

Differentialgleichungen

Übungszettel 13

Abgabe: **Donnerstag, 12.07.2018**, 10:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Wir beschreiben die Bewegung eines Planeten um die Sonne in Polarkoordinaten, wobei die Sonne im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Die Planetenbahn wird dann beschrieben durch die Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$. Die Masse m des Planeten ist konstant. Seine potentielle Energie im Gravitationsfeld der Sonne ist dann gegeben durch

$$U := -\frac{cm}{r}$$

Die Konstante c ist proportional zur Sonnenmasse. (Das negative Vorzeichen ist der Normierung geschuldet, daß der unendlich ferne Planet potentielle Energie 0 hat.)

Die kinetische Energie ist in Polarkoordinaten gegeben durch:

$$T := \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

(Wie üblich bezeichnen Pünktchen die Ableitung nach der Zeit.)

Die Lagrange-Funktion ist also

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{cm}{r}$$

Aufgabe 1. Stelle die Euler-Lagrange-DGL für das System auf.

Aufgabe 2. Zeige, daß das Drehmoment

$$L := mr^2\dot{\varphi}$$

und die Energie

$$H = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{cm}{r}$$

für jede Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen Erhaltungsgrößen sind, sich also nicht mit der Zeit ändern.

Aufgabe 3. Leite das zweite Keplersche Gesetz ab: Die von der Strecke Sonne–Planet in einer Zeit überstrichene Fläche ist proportional zur Zeit. (Hint: das Drehmoment geht in die Proportionalitätskonstante ein.)

Aufgabe 4. Leite das erste Keplersche Gesetz ab: Der Planet bewegt sich auf einer Ellipse und die Sonne ist in einem Brennpunkt. D.h.: Die Lösung

$$t \mapsto (r(t), \varphi(t))$$

der Euler-Lagrange-DGL ist die Parameterdarstellung in Polarkoordinaten einer Ellipse mit Brennpunkt im Ursprung des Koordinatensystems.