Bsp: $y' = x(y^2 - x)$

$= f(x)\, g(y)$ mit $f(x) = x$, $g(y) = y(y-1)$

Beob: g hat Nullstellen bei $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$

Also: $x \overset{y}{\mapsto} 0$ und $x \overset{y}{\mapsto} 1$ sind Lösungen.

Zu den anderen Lösungen:

Die Stammfkt von $f(x) = x$ ist

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Die Fkt

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

hat die Stammfkt

$$G(y) = \ln|y-1| - \ln|y| = \ln \frac{|y-1|}{|y|}$$

Der Definitionsbereich zerfällt in die Intervalle

$$J_0 = (-\infty, 0) \qquad J_1 = (0,1) \qquad J_2 = (1, \infty)$$

Wir trennen die Veränderlichen für

$x \in \mathbb{R}$ $y \in J_0$ $y \in J_1$ und $y \in J_2$

durch Auflösen von

$$\ln \frac{|y-1|}{|y|} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{|y-1|}{|y|} = e^c e^{\frac{x^2}{2}}$$

Fall 1: $Y \in \mathcal{J}_2$ d.h. $Y > 1$

$$\frac{|Y-1|}{|Y|} = \frac{Y-1}{Y} \Rightarrow G^{-1}(u) = \frac{1}{1-u}$$

mit $u \in (0,1)$

$\ulcorner$ $u = \frac{Y-1}{Y}$ $\quad Yu = Y-1 \quad Y(u-1) = -1$ $\lrcorner$

Also: $$Y = \frac{1}{1-e^c e^{x^2/2}}$$ mit $0 < e^c e^{\frac{x^2}{2}} < 1$

automatisch

d.h. $$e^{\frac{x^2}{2}+c} < 1$$

$$\frac{x^2}{2} + c < 0$$

$$x^2 < -2c \qquad (\Rightarrow c < 0)$$

Fall 2 $Y \in \mathcal{J}_1$ d.h. $0 < Y < 1$

$$u = \frac{|Y-1|}{|Y|} = \frac{1-Y}{Y} > 0$$

$$Y = \frac{1}{1+u}$$ $\ulcorner$ $Yu = 1-Y \quad Y(u+1) = 1$ $\lrcorner$

$$Y = \frac{1}{1+e^c e^{\frac{x^2}{2}}}$$ c beliebig

x beliebig

Fall 3 $Y \in \mathcal{J}_0$ d.h. $Y < 0$

$$u = \frac{|Y-1|}{|Y|} = \frac{Y-1}{Y} > 1$$

$$y = \frac{1}{1-u}$$

$$y = \frac{1}{1-e^c e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\frac{x^2}{2} + c > 0$$

$$x^2 > -2c$$

Allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{1 \pm e^c e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \alpha e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Bem: Für $\alpha = 0$ erhalten wir die Lösung $y \equiv 1$.

5) Lineare DGL erster Ordnung

$$a, b : I \to \mathbb{R}$$

DGL: $$y' = a(x)\, y + b(x) \qquad (*)$$

<u>Satz</u> (Variation der Konstanten)

Sind $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, so hat $(*)$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = B(x)\, e^{A(x)}$$

wobei:

A : Stammfkt von a

B : Stammfkt von $b(x)\, e^{-A(x)}$

Die Funktionen A und B sowie die Lösung y sind auf ganz I erklärt.

<u>Bew</u>: Sei $y : I' \to \mathbb{R}$ eine Lösung.

<u>Setze</u>: $$u(x) := y(x)\, e^{-A(x)}$$

<u>Also</u>: $$y(x) = u(x)\, e^{A(x)}$$

$$y'(x) = u'(x)\, e^{A(x)} + u(x)\, e^{A(x)}\, a(x)$$

$$= u'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, y$$

<u>Daher</u>: $$b(x) = u'(x)\, e^{A(x)}$$

$$u'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

<u>Daher</u>: y hat die Form $B(x)\, e^{A(x)}$.

Umgekehrt sei $y(x) = B(x)\, e^{A(x)}$.

Dann: $y'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}\, e^{A(x)} + B(x)\, e^{A(x)}\, a(x)$

$$= b(x) + a(x)\, y(x) \qquad \boxed{\diagup}$$

Kor: Das AWP $\left| \begin{array}{l} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right|$ ist für jedes Paar $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

Bew: $A(x)$: Stammfkt von $a(x)$

$B(x)$: Stammfkt von $b(x)\, e^{-A(x)}$

$y_c(x) := \left(B(x) + c\right) e^{A(x)}$

gesucht: $c \in \mathbb{R}$ mit $y_c(x_0) = y_0$

Eind. Lösung $c = y_0\, e^{-A(x_0)} - B(x_0)$ $\boxed{\diagup}$

Bem: Die homogene lineare DGL

$$y' = a(x)\, y$$

läßt sich auch durch Trennen der Veränderlichen lösen:

