Analysis II

12ter Übungszettel (2te Fassung)

Abgabe: **Freitag, 08.07**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Sei E ein Banachraum und $\mathbb{B}_\delta(\mathbf{u})$ ein offener Ball in E. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $t \in I$ ein innerer Punkt. Zeige, daß die Menge

$$\left\{ f : I \to \mathbb{B}_\delta(\mathbf{u}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stetig} \\ f(t) = \mathbf{u} \end{array} \right\}$$

bezüglich der Supremumsmetrik

$$d(f,g) := \sup \left\{ \|f(s) - g(s)\|_E \mid s \in I \right\}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 2. Sei E ein Banachraum und $X : E \to E$ ein auf ganz E definiertes global Lipschits-stetiges Vektorfeld. Zeige, daß es durch jeden Punkt $\mathbf{u} \in E$ eine *auf ganz* $\mathbb{R}$ *definierte* Integralkurve gibt.

Aufgabe 3. Zeige, daß die Integralkurven des Vektorfeldes

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

konzentrische Kreise um den Ursprung $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind.

Aufgabe 4. Zeige, daß das Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 + x^2 \end{aligned}$$

keine Integralkurven hat, deren Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ ist.