Analysis II

1ter Übungszettel
Abgabe: Donnerstag, 21.4., 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

$\mathbb{K}$ ist ein angeordneter Körper.

Aufgabe 1. Zeige: Für eine skalierbare, translationsinvariante Pseudometrik $d : V \times V \to \mathbb{K}$ ist $d_{(\|-\|_d)} = d$. Für eine Halbnorm $\|-\| : V \to \mathbb{K}$ ist $\|-\|_{(d_{\|-\|})} = \|-\|$. Die vorgestellten Kontruktionen definieren also ein Paar zueinander inverser Bijektionen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{skalierbare, translationsinvariante} \\ \text{Pseudometriken auf } V \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{Halbnormen auf } V\}$$

Zeige ferner, daß sich diese Abbildungen einschränken zu Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{skalierbare, translationsinvariante} \\ \text{Metriken auf } V \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{Normen auf } V\}$$

Aufgabe 2. Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ lauter $\mathbb{K}$-metrische Räume. Sei $\|-\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^m$. Zeige:

1. Die Abbildung

$$((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) \mapsto d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_m(x_m, y_m)$$

ist eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times \cdots \times X_m$.

2. Die Abbildung

$$((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) \mapsto \max(d_1(x_1, y_1), \dots, d_m(x_m, y_m))$$

ist eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Aufgabe 3. Folgende Aussage wäre eine Verallgemeinerung der beiden vorigen Beispiele. Zeige, daß sie jedoch falsch ist:

> Seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ lauter $\mathbb{K}$-metrische Räume. Sei $\|-\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Abbildung
>
> $$((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) \mapsto \left\| \begin{pmatrix} d_1(x_1, y_1) \\ \vdots \\ d_m(x_m, y_m) \end{pmatrix} \right\|$$
>
> eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Zum Knobeln: wie sehen diejenigen Normen aus, für die das stimmt?

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ist

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \mid 0 \leq \alpha, \beta \text{ und } \alpha + \beta = 1\}$$

die <u>Strecke</u> zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt <u>konvex</u>, wenn mit je zwei Punkten die Strecke zwischen ihnen ganz in A enthalten ist.

Zeige oder widerlege: Für jede Norm $\|-\|$ auf V ist der Einheitball

$$\{\mathbf{u} \in V \mid \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$$

konvex.