Analysis II

10ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 24.06**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir nennen A *total beschränkt* oder *präkompakt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von A durch ε-Bälle gibt.

Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist kompakt (jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung).
2. A ist folgenkompakt (jede Folge in A hat eine Teilfolge, die gegen einen Punkt in A konvergiert).
3. Jede Folge in A hat einen Häufungspunkt in A.
4. Jede offene Überdeckung von A *durch höchstens abzählbar viele Mengen* hat eine endliche Teilüberdeckung.
5. A ist total beschränkt und jede Cauchyfolge in A konvergiert gegen einen Punkt in A.

Hinweis: einige der Äquivalenzen sind aus der Vorlesung bekannt.

Aufgabe 2. Sei F ein Banachraum, und seien $f, g : [a, b] \to F$ zwei Cauch-integrierbare Funktionen. Zeige

$$\left\| \int_a^b (f - g) \right\| \leq (b - a) \, \|f - g\|_\infty$$

Aufgabe 3. Seien $f_\star$ und $g_\star$ zwei Folgen von Treppenfunktionen von $[a, b]$ in den Banachraum F. Zeige: Sind $f_\star$ und $g_\star$ Cauch-parallel, so sind auch die Folgen $\int_a^b f_\star$ und $\int_a^b g_\star$ in F Cauchy-parallel.

Aufgabe 4. Betrachte dei Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } nx = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige, daß f integrierbar ist (im Sinne der Analysis I, also Riemann-integrierbar), aber nicht Cauchy-integrierbar.