Analysis II

7ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 3.6.**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Zeige, daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + y^2 + z^3 \\ x^2 y + y^2 z + z^2 x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

überall differenzierbar ist und berechne die Ableitung

$$\mathrm{D}\, f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Aufgabe 2. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige, daß f stetig aber nicht differenzierbar ist an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Zeige, daß an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ alle Richtungsableitungen existieren. Insbesondere existieren also alle partiellen Ableitungen.

Aufgabe 3. Seien E und F zwei Banachräume. Mit $\mathcal{B}(E; F)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Da stetige Abbildungen beschränkt sind, existiert eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \|{-}\|_{\mathrm{op}} : \mathcal{B}(E; F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \inf \{ K \geq 0 \mid \forall \mathbf{u} \in E \ : \ \|\varphi(\mathbf{u})\| \leq K \|\mathbf{u}\| \} \end{aligned}$$

Zeige, daß $\|{-}\|_{\mathrm{op}}$ eine Norm auf $\mathcal{B}(E; F)$ ist. Wir nennen $\|{-}\|_{\mathrm{op}}$ die <u>Operatornorm</u>.

Aufgabe 4. Seien E und F zwei Banachräume. Mit $\mathcal{B}(E;F)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Dann ist nach der vorigen Aufgabe die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|-\|_{\mathrm{op}} : \mathcal{B}(E;F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \inf \{K \geq 0 \mid \forall \mathbf{u} \in E \ : \ \|\varphi(\mathbf{u})\| \leq K \|\mathbf{u}\|\} \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathcal{B}(E;F)$. Zeige, daß $\mathcal{B}(E;F)$ mit dieser Norm wieder ein Banachraum ist.