Analysis II

6ter Übungszettel

Abgabe: Freitag, 27.5., 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibearbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und Y eine abgeschlossene Menge (also mit offenem Komplement). Sei x_* eine konvergente Folge, deren Glieder alle in Y liegen. Zeige, daß der Grenzwert auch in Y liegt. Folgere, daß eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge K des $\mathbb{R}^m$ folgenkompakt ist, d.h., jede Folge, deren Glieder alle in K liegen, hat einen Häufungspunkt in K .

Aufgabe 2. Seien E und F Banachräume, $U \subset E$ sei eine offene Menge, die Abbildungen $f : U \rightarrow F$ und $g : U \rightarrow F$ seien stetig an der Stelle $\mathbf{u} \in U$, und schließlich seien α und β feste reelle Zahlen. Zeige, daß die Funktion

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g : U &\longrightarrow F \\ x &\mapsto \alpha f(x) + \beta g(x) \end{aligned}$$

stetig an der Stelle $\mathbf{u}$ ist.

Aufgabe 3. Seien E und F Banachräume, $U \subset E$ sei eine offene Menge, die Abbildungen $f : U \rightarrow F$ und $g : U \rightarrow F$ seien differenzierbar an der Stelle $\mathbf{u} \in U$, und schließlich seien α und β feste reelle Zahlen. Zeige, daß die Funktion

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g : U &\longrightarrow F \\ x &\mapsto \alpha f(x) + \beta g(x) \end{aligned}$$

differenzierbar an der Stelle $\mathbf{u}$ mit der Ableitung $\alpha D_{\mathbf{u}} f + \beta D_{\mathbf{u}} g$ ist.

Aufgabe 4. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} xyz \\ x + y + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeige, daß f an der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$ differenzierbar ist mit der Ableitung:

$$D_{\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1000x + 100y + 10z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$