Der Satz von Arzela-Ascoli

Beob: Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\delta > 0$. Dann hat die Überdeckung

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathbb{B}_\delta(x)$$

eine endliche Teilüberdeckung:

$$X = \mathbb{B}_\delta(x_1) \cup \dots \cup \mathbb{B}_\delta(x_m)$$

Wir nennen $N := \{x_1, \dots, x_m\}$ ein <u>δ-Netz</u> für X. Jeder Punkt $x \in X$ hat Abstand $< \delta$ zu N.

Für $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ sei N_k ein $\frac{1}{k}$-Netz für X. Dann ist

$$N := N_k$$

abzählbar und dicht in X.

Also: Jeder kompakte metrische Raum ist <u>separabel</u> (hat eine abzählbare dichte Teilmenge).

Def: Sei Y ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ heißt <u>relativ kompakt</u> wenn jede Folge (a_n) in A eine in Y konvergente Teilfolge hat.

Beob: Jede Teilmenge einer relativ kompakten Menge $A \subseteq Y$ ist relativ kompakt.

Beob: Sei $f_n : X \to Y$ eine Folge von Funktionen mit:

$$\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y \quad \text{rel. komp.} \quad \forall x \in X$$

Sei $A \subseteq X$ abzählbar. Dann gibt es eine Teilfolge g_n, so daß $g_n(a)$ für jeden Punkt $a \in A$ konvergiert.

Bew: Wähle eine Abzählung $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Da $\{f_n(a_1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ rel. kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(f_{1,n})$ von (f_n) derart, daß $\left(f_{1,n}(a_1)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert.

Denn ist $\{f_{1,n}(a_2) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{f_n(a_2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ rel. kompakt in Y und es gibt eine Teilfolge $(f_{2,n})$ von $(f_{1,n})$, sodass $(f_{2,n}(a_2))_{n \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert. Als Teilfolge von $(f_{1,n}(a_1))$ konvergiert außerdem $(f_{2,n}(a_1))$.

Also

$f_{2,n}$ konvergiert bei a_1 und a_2

Analog erhalten wir Teilfolgen $(f_{3,n}), \ldots$ mit

$(f_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert bei $a_1, \ldots, a_k$

Setze $g_n := f_{n,n}$. (Diagonalargument!)

Dann konvergiert $g_n(a_k)$ für jedes k. $\boxtimes$

Def: X, Y: metrische Räume

Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen $X \to Y$ heißt gleichgradig stetig in $x \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{F} \; \forall \bar{x} \in X:$$

$$d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ heißt gleichgradig stetig, wenn $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist. $\mathcal{F}$ heist gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{F}, \; x, \bar{x} \in X:$$

$$d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

Erinnerung:

$$C_b(X,Y) := \{ f: X \to Y \mid f: \text{stetig und beschränkt} \}$$

$C_b(X,Y)$ ist ein metrischer Raum bezüglich

$$\operatorname{dist}(f,g) := \sup\{ d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X \}$$

Beob: (f_n) : Folge in $C_b(X;Y)$

$g \in C_b(X,Y)$

$f_n \to g$ in $C_b(X,Y)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m,n \geq N: \operatorname{dist}(f_n, g) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m,n \geq N \; \forall x \in X:$

$$d_Y(f_n(x), g(x)) \leq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen g.

<u>Satz</u> (schwacher Arzela-Ascoli)

X : kompakter metrischer Raum

Y : vollständiger metrischer Raum

$\mathcal{F} \subseteq C(X;Y) = C_b(X;Y)$

1) $\forall\, x \in X$: $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ ist rel. kompakt.

2) $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig.

<u>Dann</u>: $\mathcal{F}$ ist rel. kompakt in $C(X;Y)$,

<u>d.h.</u> Jede Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ hat eine Teilfolge, die im metrischen Raum $C(X;Y)$ gegen eine stetige Abb.

$$g : X \to Y$$

konvergiert.

