Analysis II

11ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 01.07**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Seien E und F Banachräume, $\varphi : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung und $g : [a, b] \to E$ eine Cauchy-integrierbare Abbildung. Zeige, daß $\varphi \circ g : [a, b] \to F$ ebenfalls Cauchy-integrierbar ist mit

$$\int_a^b \varphi \circ g = \varphi\left(\int_a^b g\right)$$

Folgere, daß für eine k-mal stetig differenzierbare Funktion $f : E \to F$ und eine stetige Funktion $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^1 \theta(t)\, \mathrm{D}^{(k)}_{\mathbf{u}+t\mathbf{h}} f[\mathbf{h}]^k \,\mathrm{d}\, t = \left(\int_0^1 \theta(t)\, \mathrm{D}^{(k)}_{\mathbf{u}+t\mathbf{h}} f\right) [\mathbf{h}]^k$$

Aufgabe 2. Seien E ein Banachraum, $U \subseteq E$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Abbildung, deren erste Ableitung $\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f$ an der Stelle $\mathbf{u} \in U$ verschwindet und deren zweite Ableitung $\mathrm{D}^{(2)}_{\mathbf{u}} f : E \times E \to \mathbb{R}$ dort indefinit ist. Zeige, daß f an der Stelle $\mathbf{u}$ kein lokales Extremum hat.

Aufgabe 3. Bestimme die Taylorentwicklung von

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) \times (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{x-y}{x+y} \end{aligned}$$

bis einschließlich der Glieder quadratischer Ordnung.

Aufgabe 4. Betrachte die Funktionenschar

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x^3 - y^3 + 3txy \end{aligned}$$

Bestimme die kritischen Punkte (verschwindende erste Ableitung) und entscheide, ob dort jeweils Sattelpunkte, isolierte Maxima, oder Minima vorliegen. Beachte die Abhängigkeit vom Parameter t.