Differentialgleichungen

Übungszettel 05

Abgabe: **Donnerstag, 17.05.**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und Y ein metrischer Raum. Sei $f_i : X \to Y$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir sagen, daß die Folge (f_i) gleichmäßig gegen die Funktion $g : X \to Y$ konvergiert, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex N existiert, so daß gilt:

$$\mathrm{dist}_Y(f_i(x)\,, g(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } i \geq N \text{ und alle } x \in X$$

Zeige, daß der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen stetig ist. (Wer topologische Räume nicht kennt, darf annehmen, daß X ein metrischer Raum ist.)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Durch

$$\mathrm{dist}(f, g) := \sup \{\mathrm{dist}_Y(f(x)\,, g(x)) \mid x \in X\}$$

ist auf der Menge $\mathrm{C_b}(X; Y)$ der beschränkten stetigen Abbildungen von X nach Y eine Metrik erklärt. Zeige, daß $\mathrm{C_b}(X; Y)$ vollständig ist.

Aufgabe 3. Sei E ein Banachraum *endlicher Dimension* und U offen in E. Zeige, daß ein stetiges Vektorfeld $X : I \times U \to E$ lokal beschränkt ist.

Aufgabe 4. In der Vorlesung habe ich die lokale Eindeutigkeit von Intergralkurven unter der Annahme gezeigt, daß das stetige Vektorfeld $X : I \times U \to E$ uniform Lipschitz-stetig im Raum ist. Zeige, daß der Satz auch unter der schwächeren Annahme gilt, daß X *lokal* uniform Lipschitz-stetig im Raum ist.