Differentialgleichungen

Übungszettel 06

Abgabe: **Donnerstag, 24.06.**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiges zeitabhänngiges Vektorfeld, für das gilt:

$$X_t(x) < 0 \text{ falls } tx > 0 \qquad \text{und} \qquad X_t(x) > 0 \text{ falls } tx < 0$$

Zeige, daß die Kurve $\gamma : t \mapsto 0$ die einzige Integralkurve mit $\gamma(0) = 0$ ist.

Aufgabe 2. Berechne die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

Stelle dazu eine Differentialgleichung für f auf und löse das Anfangswertproblem zu:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}\, x = \sqrt{\pi}$$

Aufgabe 3. Seien $a, b > 0$ Konstanten. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a - bx + x^2 y - x \\ bx - x^2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeige, daß durch einen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ im ersten Quadranten (d.h. $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$) genau eine Integralkurve geht, die in positiver Zeitrichtung unendlich lang existiert und den ersten Quadranten nicht verläßt.

Hint: betrachte das Vektorfeld auf den Koordinatenchsen und studiere, welche Quadrantenwechsel entlang von Integralkurven vorkommen können.

Aufgabe 4. Sei $X : \mathbb{R} \times E \to E$ ein stetiges Vektorfeld und zusätzlich uniform Lipschitz-stetig im Raum. Zeige, daß maximale Integralkurven in X stets auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Hint: Wäre eine maximale Integralkurve nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, würde sie in endlicher Zeit ins Unendliche laufen (in positiver oder in negativer Zeitrichtung). Meditiere über das Lemma von Gronwald.