⌜ <u>D.h.</u>: die Teilfolge konvergiert gleichmäßig gegen g. ⌟

<u>Bew</u>: Wähle $N := \bigcup N_n \subseteq X$ mit $\frac{1}{n}$-Netzen.

Zur Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ wähle eine Teilfolge (g_n), die auf N konvergiert:

$\left(g_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\forall x \in N$.

<u>Beh:</u> (g_n) ist eine Cauchyfolge in $C_b(X;Y) = C(X;Y)$.

⌜Sei $\varepsilon > 0$. $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Wähle $\delta > 0$ mit:

$$\forall x, \bar{x} \in X,\ f \in \mathcal{F}:$$

$$d(x, \bar{x}) < \delta \implies d(f(x), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Ferner gibt es Punkte $x_1, \dots, x_m \in N$ mit

$$\forall x \in X\ \exists i: \quad d(x, x_i) < \delta$$

Nun gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m > N, i \quad : \quad d(f_m(x_i), f_n(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

<u>Denn:</u>

$$\begin{aligned} d(f_m(x), f_n(x)) \leq\ & d(f_m(x), f_m(\bar{x})) && < \frac{\varepsilon}{4} \\ &+ d(f_m(\bar{x}), f_n(\bar{x})) && < \frac{\varepsilon}{4} \\ &+ d(f_n(\bar{x}), f_n(x)) && < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Also: $d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{3\varepsilon}{4} \quad \forall x \in X.$

Wir bilden das Supremum:

$$d(f_m, f_n) \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon \qquad \lrcorner \square$$

Also:

X : metrischer Raum, kompakt

V : $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension

⌜$\Rightarrow$ metrisch, eigentlich, vollständig⌟

$\mathcal{C}(X;V)$: $\{X \to V$: stetig$\}$ mit $\|-\|_\infty$-Norm

$\|f\|_\infty := \sup\{f(x) \mid x \in X\}$

⌜$\mathcal{C}(X,V)$ ist vollständiger metrischer Raum. ⌟

$M :\subseteq \mathcal{C}(X,V)$

Sei M

(1) beschränkt

(2) gleichmäßig gleichgradig stetig

⌜d.h.:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in M, x,y \in X$:

$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ⌟

Dann: M ist rel. kompakt. D.h. der Abschluß $\overline{M}$ ist kompakt in $\mathcal{C}(X,V)$.

Lemma: V: $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$

$D :\subseteq \mathbb{R} \times V$, offen

$F: D \to V$ stetiges Vektorfeld

$K :\subseteq D$ kompakt

Dann gibt es $\eta > 0$ und $c > 0$

sowie $K' \subseteq D$ kompakt, so daß:

$\forall\, (a, \underline{b}) \in K \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\ f : [a-\eta, a+\eta] \to V$:

1) f stückweise linear.
2) f hat Lipschitzkonstante c
3) Der Graph von f ist in K' enthalten
4) $f(a) = \underline{b}$
5) An allen Stellen x, an denen f differenzierbar ist, gilt:

$$\| f'(x) - F(x, f(x)) \| < \varepsilon$$

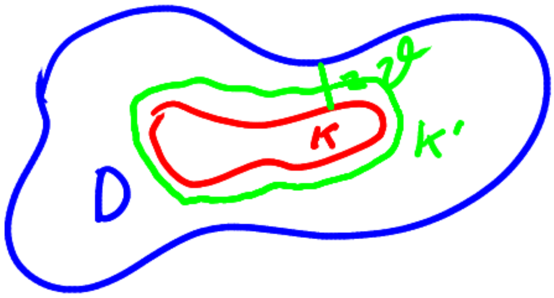
⌈So ein f heißt auch Eulerscher Polygonzug.⌋

Bew: Auf $\mathbb{R}\times V$ verwenden wir die Maximumsnorm:

$$\|(t,\underline{v})\| := \max(|t|, \|\underline{v}\|)$$

Beob: $\left.\begin{array}{l} D^c := \mathbb{R}\times V \setminus D \text{ abg} \\ K : \text{kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{d(D^c, K)}_{=: 2\vartheta} > 0$

