Differentialgleichungen

Übungszettel 12

Abgabe: **Donnerstag, 05.07.2018**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Bestimme und löse die Euler-Lagrange Differentialgleichung für die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \dot{q}^2$.

Aufgabe 2. Betrachte das Variationsproblem, worin eine differenzierbare Funktion

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

mit $\gamma(-1) = -1$ und $\gamma(1) = 1$ gesucht ist, die

$$A(\gamma) := \int_{-1}^{1} (\gamma'(t))^2 t^2 \, \mathrm{d}\, t$$

minimiert. Zeige, daß kein solcher globaler Minimierer existiert, obwohl das Wirkungs-Integral offensichtlich nach unten beschränkt ist.

Hint: Finde eine Folge von Funktionen γ_n, sodaß die Folge $(A(\gamma_n))$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3. Die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : U \times E \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,\dot{q},t) &\longmapsto \mathcal{L}(q,\dot{q},t) \end{aligned}$$

sei zweimal stetig differenzierbar. Für eine Lösung

$$\gamma : I \to U$$

der Euler-Lagrange Differentialgleichung gelte an der Stelle t_0:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{L}}{\mathrm{d}\,\dot{q}\,\mathrm{d}\,\dot{q}} \big(\gamma(t_0)\,,\dot{\gamma}(t_0)\,,t_0\big) \neq 0$$

Zeige, daß γ in einer Umgebung von t_0 zweimal stetig differenzierbar ist.

Hint: Differenzierbarkeit des Flusses von Vektorfeldern ist nur auf explizite Differentialgleichungen direkt anwendbar.

Aufgabe 4. Gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion

$$y : [-1,1] \longrightarrow [0,\infty)$$

mit $y(-1) = 1$ und $y(1) = 1$ derart, daß die Rotationsfläche ihres Graphen um die x-Achse minimal ist. Bestimme eine geeignete Lagrange-Funktion, sodaß sich diese Aufgabe als Variationsproblem darstellen läßt. Stelle die zugehörige Euler-Lagrange Differentialgleichung auf und löse sie.