der Satz von der impliziten Funktion anwendbar: Mit $\underline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist

$$D_{\underline{u}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Da $D_{\underline{u}} f$ vollen Rang hat, gibt es eine invertierbare quadratische Untermatrix mit den Spalten $i_1, \dots, i_m$. Die übrigen Indices seien $j_1, \dots, j_{n-m}$

$$E_1 := \langle \underline{e}_{i_1}, \dots, \underline{e}_{i_{n-m}} \rangle$$

$$E_2 := \langle \underline{e}_{i_{\gamma_1}}, \dots, \underline{e}_{i_m} \rangle$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$, $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2)$

$D^2_{\underline{y}} f$ ist (stetig) invertierbar

$\Rightarrow$ Es gibt eine Umgebung $W \subseteq E_1$ von $\underline{y}_1$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g: W \to E_2$ mit

$$f(\underline{x}, g(\underline{x})) = f(\underline{y}) =: \underline{c}$$

$$\forall\, \underline{x} \in W$$

__Bem:__ Sind alle Punkte von

$$M = \{ \underline{y} \in U \mid f(\underline{y}) = \underline{c}_0 \}$$

regulär, so hat M an jeder Stelle ein System lokaler Koordinaten. M wird überdeckt von __Karten__. Wir nennen M eine __Mannigfaltigkeit__.

Def: Sei $\underline{u} = (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{M}$ und $p : W \to E_1 \times E_2$ ein System lokaler Koordinaten um $\underline{u}$.

Dann heißt

$$T_{\underline{u}} \mathcal{M} := \operatorname{im} D_{\underline{x}} p$$

Tangentialraum von $\mathcal{M}$ im Punkt $\underline{u}$.

Beob:

$$T_{\underline{u}} \mathcal{M} = \left\{ \gamma'(0) \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{l} \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathcal{M} \subseteq E_1 \times E_2 \\ \gamma \text{ stetig diffbar} \\ \gamma(0) = \underline{u} \end{array}}_{(*)} \right\}$$

Bew: „$\subseteq$"

Sei $D_{\underline{u}} p(\underline{h}) \in T_{\underline{u}} \mathcal{M}$. Dann ist

$$D_{\underline{u}} p(\underline{h}) = \gamma'(0)$$

für

$$\gamma(t) := p(\underline{x} + t\underline{h})$$

Umgekehrt ist für γ mit $(*)$

$$\gamma = p \circ pr_{E_1} \circ \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma'(0) \in \operatorname{im} D_{\underline{u}} p = T_{\underline{u}} \mathcal{M}. \qquad \boxtimes$$

Def: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\qquad m \leq n$

$f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar

Wir nennen einen Punkt $\underline{u} \in U$ regulär, wenn $D_{\underline{u}} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist (d.h. als Matrix hat $D_{\underline{u}} f$ vollen Rang m).

Bem: An einem regulären Punkt $\underline{u} \in U$ ist der Satz von der impliziten Funktion anwendbar:

Wir zerlegen $\mathbb{R}^n$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$$

mit $D^2_{\underline{u}} f = D_{\underline{u}} f|_{E_2} : E_2 \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. z.B.:

$$E_1 = \ker D_{\underline{u}} f$$

$$E_2 = E_1^{\perp} \quad \text{orthogonales Komplement}$$

Dann ist

$$D^1_{\underline{y}} f = D_y f\big|_{E_1} : E_1 \to \mathbb{R}^m \quad = 0$$

$$\Rightarrow D^2_{\underline{y}} f = D_y f\big|_{E_2} : E_2 \to \mathbb{R}^m \quad \text{surjektiv}$$

und

$$\dim E_1 \geq n - m$$

$$\Rightarrow \dim E_2 \geq m$$

und

$$\dim E_1 \geq n - m$$

aber $\dim E_1 + \dim E_2 = n$

<u>Also:</u> $\dim E_1 = n - m$

$\dim E_2 = m$

$$\Rightarrow D^2_{\underline{y}} f : E_2 \to \mathbb{R}^m \quad \underline{\text{invertierbar}}$$

<u>Also</u>: Der Satz von der impliziten Funktion ist anwendbar.

<u>Alternativ in Koordinaten:</u> Mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ist

$$D_{\underline{y}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Da $D_{\underline{y}} f$ vollen Rang hat, gibt es eine invertierbare quadratische Untermatrix mit den Spalten $i_1, \dots, i_m$. Die übrigen Indices seien $j_1, \dots, j_{n-m}$

$$E_1 := \langle \underline{e}_{j_1}, \dots, \underline{e}_{j_{n-m}} \rangle$$

$$E_2 := \langle \underline{e}_{i_1}, \dots, \underline{e}_{i_m} \rangle$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$, $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2)$

$D^2_{\underline{y}} f$ ist (stetig) invertierbar

$\Rightarrow$ Es gibt eine Umgebung $W \subseteq E_1$ von y_1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g: W \to E_2$

mit

$$f(\underline{x}, g(\underline{x})) = f(\underline{u}) =: \underline{c}$$

$$\forall\ \underline{x} \in W$$

Bem: Sind alle Punkte von

$$M = \{\, \underline{u} \in U \mid f(\underline{u}) = \underline{c}_0 \}$$

regulär, so hat M an jeder Stelle ein System lokaler Koordinaten. M wird überdeckt von Karten. Wir nennen M eine Mannigfaltigkeit.

