Analysis II

8ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 10.6.**, 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibearbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Sei

$$V := \left\{ a_\star \text{ reelle Zahlenfolge} \mid \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ konvergiert absolut} \right\}$$

der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller absolut konvergender reeller Reihen. Zeige, daß die Normen

$$\|a_\star\|_\infty := \max \{|a_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$\|a_\star\|_1 := \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

$$\|a_\star\|_2 := \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2}$$

paarweise inäquivalent sind. Welche Normen dominieren welche anderen?

Aufgabe 2. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(xy)$$

Berechne die Ableitung:

$$Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

und die zweite Ableitung:

$$D^2 f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R}))$$

Bestätige durch direkte Rechnung, daß in diesem Beispiel die zweite Ableitung eine symmetrische Abbildung ist: Für jeden Punkt $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ und Vektoren $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt:

$$\left((D_{\mathbf{u}}^2 f) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left((D_{\mathbf{u}}^2 f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x^2 y^3 \end{aligned}$$

Berechne die Ableitung:

$$Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

die zweite Ableitung:

$$D^2 f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R}))$$

und die dritte Ableitung:

$$D^3 f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})))$$

Die zweite Ableitung hat vier Einträge. Welche davon stimmen überein? Die dritte Ableitung hat acht Einträge. Welche davon stimmen überein?

Aufgabe 4. Sei F ein Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow F$ eine auf ganz I stetig differenzierbare Funktion. Schließlich sei $[a, b] \subseteq I$ ein abgeschlossenes Intervall in I . Zeige:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$