Differentialgleichungen

Übungszettel 04

Abgabe: **Donnerstag, 10.05.**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Schreibe die folgenden Differentialgleichungen um als Vektorfelder.

1. $y' + xy = 0$
2. $y'' + y' + y + x = 0$
3. $y''y'yx = 1$
4. $y''' = y$

Aufgabe 2. Sei $X : I \times U \to E$ ein Vektorfeld. Seien $\gamma_1 : [t_0, t_1] \to U$ und $\gamma_2 : [t_1, t_2] \to U$ Integralkurven von X mit $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \gamma : [t_0, t_2] &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [t_0, t_1] \\ \gamma_2(t) & t \in [t_1, t_2] \end{cases} \end{aligned}$$

eine Integralkurve von X ist.

Aufgabe 3. Betrachte das stetige zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\sqrt{|x|} \end{aligned}$$

Es korrespondiert der Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

Zeige, daß

$$t \mapsto 0$$

und

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$$

Integralkurven sind. Finde alle stetigen Integralkurven, die zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $x = 0$ durchlaufen. Zwei stehen schon da, also legt dieser Nulldurchgang die Integralkurve nicht eindeutig fest. Was sagt das über das folgende Anfangswertproblem:

$$\left\| \begin{aligned} y' &= 2\sqrt{|y|} \\ 0 &= y(0) \end{aligned} \right\|$$

Aufgabe 4. Löse das Anfangswertproblem

$$\left\| \begin{array}{rl} y' &= y^2 - x^2 \\ 1 &= y(0) \end{array} \right\|$$

Mache dazu einen Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

Setze die formale Ableitung

$$y'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$$

und das formale Quadrat

$$y^2 = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} x^k$$

in die Differentialgleichung ein. Zeige, daß sich eine Rekursion ergibt, die die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt. Dabei ergibt sich $a_0 = 1$ aus der Anfangsbedingung.

Schließlich zeige, daß die Potenzreihe Konvergenzradius mindestens 1 hat und darum auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ eine Lösung des Anfangswertproblems darstellt. Hint: hierzu kann man induktiv die Abschätzung $|a_k| \leq 1$ zeigen.