Differentialgleichungen

Steinbruch – Präsenzügungsaufgaben

Aufgabe 1. Welche Kurven schneiden alle Ursprungsgeraden unter konstantem Winkel α? Für $\alpha = 0$ sind dies offensichtlich die Ursprungsgeraden selbst und für $\alpha = 90^\circ$ sind dies konzentrische Kreise mit dem Ursprung als gemeinsamem Mittelpunkt. Hint: in Polarkoordinaten (r, φ) lassen sich Ursprungsgeraden beschreiben durch $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = 0$.

Aufgabe 2. Löse die Differentialgleichungen

$$y' = \sin(x)y \qquad y = \sin(x)y' \qquad y' = \sin(x)y^2$$

$$(1 + x^2)y' = xy \qquad 3xy' = -y \quad y' \cos(x) = y \sin(x)$$

Aufgabe 3. Gib Differentialgleichungen an für folgende Kurvenscharen:

$$\begin{aligned} y_a &: x \mapsto a + \sin(x) \\ y_b &: x \mapsto b \sin(x) \\ y_c &: x \mapsto \sin(cx) \\ y_d &: x \mapsto d / \sin(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\left\| \begin{array}{r} y' = 1/y \\ 0 = y(-2) \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{r} y' = y/x \\ -4 = y(3) \end{array} \right\|$$

Aufgabe 5. Finde allgemeine Lösungen zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= \sin(x) + y \\ x^2 y' &= y^2 + xy \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei $\omega = x \,\mathrm{d}y$. Zeige, daß das Wegintegral von ω über ein beliebiges achsenparalleles Rechteck gerade dessen orientierte Flächeninhalt ist.

Aufgabe 7. Auf eine senkrecht nach oben geschossene Kanonenkugel wirkt die Erdbeschleunigung. Sie ist proportional zur Masse des Balles also unabhängig von Höhe und Geschwindigkeit. Der Luftwiderstand ist für große Geschwindigkeiten proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (mit einer Proportionalitätskonstante, die von der Kugel abhängt). Sei $y(t)$ die Höhe zur Zeit t. Dann erhalten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = -a - b(y')^2$$

Sie bestimmt das Verhalten der Kugel, solang die Geschwindigkeit groß ist.

Beobachte, daß dies eigentlich eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Unbekannten y' ist. Löse für $a, b > 0$ das Anfangswertproblem

$$\left\| \begin{array}{r} y'' = -a - by' \\ y'(0) = v \\ y(0) = 0 \end{array} \right\|$$

Aufgabe 8. Finde die allgemeine Lösung zu $y''y' = 1$.

Aufgabe 9. Löse das Anfangswertproblem

$$\left| \begin{array}{r} y'' = \exp(-y') \\ 0 = y(0) \\ 1 = y'(0) \end{array} \right|$$

Aufgabe 10. Sei $\alpha > 0$. Löse:

$$y'' = \alpha y$$

Aufgabe 11. Sei $X : I \times U \to E$ ein 15-mal stetig differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : J \to U$ eine stetige Integralkurve von X. Zeige, daß γ 16-mal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 12. Zeige, daß die Funktion $x \mapsto \sqrt{|x|}$ nicht Lipschitz -stetig ist.

Aufgabe 13. Löse das Anfangswertproblem

$$\left\| \begin{array}{l} y' = y^2 \\ 1 = y(0) \end{array} \right\|$$

Mache dazu einen Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

Setze die formale Ableitung

$$y'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$$

und das formale Quadrat

$$y^2 = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} x^k$$

in die Differentialgleichung ein. Nun bestimme rekursiv die Koeffizienten a_k. Dabei ergibt sich $a_0 = 1$ aus der Anfangsbedingung.

Löse das Anfangswertproblem auch durch Trennen der Veränderlichen und zeige, daß die eben gefundene Potenzreihe die Taylorentwicklung der hier gefundenen Lösung ist.

Aufgabe 14. Zeige, daß jede differenzierbare Abbildung

$$f : I \times U \to E$$

lokal uniform Lipschitz-stetig im Raum ist, d.h.: für jede kompakte Teilmenge $K \subset I \times U$ gibt es ein $L > 0$ mit:

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\| \quad \text{für alle } (t,u),(t,v) \in K$$

Hm ..., da wir von Banachräumen sprechen schlage ich eine andere Bedingung vor: Für jedes Paar $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es $\varepsilon, L > 0$, so daß

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\| \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \text{ und alle } u, v \in \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$$

Aufgabe 15. Sei X eine Menge und Y ein metrischer Raum. Mit $\mathrm{B}(X;Y)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y. Zeige, daß durch

$$\operatorname{dist}(f,g) := \sup\{\operatorname{dist}_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

eine Metrik auf $\mathrm{B}(X;Y)$ erklärt ist.

Aufgabe 16. In der Vorlesung habe ich den Satz von Picard-Lidelöf unter der Voraussetzung formuliert, daß das stetige Vektorfeld $X : I \times U \to E$ uniform Lipschitz-stetig im Raum ist. Zeige, daß der Satz auch unter der schwächeren Annahme gilt, daß X l o k a l uniform Lipschitz-stetig im Raum ist.

Aufgabe 17. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f sei überdies Lipschitz-stetig. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld:

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ yg(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Zeige unter Angabe eines Beispiels für f und g, daß X nicht unbedingt lokal Lipschitz-stetig ist (Uniformität spielt bei zeitunabhängigen Vektorfeldern keine Rolle: sie wäre automatisch gegeben).

