Analysis II

9ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 17.06**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Seien E, F und G Banachräume, $U \subseteq E$ und $V \subset F$ offene Mengen und $f : U \to V$ und $g : V \to G$ zweifach differenzierbare Abbildungen. Berechne die zweite Ableitung der Verkettung $g \circ f$.

Aufgabe 2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, daß die k-ten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f : U \to \mathbb{R}$$

nicht von der Differentationsreihenfolge abhängen, d.h.:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_2)}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}} f$$

für jede Umordnung σ. Eine <u>Umordnung</u> / <u>Permutation</u> ist eine Bijektion $\sigma : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Also gilt beispielsweise für $k = 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_5} f = \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_5} f = \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_2} f$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_5} f = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_2} f = \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f = \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_5} f$$

Aufgabe 3. Zeige, daß die Verkettung k-mal stetig differenzierbarer Funktionen wieder k-mal stetig differenzierbar ist. (Hint: Die Ergebnisse aus der Präsenzübung dürfen verwendet werden. Das ist hier hilfreich.)

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Der Laplace-Operator ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Delta : \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist zweimal stetig differenzierbar}\} &\longrightarrow \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\} \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f\end{aligned}$$

Man schreibt dafür auch stark abkürzend:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn Δf die Nullfunktion ist, also wenn gilt:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in U$$

Zeige, daß für $m \geq 3$ die Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &\mapsto \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2\right)^{1-\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

harmonisch auf der punktierten Ebene $U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ist.