Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungen:

- bitte im EKVV anmelden
- Einteilung durch J. Uhing

→ Übungen starten kommende Woche

Literatur:

Skripte von Grigoryan und Kabalo.

Jedes Buch, das so heißt wie die Vorlesung.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ offen und

$$F : U \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann wird durch die <u>gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung</u>

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

eine Bedingung für n-mal diff.bare Funktionen $I \ni x \xmapsto{y} y(x) \in \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ offen) formuliert. Wir nennen

$(x, y, \dots) \in U$ ist implizit

$$\mathcal{L}_I := \{ y : I \to \mathbb{R} \mid F(x, y, \dots) = 0 \}$$

den <u>Lösungsraum</u> der DGL $(*)$ auf I

Wir nennen $(*)$ die <u>implizite Form</u>.
Wenn wir nach $y^{(n)}$ auflösen können erhalten wir die <u>explizite Form</u>

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \qquad (\square)$$

$$V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen} \qquad G : V \to \mathbb{R}$$

<u>Bem</u>: Mit der expliziten Form löst sich oft einfacher umgehen.

__Bem__: Ist $F : U \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar und an der Stelle $\underline{u}_0 = (x_0, y_0, \dots)$ regulär, so erlaubt der Satz von der impliziten Funktion, die Gleichung (*) in einer Umgebung von $\underline{u}_0$ in die explizite Form umzuschreiben. Dabei wird G wieder stetig diff.bar.

Beispiele

1) $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig

DGL: $\qquad y' = f(x) \qquad (*)$

Hauptsatz: Für eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1) F ist unb. Integral von f.

⌜D.h. $\forall a,b \in I: \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ ⌟

2) F ist Stammfkt. von f.

⌜D.h. F ist diff.bar mit $f = F'$ ⌟

$2 \Rightarrow 1$: Jede Lösung von $(*)$ ist unb. Int.

$1 \Rightarrow 2$: Jedes unb. Int ist Lösung.

Also: Der Hauptsatz beschreibt exakt den Lösungsraum.

Kor: Das Anfangswertproblem (AWP) $\left| \begin{array}{l} y' = f(x) \\ y_0 = f(x_0) \end{array} \right|$ hat genau eine Lösung, nämlich:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$\boxtimes$

2) $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

Aufgabe: Bestimme alle Lösungen $y: I \to \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = y \qquad (*)$$

Beob: Jede Funktion $y_a: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a e^x$ ist Lösung.

Bem: Das AWP $\left| \begin{matrix} y' = y \\ y(x_0) = c \end{matrix} \right|$ hat die Lösung

$$y(x) = c\, e^{x - x_0}$$

Übung Zeige, daß jede Lösung von $(*)$ ein $y_a: I \to \mathbb{R}$ ist.

3) $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig

DGL: $$y' = f(x)\, g(y) \qquad (*)$$

Wir lösen $(*)$ durch Trennen der Veränderlichen

$$y' = f(x)\, g(y) \qquad \Big| : g(x)$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \qquad \Big| \int dx$$

$$\int \frac{y' \, dx}{g(y)} = \int f(x) \, dx \quad \Big| \; dy = \frac{dy}{dx} dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \, dx$$

F: Stammfkt von f

G: Stammfkt von $\frac{1}{g}$

$$G(y) = F(x) + c \qquad c: \text{bel. aber fest}$$

Damit finden wir die allgemeine Lösung von $(*)$

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

Unterbeispiel:

$$y' = x^2 y$$

$$\frac{y'}{y} = x^2$$

Hier kann Division durch 0 eintreten.

$$\ln(|y|) = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$y = \pm e^c e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$= a \, e^{\frac{x^3}{3}} \qquad a \neq 0$$

Beob: $a = 0$ liefert auch eine Lösung!

Also: Dieses Verfahren übersieht Lösungen.

