Differentialgleichungen

Übungszettel 08

Abgabe: **Donnerstag, 07.06.**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Sei $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung von einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in den Raum der reellen $n \times n$-Matrizen. Betrachte das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto A(t)\, x \end{aligned}$$

Betrachte ferner das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} Y : I \times \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ (t, B) &\longmapsto A(t)\, B \end{aligned}$$

(Beachte, daß hier quadratische Matrizen miteinander multipliziert werden.)

Aufgabe 1. Sei $U(-, \tau) : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Y-Integralkurve, die zur Zeit τ durch die Einheitsmatrix läuft: $U(\tau, \tau) = 1_n$. Zeige, daß

$$t \mapsto U(t, \tau)\, x$$

eine X-Integralkurve ist, die zur Zeit τ durch den Punkt x läuft.

Aufgabe 2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} U : I \times I &\longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ (t, \tau) &\longmapsto U(t, \tau) \end{aligned}$$

sei definiert wie in der letzen Aufgabe: $U(-, \tau)$ ist die Y-Integralkurve, die zur Zeit τ durch die Einheitsmatrix geht.

Zeige, daß U eine stetige Abbildung ist und der Bedingung

$$U(t_1, t_3) = U(t_1, t_2)\, U(t_2, t_3)$$

genügt. Zeige ferner, daß $U(t, \tau)$ stets invertierbar ist.

Aufgabe 3. Sei

$$\Phi : I \times I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein globaler Fluß von X. Zeige, daß für gegebenes t und τ die Abbildung

$$\Phi(t, \tau, -) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

linear ist, d.h., durch eine Matrix beschrieben wird. Zeige ferner, daß für festes τ die Abbildung

$$I \ni t \longmapsto \Phi(t, \tau, -) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

eine Y-Integralkurve ist, und zwar die, die zur Zeit τ durch die Einheitsmatrix läuft.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Definiere die Exponentialfunktion für Matrizen durch die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Zeige, daß die Reihe konvergiert. Zeige ferner, daß für kommutierende Matrizen A und B (d.h., $AB = BA$) gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

und bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(tA)$$

Berechne

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$