Setze: $K' := \overline{\mathbb{B}_\vartheta(K)} \subseteq \mathbb{R}\times V$, kompakt



Beob: $K' \subseteq D$

Beob: $\left.\begin{array}{l} F : \text{stetig} \\ K' : \text{kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow F|_{K'}$ beschränkt und gleichmäßig stetig

D.h.: $\exists\, c > 1\ \forall (x,\underline{y}) \in K' : \|F(x,\underline{y})\| \leq c$

(*) **und:** $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x_1,\underline{y}_1), (x_2,\underline{y}_2) \in K'$:

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ und } \|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\| < \delta \Rightarrow \|F(x_1,\underline{y}_1) - F(x_2,\underline{y}_2)\| < \varepsilon$$

Wähle $\eta > 0$ mit: $\eta < c\eta \leq \vartheta$.

Sei nun $(a,\underline{b}) \in K$ und $\varepsilon > 0$.

<u>Wähle:</u> δ nach $(*)$ und Stützstellen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = a + \eta \quad \text{mit:}$$

$$x_{j+1} - x_j < \delta/c < \delta$$

<u>Definiere</u> rekursiv:

$$\underline{y}_0 := \underline{b}$$

$$\underline{y}_{j+1} := \underline{y}_j + (x_{j+1} - x_j)\, F(x_j, \underline{y}_j)$$

<u>Beh:</u> $\forall\, j = 0, \dots, r: \quad \| \underline{y}_j - \underline{b} \| \le c(x_j - a)$

$\ulcorner$ Verankerung: $j = 0$ ✓

Schritt:

$$\| \underline{y}_{j+1} - \underline{b} \| \le \| \underline{y}_{j+1} - \underline{y}_j \| + \| \underline{y}_j - b \|$$

$$\le \| (x_{j+1} - x_j)\, F(x_j, \underline{y}_j) \| + c\,(x_j - a)$$

$$\le (x_{j+1} - x_j) \underbrace{\| F(x_j, \underline{y}_j) \|}_{\le c} + (x_j - a)\, c$$

$$\le (x_{j+1} - a)\, c. \qquad \lrcorner$$

<u>Kor:</u> $\forall\, j = 0, \dots, r: \quad (x_j, \underline{y}_j) \in K'$

$\ulcorner \quad \| \underline{y}_j - \underline{b} \| \le c\,(x_j - a) \le c\,\eta \le \vartheta \quad \lrcorner$

<u>Definiere</u> $f : [a, a+\eta] \longrightarrow V$ durch lineare Interpolation mit $f(x_j) = \underline{y}_j$.

Beob: Der Graph von f liegt in $K' \subseteq D$.

Beob: Die Funktion f hat auf dem Intervall $[x_j, x_{j+1}]$ die Steigung

$$f'(x) = \frac{\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_j}{x_{j+1} - x_j} = F(x_j, \underline{y}_j)$$

Kor: Die Funktion f ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante c.

Kor: Auf $[x_j, x_{j+1}]$ gilt:

1) $\| f(x) - f(x_j) \| \leq c\,(x - x_j) < \delta$

2) $\| f'(x) - F(x, f(x)) \| = \| F(x_j, \underline{y}_j) - F(x, f(x)) \| < \varepsilon$

$\ulcorner$ wegen $|x - x_j| < \delta \lrcorner$

Also: $\| f'(x) - F(x, f(x)) \| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, a+\eta]$

Analog: f auf $[a-\eta, a]$. $\boxtimes$

Satz von Peano:

E: $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim E < \infty$

$D :\subseteq \mathbb{R} \times V$ offen

$F : D \to V$ stetig

$K :\subseteq D$ kompakt

Dann gibt es $\eta > 0$, so daß für jeden Punkt $(a, \underline{b}) \in K$ eine Lösung

$$f : \underbrace{[a-\eta, a+\eta]}_{=: I} \to V$$

der DGL

$$\underline{y}' = F(x, \underline{y})$$

mit $f(a) = \underline{b}$ existiert.

