# Analysis II

3ter Übungszettel

Abgabe: Freitag, 6.5., 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

*Aufschreiben* sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

**Aufgabe 1.** Wir betrachten die Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ r &\mapsto r^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Zeige: Die Wurzelfunktion $f$ ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig auf dem Intervall $[0,1]$.

Sei $K$ ein angeordneter Körper. Sei $(X, d : X \times X \to K)$ ein $K$-metrischer Raum. Mit $\mathrm{Cauchy}(X)$ bezeichnen wir die Menge der Cauchy-Folgen in $X$ und mit $\overline{X}$ die Menge der Cauchy-Parallelitätsklassen in $\mathrm{Cauchy}(X)$. Für eine Cauchy-Folge $x_\star$ bezeichne $[x_\star]$ die Cauchy-Parallelitätsklasse von $x_\star$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : X &\longrightarrow \overline{X} \\ x &\mapsto [\bigstar \mapsto x] \end{aligned}$$

nennen wir die <u>kanonische Einbettung</u>.

**Aufgabe 2.** Zeige, daß die kanonische Einbettung injektiv ist (wie der Name nahelegt).

**Aufgabe 3.** Sei nun $X$ ein vollständiger metrischer Raum. Zeige, daß die kanonische Einbettung in diesem Fall bijektiv ist.

**Aufgabe 4.** Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Relation:

$$(m_1, n_1) \equiv (m_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

Zeige, daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist und beschreibe eine natürliche Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ aller $\equiv$-Äquivalenzklassen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.