Differentialgleichungen

Übungszettel 11

Abgabe: **Donnerstag, 28.06.2018**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Seien E und F Banachräume. Sei

$$\langle -, - \rangle : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Bilinearform derart, daß es zu jedem $v \in E \setminus \{0\}$ ein $w \in F$ mit $\langle v, w \rangle > 0$ gibt. Schließlich sei

$$\gamma : (t_0, t_1) \longrightarrow E$$

eine stetige Kurve. Zeige, daß γ identisch verschwindet, wenn

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \gamma(t)\,, \eta(t) \rangle \, \mathrm{d}\, t = 0$$

ist für jede glatte Kruve $\eta : (t_0, t_1) \longrightarrow F$ mit kompaktem Träger.

Aufgabe 2. Berechne die Matrixexponentialfunktion für Vielfache von Jordanblöcken $J_k(\lambda)$, d.h., berechne:

$$\exp(tJ_k(\lambda)) = \exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 3. Zeige, daß die Matrixexponentialfunktion sich gut verhält unter Konjugation (vulgo: Basiswechsel). Seien A und B quadratische Matrizen gleicher Abmessungen. Sei A invertierbar. Zeige:

$$\exp\left(ABA^{-1}\right) = A \exp(B)\, A^{-1}$$

Aufgabe 4. Berechne

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

Gib auch die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

an.

Hint: Bestimme die Jordanzerlegung von

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

und wende die vorigen Aufgaben an.