Def: Sei $\underline{u} = (\underline{x}, \underline{y}) \in M$ und $p : W \to E_1 \times E_2$ ein System lokaler Koordinaten um $\underline{u}$. Dann heißt

$$T_{\underline{u}} M := \operatorname{im} D_{\underline{x}}\, p$$

Tangentialraum von M im Punkt $\underline{u}$.

<u>Beob</u>: An einem regulären Punkt $\underline{y} \in \mathcal{M}$ ist:

$$T_{\underline{y}} \mathcal{M} = \ker D_{\underline{y}} f$$

<u>Bew</u>: $f|_{\mathcal{M}}$ ist konstant.

$\Rightarrow$ $f \circ p$ ist konstant

$\Rightarrow$ $D_{\underline{y}} f \circ D_{\underline{x}} p = D_{\underline{x}} (f \circ p) = 0$

$\Rightarrow$ $\operatorname{im} D_{\underline{x}} p \subseteq \ker D_{\underline{y}} f$

Nun ist $\underline{y}$ regulär. Also ist

$$\underbrace{\operatorname{Dim} \operatorname{im} D_{\underline{x}} p \geq n - m}_{id_{E_1}\text{-Anteil}} \underbrace{= \ker D_{\underline{y}} f}_{\text{Dimensionsformel}} \qquad \boxtimes$$

<u>Beob</u>: $\ker \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$

Also für

$$f = \begin{pmatrix} f_1 : U \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_m : U \to \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

ist

$$T_{\underline{y}} \mathcal{M} = \langle \nabla_{\underline{y}} f_1, \dots, \nabla_{\underline{y}} f_m \rangle^{\perp}$$

$$T_{\underline{y}} \mathcal{M}^{\perp} = \langle \nabla_{\underline{y}} f_1, \dots, \nabla_{\underline{y}} f_m \rangle \quad (\underline{\text{Normalraum}})$$

Bsp (Tangentialebene an die Kugel)

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2+z^2$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1 \right\}$$

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ alle $y \in \mathcal{M}$ sind regulär.

$$T_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \mathcal{M} = \ker D_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} f$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$$

Mit Satz der impliziten Funktion.

Sei $y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ mit $z \neq 0$. Wir haben eine implizit definierte Funktion

$$g: W \to \mathbb{R} \qquad W \subset \mathbb{R}^2$$

mit $x^2+y^2+g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2 = 1$

Es ist

invertierbar

$$z \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 2y & \boxed{2z} \end{pmatrix} = Df$$

$$D_{\binom{x}{y}} g = -(2z)^{-1}(2x \;\; 2y)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{x}{z} & -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

Sei $p : W \to \mathbb{R}^3$

$$\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ g\binom{x}{y} \end{pmatrix}$$

die zugehörige Parametrisierung von $\mathcal{M}$ am der Stelle q. Dann ist

$$D_{\binom{x}{y}} p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{z} & -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \mathcal{M} = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \right\rangle$$

⌈ allgemein führen die Fälle $x \neq 0$ und $y \neq 0$ auf

$$T_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \mathcal{M} = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$ ⌋

Das läßt sich auch explizit bestätigen mit

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$D_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\pm\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x/z & -y/z \end{pmatrix}$$

<u>Anwendung</u> (Extrema mit Nebenbedingungen)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 3 \right\}$$

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$$

<u>Aufgabe</u>: Finde die Punkte <u>in M</u>, wo h ein Extremum annimmt.

<u>Beob 1</u>: $D_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$

hat vollen Rang für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Also</u>: Alle Punkte auf M sind regulär.

Sei $p : W \to \mathbb{R}^3$ ein System lokaler Koordinaten von M. Dann ist

$$h \circ p : W \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion.
Wir sind interessiert an den kritischen Punkten, wo die Ableitung $D_{\underline{w}}\, h \circ p$ verschwindet.

$$D_{\underline{w}}\, h \circ p = D_{p(\underline{w})} h \cdot D_{\underline{w}} p = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla_{p(\underline{w})} h \perp \underbrace{\operatorname{im} D_{\underline{w}} p}_{} = T_{p(\underline{w})} \mathcal{M}$$

Tangentialraum

Also: Ein Punkt $\underline{u} = p(\underline{w})$ ist kritisch genau dann, wenn $\nabla_{\underline{u}} h$ senkrecht auf $T_{\underline{u}} \mathcal{M}$ steht.

D.h.:

$$\nabla_{\underline{u}} h \in T_{\underline{u}} \mathcal{M}^{\perp} = \langle \nabla_{\underline{u}} f_1, \ldots, \nabla_{\underline{u}} f_m \rangle$$

$f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen von $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$

Bsp: $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = c \right\}$

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xyz$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \perp T_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \mathcal{M} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ parallel zu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\exists t$
$$\begin{aligned} yz &= tx \\ xz &= ty \\ xy &= tz \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}$$

$\Leftrightarrow$ $$\underline{\underline{y^2 = x^2 = z^2}}$$