<u>Unterbeispiel</u>

$$\dot{y} = y^2$$

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1$$

$$-\frac{1}{y} = t + c$$

$$y = \frac{-1}{t+c}$$

<u>Bem</u>: Diese Lösung hat einen Pol bei $t = -c$

Die Lösung explodiert in endlicher Zeit.

Satz: Seien $f: I \to \mathbb{R}$ und $g: J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(u) \neq 0$ für alle $u \in J$. Sei F eine Stammfkt von f und G eine Stammfkt von $\frac{1}{g}$. Eine Funktion

$$y: I' \to J \qquad I' \subseteq I \text{ Int.}$$

löst $y' = f(x)\, g(y)$ genau dann, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$G(y(x)) = F(x) + C \qquad (\Delta)$$

für alle $x \in I'$ gilt.

Bew: Sei $y: I' \to J$ eine Lösung von $y' = f(x)\, g(y)$. Insbesondere ist y diff.bar und y' stetig. Da $g(y) \neq 0$ ist für alle $y \in J$, folgt:

$$F'(x) = f(x) = \frac{y'(x)}{g(y(x))}$$

$$= G'(y(x))\, y'(x) = (G \circ y)'(x)$$

D.h.: $\frac{dF}{dx} = \frac{d(G \circ y)}{dx}$

Also: $\exists C$: $F(x) + C = (G \circ y)(x)$, d.h.: (Δ)

Umgekehrt erfülle nun y die Bed. (Δ).

<u>Annahme</u>: y ist diff.bar.

Dann können wir (Δ) ableiten:

$$\frac{d}{dx}(G\circ y) = \frac{d}{dx}F$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$y' = f(x)\,g(x) \qquad \text{Lösung !}$$

Bleibt zu zeigen, daß eine Lösung von (Δ) stets diff.bar ist.

Da g auf J nirgends verschwindet und J ein Intervall ist, hat weder g noch $\frac{1}{g}$ auf J einen Vorzeichenwechsel.

O.B.d.A.: $\frac{1}{g} > 0$ auf J.

Dann ist G streng monoton steigend und hat eine diff.bare Umkehrung G^{-1}. Wir erhalten:

$$y(x) = G^{-1}(F(x)+c)$$

<u>Also</u>: y ist diff.bar. $\boxtimes$

Kor: Das AWP $\left| \begin{matrix} y' = f(x) g(y) \\ y_0 = y(x_0) \end{matrix} \right|$ hat für jedes Paar $(x_0, y_0) \in I \times J$ eine eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$y = G^{-1}(F(x) + c)$$

mit $c = G(y_0) - F(x_0)$

Bem: Der Definitionsbereich der Lösung enthält x_0 kann aber echt kleiner sein als I.

Bew Zu zeigen ist, daß y auf einer offenen Umg. von x_0 definiert ist.

Setze: $u_0 := F(x_0) + c = G(y_0)$

Da $G'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ ist, ist G in einer Umg. $U_0 \ni u_0$ umkehrbar.

Da

$$F_c : x \mapsto F(x) + c$$

stetig ist, enthält $F_c^{-1}(U_0)$ ein

offenes Intervall $I_0 \ni x_0$.

Auf I_0 ist die Verkettung $G^{-1} \circ F_c$ erklärt.

Auf $I_0 \subseteq I$ wenden wir nun den Satz an. $\boxtimes$

<u>Bem</u>: Lassen wir die Annahme $g \neq 0$ auf ganz J fallen, so können wir immer noch zeigen, daß das AWP

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x)\, g(y) \\ y_0 = y(x_0) \end{array} \right|$$

eine Lösung hat (nicht notw. eindeutig).

<u>Bew</u>: Ist $g(y_0) \neq 0$, so können wir ein offenes Int $J_0 \ni y_0$ in J finden, so daß g nirgends auf J_0 verschwindet.

$\rightsquigarrow$ Diesen Fall können wir schon.

Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Fkt

$$y(x) := y_0 \quad \text{für alle } x$$

eine Lösung wegen $y' = 0 = f(x) \overbrace{g(y)}^{!0}$. $\boxtimes$