Analysis II

4ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 12.5., 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibearbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$. Für einen Punkt $x \in X$ ist eine Umgebungsbasis eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ (also eine Menge offener Mengen) derart, daß gilt:

1. Die Menge $\mathcal{U}$ enthält nur offene Umgebungen von x .
2. Jede offene Umgebung von x ist Obermenge eines Elements von $\mathcal{U}$.

Beispiel: die Kugeln mit positiven rationalen Radien um 0 sind eine Umgebungsbasis der 0 in $\mathbb{R}$.

Eine Basis der Topologie ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ derart, daß gilt:

Jedes Element von $\mathcal{T}$ (also jede offene Menge) ist Vereinigung von offenen Mengen aus der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 1. Zeige: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ist eine Basis der Topologie genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.

Aufgabe 2. Zeige: Sei K ein angeordneter Körper. Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. Das Nullelement in K hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
2. Jedes Element in K hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
3. In K gibt es eine strikt monoton fallende Nullfolge.
4. In K gibt es eine strikt monotone Nullfolge.
5. In K gibt es eine Nullfolge, in der kein Folgenglied verschwindet.

Aufgabe 3. Zeige: Die kanonische Einbettung $\iota : K \hookrightarrow \overline{K}$ ist ein Körpermorphismus.

Aufgabe 4. Zeige: Der Körper $\overline{K}$ ist bezüglich der in 2016-04-29 definierten Anordnung ein angeordneter Körper.