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

$$\ln|y| = A(x) + c$$

$$y = B\, e^{A(x)}$$

Daher der Name „Variation der Konstanten"

$\Downarrow$

B : Konstante

Beispiel: $y' = x + y$

$a(x) = 1 \qquad b(x) = x$

$A(x) = x \qquad B(x) = \int x e^{-x}\, dx$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= e^{-x}(-1-x) + C$$

Allg. Lösung:

$$y(x) = e^{A(x)} B(x)$$

$$= e^{x}\left(e^{-x}(-1-x) + C\right)$$

$$\underline{\underline{= -1 - x + Ce^{x}}}$$

Probe: $y'(x) = -1 + Ce^{x}$

$$= -1 - x + Ce^{x} + x$$

$$= y + x \qquad \checkmark$$

6) 1-Formen und die DGL

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0 \qquad (*)$$

<u>Def</u>: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Eine <u>1-Form</u> auf U ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

kurz: $f\,dx + g\,dy$

wobei $f, g : U \to \mathbb{R}$ Funktionen sind und dx bzw. dy die Standardlinearformen

$$dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \mapsto x \qquad\qquad dy : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \mapsto y$$

Die 1-Form ist also eine Abb

$$\omega : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

Für $(u,v) \in U$ ist also

$$\omega(u,v) = f(u,v)\,dx + g(u,v)\,dy : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

eine Linearform.

ω heißt stetig, (diff.bar, etc.), wenn f und g stetig (diff.bar, etc.) sind.

Bsp: Sei $h: U \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Dann ist das <u>totale Differential</u>

$$dh := \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$$

eine stetige 1-Form.

Def: Eine stetige 1-Form ω heißt <u>exakt</u>, wenn $\omega = dh$ für eine stetig diff.bare Abb. $h: U \to \mathbb{R}$ ist. Wir nennen h ein <u>Integral</u> von ω.

Def: Eine diff.bare 1-Form

$$\omega = f\, dx + g\, dy$$

heißt <u>geschlossen</u>, wenn gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Beob: Jede exakte stetig diff.bare 1-Form $\omega = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$ ist geschlossen:

$$\frac{\partial h^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial h^2}{\partial x \partial y}$$

$\boxed{/}$

<u>Satz</u>: Sei $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine exakte 1-Form auf U (insb. sind f und g stetig) mit Integral $h : U \to \mathbb{R}$.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$y : I \to \mathbb{R}$$

diff.bar mit

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in I \right\} \subseteq U$$

Dann löst y die DGL

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0 \qquad (*)$$

genau dann, wenn gilt

$h(x, y(x))$ ist konstant auf I

<u>D.h.</u> Die Lösungen von $(*)$ ergeben sich durch Auflösen von

$$h(x,y) = c$$

nach y.

<u>Bew</u>: Die Verkettung

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} & \longmapsto & h(x, y(x)) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ I & & U & & \mathbb{R} \end{array}$$

ist auf ganz I erklärt und diff.bar. Wir leiten ab:

$$\frac{d}{dx} h(x, y(x)) = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= f(x, y(x)) + g(x, y(x))\, y'(x)$$

Also sind äquivalent

a) $(*)$

b) $\frac{d}{dx} h(x, y(x)) = 0$

c) $h(x, y(x))$ ist konstant.

(I zhgd.)

$\boxed{/}$

<u>Bsp</u> $\omega = y\,dx + x\,dy$ ist exakt mit Integral $h(x,y) = xy$.

<u>Also</u>: Die DGL $y + xy' = 0$

läßt sich lösen durch Umformen:

$$x\, y(x) = C$$

$$y(x) = \frac{C}{x}$$

<u>Probe</u>: $y'(x) = -\frac{C}{x^2}$ $\qquad y + xy' = \frac{C}{x} + x\,\frac{-C}{x^2} = 0$ ✓

Def (Wegintegral)

Sei $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine stetige 1-Form auf U, und sei $\gamma : [t_0, t_1] \to U$ ein stetig diff.barer Weg in U.

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \end{pmatrix}$

Dann ist

$$\int_\gamma \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(f(\gamma(t)) \;\; g(\gamma(t))\right) \begin{pmatrix} \gamma_x'(t) \\ \gamma_y'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\,\gamma_x'(t) + g(\gamma(t))\,\gamma_y'(t)\,dt$$

das **Wegintegral** von ω entlang γ.

Übung: Zeige, daß sich $\int_\gamma \omega$ bei Umparametrisierung nicht ändert.

Hint: Substitutionsregel

Beob: Ist $\omega = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy$ exakt und γ geschlossen [d.h. $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$], so ist

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial h}{\partial x}\gamma_x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}\gamma_y'(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\big(h(\gamma(t))\big)\, dt$$

$$= h(\gamma(t_1)) - h(\gamma(t_0)) = 0 \qquad \boxtimes$$