Analysis II

13ter Übungszettel

Abgabe: **Freitag, 15.07**, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Erinnerung: Am **15.07.** findet um **14 Uhr s.t.** in **H12** eine **Vorstellung** des fachwissenschaftlichen **Lehrangebot**s der Fakultaet fuer Mathematik statt.

Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Um die Korrekturbelastung der Tutoren in Grenzen zu halten, ist *Abgabe in Paaren* gestattet. D.h., Sie tun sich mit einer anderen Person zusammen geben nur eine Lösung ab, die dann für beide gewertet wird.

Aufschreiben sollen Sie aber allein. Kennzeichnen Sie also, wer die jeweilige Aufgabe aufschreibt. Wenn Sie als Paar vier Aufgaben bearbeiten, schreibt jeder zwei auf. Wenn Sie drei Aufgaben bearbeiten, teilen Sie die Aufschreibarbeit in zwei zu eins. Wenn Sie insgesamt nur zwei Aufgaben bearbeiten, ist das Verhältnis eins zu eins. Und wenn ihr Team nur eine Aufgabe bearbeiten, ist es egal, wer aufschreibt.

Aufgabe 1. Seien X und Y metrische Räume. E sei ein Banachraum. Eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathrm{C}_b(Y;E) \\ x &\mapsto f_x \end{aligned}$$

induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} g : X \times Y &\longrightarrow E \\ (x,y) &\mapsto f_x(y) \end{aligned}$$

Wir betrachten $X \times Y$ als metrischen Raum bezüglich der Metrik

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\left(d_X(x_1,x_2)\,,d_Y(y_1,y_2)\right)$$

Zeige, daß g stetig ist.

Aufgabe 2. Sei

$$\begin{aligned} X : I \times U &\longrightarrow E \\ (t,\mathbf{u}) &\mapsto X_t(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld, das im Raum uniform Lipschits-stetig ist. D.h., es gibt $L > 0$ mit:

$$\forall t \in t \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in U \;\;:\;\; \|X_t(\mathbf{u}) - X_t(\mathbf{v})\| \leq L\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$$

Modifiziere den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung und zeige, daß für $t_0 \in t$ und $\mathbf{u}_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Integralkurve $\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U$ mit $\gamma(t_0) = \mathbf{u}_0$ existiert.

Hinweis: hier betrachtet man die durch

$$\Psi_\gamma(t) := \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s)) \, \mathrm{d}\, s$$

definierte Iteration. Wähle ε geeignet und zeige, daß Ψ wohldefiniert und eine Kontraktion ist.

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um die Stelle $x_0 \in I$. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung f' nirgends verschwindet. Ziel der Aufgabe ist ein alternativer Beweis des Umkehrsatzes aus der Analysis I:

Betrachte das Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{f'(t)} \end{aligned}$$

Zeige, daß X eine lokale Integralkurve $\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to I$ durch $x_0 = \gamma(t_0)$ für $t_0 := f(x_0)$ hat.

Zeige nun, daß die Integralkurve eine stetig differenzierbare lokale Inverse zur Funktion f an der Stelle x_0 definiert.

Aufgabe 4. Betrachte das zeitunabhängige affine Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimme den Fluß, d.h., finde die allgemeine Formel für eine Integralkurve γ durch $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right) = \gamma(0)$.