Bew: Wähle $\eta > 0$ und $c > 0$ nach dem Lemma.

Sei $f_n : [a-\eta, a+\eta] \to V$ der Polygonzug zur Genauigkeit $\varepsilon := 1/n$ mit L-konst. c.

Hauptsatz:

nur an endl. vielen Stellen undef.

$$f_n(x) - \underline{b} = \int_a^x f_n'(t)\, dt$$

Kor. $\left\| f_n(x) - \underline{b} - \int_a^x F(t, f_n(t))\, dt \right\| \leq \frac{1}{n} \eta$

Beob: $M := \{ f_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig.

⌜Alle f_n sind Lipschitzstetig mit uniformer L-Konstante c. ⌟

Beob: $\| f_n(x) - \underline{b} \| \leq c|x-a| \leq c\eta$

Kor: M ist beschränkt.

Arzela-Ascoli: $\overline{M}$ ist kompakt in $\mathcal{C}(I,V)$

Sei nun $f: I \to V$ ein Häufungspunkt der $\{f_n\}$ und (g_n) eine Teilfolge, die gegen f konvergiert.

Dann: $f(x) = \underline{b} + \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^x F(t, g_k(t))\, dt$

Bem: Der Graph von g_n liegt in $K' \subseteq D$ kompakt.
F ist auf K' gleichmäßig stetig.

Kor: $\big(t \mapsto F(t, g_n(t))\big)_n$ ist eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge.

Kor: $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^x F(t, q_k(t))\,dt = \int_a^x \lim F(t, q_k(t))\,dt$

$$= \int_a^x F(t, f(t))\,dt$$

Also: $f(x) - \underline{b} = \int_a^x F(t, f(t))\,dt$

Darum: f ist Lösung des Anfangswert-problems. $\boxtimes$

Lemma: V, D, $F : D \to V$ wie eben.

$K \subseteq D$ kompakt. $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.

$f : I \to V$ Lösung von $\underline{y}' = F(x, \underline{y})$.

1) Liegt der Graph von f ganz in K, so läßt sich f auf den Abschluß $\overline{I}$ fortsetzen.

2) Liegt ein Punkt $(a, \underline{b}) \in K$ auf dem Graphen, d.h.: $\underline{b} = f(a)$, so gibt es eine Fortsetzung von f, deren Graph sowohl Punkte $(x, \underline{y}) \notin K$ mit $x > a$ als auch solche mit $x < a$ enthält.

__Bew:__ F ist auf K beschränkt. Daher ist f' auf I beschränkt und f gleichmäßig stetig. Also läßt sich f auf $\overline{I}$ stetig fortsetzen.

Mit $a \in I$ und $\underline{b} = f(a)$ ist dann:

$$f(x) = \underline{b} + \int_a^x F(t, f(t))\, dt \qquad (*)$$

Beide Seiten sind stetig auf I. Darum gilt $(*)$ auch für die Fortsetzung auf $\overline{I}$.

Zu (2) betrachten wir nur die Fortsetzung nach rechts. Wähle $\eta > 0$ und $c > 0$ zu $K \subseteq D$ wie im Satz von Peano.

__Sei:__ $x_1 := \sup I \in I$: o.B.d.A abg. nach (1)

$\underline{y}_1 := f(x_1)$

Ist $(x_1, \underline{y}_1) \in K$, so läßt sich f fortsetzen auf $[a, x_1 + \eta]$.

Sei: $x_2 := x_1 + \eta \qquad \underline{y}_2 := f(x_2)$

Ist $(x_2, \underline{y}_2) \in K \ldots$

Also: Wir erhalten Fortsetzungen auf

$[a, x_1 + k\eta]$.

Beob: Da K beschränkt ($\Leftarrow$ kompakt) ist, muß daß zu einem Ende kommen. $\boxtimes$

Satz: V: $\mathbb{R}$-VR, $\dim V < \infty$

$D :\subseteq \mathbb{R} \times V$, offen

$F : D \to V$, stetiges Vektorfeld

1) Jede Lösung der DGL

$$\underline{y}' = F(x, \underline{y})$$

läßt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen.

