Analysis II

5ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 19.5., 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Wir erweitern die Definition von Äquivalenz auf Halbnormen. Seien $\|-\|$ und $|-|$ zwei Halbnormen auf dem Vektorraum V. Wir sagen, daß $\|-\|$ von $|-|$ <u>dominiert wird</u>, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\|\mathbf{u}\| \leq K|\mathbf{u}| \qquad \forall \mathbf{u} \in V$$

Zwei Halbnormen, die einander wechselseitig dominieren, heißen <u>äquivalent</u>.

Aufgabe 1. Zeige, daß Dominanz von Halbnormen eine reflexive und transitive Relation ist. Folgere, daß Äquivalenz von Halbnormen eine Äquivalenzrelation ist.

Seien E und F Banach-Räume und $U \subseteq E$ eine offene Menge. Ferner seien $f : U \to F$ und $g : U \to F$ zwei Abbildungen. Wir sagen, daß g die Abbildung f an der Stelle $\mathbf{u} \in U$ <u>von höherer als m Ordnung approximiert</u>, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{B}_\delta(\mathbf{u}) \subseteq U \;:\; \|f(\mathbf{v}) - g(\mathbf{v})\|_F \leq \varepsilon \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_E^m$$

Aufgabe 2. Sei g eine Approximation von höherer als erster Ordnung für die Funktion f an der Stelle $\mathbf{u} \in U$. Zeige, daß f an der Stelle $\mathbf{u}$ genau dann stetig ist, wenn g an der Stelle $\mathbf{u}$ stetig ist.

Aufgabe 3. Seien E und F Banach-Räume. Ferner seien $f : E \to F$ und $g : E \to F$ zwei lineare Abbildungen. Dabei sei g an der Stelle 0 eine Approximation höherer als erster Ordnung für f. Zeige, daß dann sogar $f = g$ ist.

Aufgabe 4. Seien E und F Banach-Räume und $f : E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\|f(\mathbf{u})\|_F \leq K\|\mathbf{u}\|_E \qquad \forall \mathbf{u} \in E$$

2. Die Abbildung f ist stetig an der Stelle 0.
3. Die Abbildung f ist an einer Stelle stetig.
4. Die Abbildung f ist stetig.