

Analysis II

2ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 28.4., 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibearbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Sei X eine Menge. Gib eine Metrik auf X an, die die diskrete Topologie induziert.

Aufgabe 2. Zeige: Ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum ist genau dann diskret, wenn er Dimension 0 hat.

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und x_\star eine Punktfolge in X . Zeige:

1. x ist Häufungspunkt der Folge x_\star genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)\} \text{ ist unendlich}$$

2. x_\star konvergiert genau dann gegen x , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \notin \mathbb{B}_\varepsilon(x)\} \text{ ist endlich}$$

Aufgabe 4. Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeige oder widerlege durch Gegenbeispiel:

1. Sind die Abbildungen f und g stetig, so ist die Verkettung $g \circ f$ stetig.
2. Ist f stetig im Punkt $x \in X$ und ist g stetig im Punkt $f(x) \in Y$, so ist die Verkettung $g \circ f$ stetig im Punkt x .