2) Der Graph einer maximalen Lösung ist abgeschlossen in D.

<u>Bew:</u> $K_n := \left\{ (x, \underline{y}) \in \mathbb{R} \times V \;\middle|\; \begin{array}{l} d((x,\underline{y}), D^c) \geq 1/n \\ \|(x,\underline{y})\| \leq n \end{array} \right\}$

Dann ist K_n kompakt und $D = \bigcup K_n$.

Wir können eine Lösung nach dem Lemma so ausdehnen, daß wir eine Folge $f_n : [x_0, x_n] \to V$ von kompatiblen Lösungen erhalten mit

$$(x_n, f(x_n)) \notin K_n$$

Wir verkleben die f_n zu einer Lösung $f_+ : [x_0, x_+) \to V$. Der Graph von f_+ ist in keiner kompakten Teilmenge von D enthalten.

<u>Beh:</u> f_+ läßt sich nicht nach rechts fortsetzen.

⌈ Ließe sich f_+ auf $[x_0, x_+]$ fortsetzen, so wäre der Graph von f_+ enthalten in einer kompakten Teilmenge von D. ↯ ⌋

Analog: f_-

⇝ maximale Lösung.

Sei nun $f: I \to V$ eine maximale Lösung.

Beh: Der Graph von f ist abgeschlossen in D.

⌈ Sei $(a, \underline{b}) \in D$ ein Häufungspunkt des Graphen. Sei $(x_n, \underline{y}_n = f(x_n))$ eine Folge, die gegen $(a, \underline{b})$ konvergiert.

Z.z.: $a \in I$ und $f(a) = \underline{b}$.

Beh: $a \in I$.

⌈ Sei $a \notin I$. Dann: $a \in \{\sup I, \inf I\}$.

Wir betrachten nur $a = \sup I$.

D ist offen.

Also: $\exists \varepsilon > 0: \quad K := \overline{\mathbb{B}_{2\varepsilon}(a, \underline{b})} \subseteq D$

$\exists c > 0: \quad \| F|_K \| \leq c$

Wähle: $\delta > 0: \quad \delta < \varepsilon$ und $c\delta < \varepsilon$

$n \in \mathbb{N}: \quad |x_n - a| < \delta \quad \|\underline{y}_n - \underline{b}\| < \varepsilon$

Beh: Für jedes $x \in [x_n, a)$ gilt:

$$\| f(x) - \underline{y}_n \| < \varepsilon$$

⌈ $\{x \in [x_n, a) \mid \|f(x) - \underline{y}_n\| \geq \varepsilon\}$ ist (rel.) abg.
also kompakt. Darum hat die Menge ein Minimum $\hat{x}$, wenn sie nicht leer ist.
Für $x \in [x_n, \hat{x}]$ ist $(x, f(x)) \in K$.

<u>Damit:</u>

$$\|f'(x)\| = \|F(x, f(x))\| \leq c$$

$$\Rightarrow \|f(\hat{x}) - \underset{\underline{y}_n}{\underset{\shortparallel}{f(x_n)}}\| \leq c\,|\hat{x} - x_n| \leq c\,\delta < \varepsilon$$

$\lightning$ ⌋

<u>Kor:</u> $\forall\ x \in [x_n, a) :\ (x, f(x)) \in K$.

⌈ $\|f(x) - \underline{b}\| < 2\varepsilon$. ⌋

Lemma, Punkt 1 $\underset{\text{Kor}}{\Longrightarrow}$ f läßt sich auf $[x_n, a]$ fortsetzen. $\lightning$ zur Maximalität von f. ⌋

<u>Beh:</u> $\underline{b} = f(a)$.

⌈ f ist stetig. $\underline{b} = \lim \underline{y}_n = \lim f(x_n)$
$= f(\lim x_n) = f(a)$ ⌋ $\boxtimes$