2. Zeige, daß X dennoch eindeutige Integralkurven hat, d.h.: zu jedem Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und zu jeder Zeit t_0 gibt es genau eine maximale Integralkurve γ mit:

   $$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

   Fragen: Wird die Lipschitz-Stetigkeit von f wirklich benötigt? Ist eine maximale Lösung stets für alle Zeiten, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

Aufgabe 18. Seien E und F zwei Banachräume. Zeige, daß für eine lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ foglende drei Bedingungen äquivalent sind:

1. Die Abbildung φ ist stetig.
2. Die Abbildung φ ist Lipschitz-stetig.
3. Die Abbildung φ hat endliche Operatornorm.

Aufgabe 19. Für zwei Banachräume E und F sei $\mathrm{B}(E;F)$ die Menge der stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Offensichtlich ist $\mathrm{B}(E;F)$ ein Vektorraum bezüglich punktweiser Addition von Abbildungen und punktweiser Multiplikation mit einem Skalar. Zeige, daß die Operatornorm eine Norm auf $\mathrm{B}(E;F)$ ist und Vollständigkeit bezüglich dieser Norm.

Aufgabe 20. Seien E und F zwei Banachräume. $\mathrm{B}(E;F)$ trage die Topologie, die von der Operatornorm induziert wird. Zeige, daß die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(E;F) \times E &\longrightarrow F \\ (\varphi, v) &\longmapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 21. Zeige, daß die Verkettung zweier Lipschitz-stetiger Abbildungen Lipschitz-stetig ist, wobei sich die Lipschitz-Konstanten höchstens Multipliziere. Folgere, daß die Operatornorm submultiplikativ ist:

$$\|\varphi \circ \psi\|_{\mathrm{op}} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{op}} \|\psi\|_{\mathrm{op}}$$

Aufgabe 22. Sei $X : I \times U \to E$ stetig differenzierbar. Zeige, daß X alle bisher als wünschenwert angesehenen Eigenschaften hat:

- X ist stetig.
- X ist lokal uniform Lipschitz-stetig im Raum.
- X ist lokal beschränkt (zeige auch, daß das gleichbedeutend ist mit lokal uniform beschränkt im Raum).

Aufgabe 23. Sei $X : I \times U \to E$ ein stetiges Vektorfeld und sei $\varepsilon \geq 0$. Eine ε-Integralkurve von X ist eine Funktion

$$\gamma : J \to U$$

die fast überall differenzierbar ist und dort, wo sie es ist, der Bedingung

$$\left\| X_t(\gamma(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t) \right\| \leq \varepsilon$$

genügt.

Sei nun γ_1 eine ε_1-Integralkurve und γ_2 eine ε_2-Integralkurve. Beide seien auf J definiert. Das Vektorfeld X sei auf J uniform Lipschitz-stetig im Raum mit Konstante L.

Zeige, daß für $t, s \in J$ gilt:

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \leq \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| \exp(L|t-s|) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} \exp(L|t-s|)$$

Aufgabe 24. Seien X, Y und Z metrische Räume. X sei kompakt und $f : X \times Y \to Z$ sei stetig. Zeige oder widerlege: Zu jedem $y_0 \in Y$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß gilt

$$\operatorname{dist}(f(x,y), f(x,y_0)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } y \in \mathbb{B}_\delta(y_0)$$

Aufgabe 25. Seien X, Y und Z metrische Räume. X und Y seien kompakt und $f : X \times Y \to Z$ sei stetig. Zeige oder widerlege: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß gilt

$$\operatorname{dist}(f(x,y), f(x',y')) < \varepsilon \qquad \begin{array}{l} \text{für alle } x, x' \in X \text{ mit } \operatorname{dist}(x,x') < \delta \\ \text{und alle } y, y' \in Y \text{ mit } \operatorname{dist}(y,y') < \delta \end{array}$$

Aufgabe 26. Seien X, Y und Z metrische Räume. X sei kompakt und $f : X \times Y \to Z$ sei stetig. Zeige oder widerlege: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß gilt

$$\operatorname{dist}(f(x,y), f(x',y')) < \varepsilon \qquad \begin{array}{l} \text{für alle } x, x' \in X \text{ mit } \operatorname{dist}(x,x') < \delta \\ \text{und alle } y, y' \in Y \text{ mit } \operatorname{dist}(y,y') < \delta \end{array}$$

Aufgabe 27. Sei

$$\begin{aligned} X : I \times E &\longrightarrow E \\ (t,x) &\longmapsto A(t)\,.x + b(t) \end{aligned}$$

ein inhomogenes lineares Vektorfeld mit stetigen Abbildungen $A : I \to \mathrm{B}(E; E)$ und $v : I \to E$.

Zeige, daß jede Integralkurve auf ganz I ausgedehnt werden kann.

Aufgabe 28. Berechne die Matrixexponentialfunktion für Diagonalmatrizen. Zeige:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & & \\ & \exp(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 29. Berechne die Matrixexponentialfunktion für Jordanblöcke $J_k(\lambda)$, d.h., berechne:

$$\exp(J_k(\lambda)) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 30. Zeige, daß für Blockdiagonalmatrizen gilt

$$\exp\left(\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_l) \end{pmatrix}$$

Hier sind alle Blöcke quadratisch.

Aufgabe 31. Eine Masse m bewege sich in einem zentralsymmetrischen Schwerefeld, d.h., ihre potentielle Energie hängt nur vom Abstand(squadrat) zum Ursprung ab. Also:

$$U = mh(\langle q, q\rangle)$$

Für die kinetische Energie benutzen wir das übliche

$$T = \frac{m}{2}\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle$$

Zeige, daß die Bewegung der Masse in einer Ebene stattfindet.