Lemma von Poincare für Rechtecke

Sei $\mathcal{U} = I \times J$ ein offenes Rechteck.
Ist die stetig diff.bare 1-Form

$$\omega = f\,dx + g\,dy$$

geschlossen, so ist sie auch exakt.
Ein Integral h von ω läßt sich angeben:

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\,dt$$

Dabei ist $(x_0,y_0) \in I \times J$ beliebig.

<u>Bew</u>: Wir leiten h ab:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

$$= f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$$

Ableiten unter dem Integral !

$$= f(x,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0) = f(x,y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy} \int_{y_0}^{y} g(x,t)\,dt = g(x,y)$$

<u>Also</u>: h ist stetig diff.bar mit $dh = \omega$. $\boxtimes$

Lemma (Ableiten unter dem Integral)

Sei $g: I \times J \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten (!) Rechteck $I \times J$. Dann ist die Fkt

$$G(x) := \int_J g(x,t)\,dt$$

stetig auf I. Ist g stetig diff.bar in x, so ist auch G stetig diff.bar, und es gilt:

$$G'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Also: $$\frac{d}{dx}\int_J g(x,t)\,dt = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Bew: $I \times J$ ist kompakt und g ist stetig. Daher ist g gleichmäßig stetig auf $I \times J$.

Insbesondere:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I\ \forall t \in J:$$

$$|x-y| < \delta \implies |g(x,t) - g(y,t)| < \varepsilon$$

Für $|x-y|<\delta$ gilt also

$$|G(y)-G(x)| = \left| \int_{\mathcal{J}} g(y,t)-g(x,t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{\mathcal{J}} |g(y,t)-g(x,t)|\, dt$$

$$\leq \varepsilon |\mathcal{J}|$$

Also ist G (gleichm.) stetig.

Sei nun g stetig diff.bar in der ersten Koordinate. Wir rechnen:

$$\frac{dG}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{\mathcal{J}} \frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}\, dt$$

Wir wenden den Mittelwertsatz auf $g(-,t)$ an: Zu $h>0$ und $t\in\mathcal{J}$ gibt es $\xi\in[x,x+h]$ mit:

$$\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h} = \frac{\partial g}{\partial x}(\xi,t) =: g_x(\xi,t)$$

Die partielle Ableitung $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ ist gleichm. stetig auf $I \times J$.

<u>Also:</u> $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall h \in (-\delta, \delta) \; \forall t \in J$:

$$\left| g_x(x+h, t) - g_x(x,t) \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow \; \xi \in [x+h, x]$$

$$\left| g_x(\xi, t) - g_x(x,t) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{g(x+h,t) - g(x,t)}{h} - g_x(x,t) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_J \frac{g(x+h,t) - g(x,t)}{h} \, dt - \int_J g_x(x,t) \, dt \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - \int_J g_x(x,t) \, dt \right| < \varepsilon$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt, daß G diff.bar ist mit Ableitung $\int_J g_x(x,t) dt$.

$\boxtimes$

Bsp Hat $U \subseteq \mathbb{R}^2$ „Löcher" (also insbesondere ist U kein Rechteck), so kann es vorkommen, daß eine geschlossene 1-Form nicht exakt ist.

$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ gelochte Ebene

$$\omega := \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Also: ω ist geschlossen.

Beh: ω ist **nicht** exakt.

Bew: Wir berechnen $\int_\gamma \omega$ über den Einheitskreis γ.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Müßte 0 sein, ist es aber nicht
$\Rightarrow$ nicht exakt

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (-\sin t \quad \cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

$\boxtimes$

Der integrierende Faktor

Wir betrachten wieder

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0 \qquad (*)$$

Ist $\omega = f\,dx + g\,dy$ exakt, so können wir $(*)$ lösen.

Ist ω nicht exakt, so können wir immer noch Glück haben. Finden wir nämlich eine glatte Funktion

$$M : U \to \mathbb{R}$$

für die

$$M\omega = Mf\,dx + Mg\,dy$$

exakt ist, so lösen wir damit

$$Mf + Mg\,y' = 0$$

und finden so Lösungen zu $(*)$

⌜ Wo $M = 0$ ist, kann was schiefgehen :) ⌟

So eine Funktion M heißt <u>integrierende Faktor</u>.

Bem: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, so ist $M\omega$ exakt g.d.w. $M\omega$ geschlossen ist. Wir suchen also ein $M: U \to \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{\partial}{\partial y} Mf = \frac{\partial}{\partial x} Mg$$

Bsp: DGL: $\quad xy' = y$

$$-y + xy' = 0$$

$$\omega = -y\,dx + x\,dy \qquad \text{nicht geschlossen}$$

$$M := \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{auf } U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$$

$$M\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \qquad \text{geschlossen}$$

$M\omega$ ist nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, wohl aber auf dem „Rechteck" $x > 0$.

Auf der Halbebene $x > 0$ finden wir ein Integral zu $M\omega$: $\quad (x_0, y_0) = (1, 0)$

$$h(x,y) := \int_1^x \frac{-0}{s^2+0^2}\,ds + \int_0^y \frac{x}{x^2+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^y \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} = \int_0^{y/x} \frac{ds}{1+s^2} = \underline{\underline{\arctan \frac{y}{x}}}$$

Damit: $$h(x, y(x)) = C \leftarrow \text{Konstante}$$

$$\arctan \frac{y(x)}{x} = C$$

$$\frac{y(x)}{x} = \alpha \leftarrow \text{Konstante } (\tan C)$$

$$y(x) = \alpha x$$

<u>Bem</u>: Trennen der Veränderlichen liefert dasselbe Ergebnis.

7) Substitution

Unterbsp:

$$y'x = x + y$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

setze $\quad u := \frac{y}{x} \qquad y' = 1 + u$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u1$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} = 1 + u$$

also: $\quad u'x = 1$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$u = \ln x + C$$

$$y = x(\ln x + C)$$

Unterbsp

$$y' = f(ax + by + c)$$

$u := ax + by + c \qquad y = \frac{u - ax - c}{b}$

$$u' = a + by'$$

$$= a + f(ax + by + c) = a + f(u)$$

$u' = a + f(u) \qquad$ Trennen d. Veränd.

$$\frac{u'}{a + f(u)} = 1$$

$$\int \frac{du}{a+f(u)} = x + C$$

$F(u)$: Stammfkt. von $\frac{1}{a+f(u)}$

$$F(u) = x + C$$

$$u = F^{-1}(x+C)$$

$$y = \frac{F^{-1}(x+C) - c - ax}{b}$$

<u>Bem</u>: Günstige Substitutionen muß man riechen. Erfahrung / Übung hilft.

DGLn zweiter Ordnung

Bsp: $y'' = y$ $\qquad (*)$

Man kann zwei Lösungen erraten:

$y_1 = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $y_2 = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Man erhält die Lösungsfamilie

$$y = \alpha \cosh x + \beta \sinh x$$

Beh: Jede Lösung von $(*)$ auf einem Intervall hat diese Form.

$\ulcorner$ Sei $y: I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$.

Betrachte die Funktion

$$\underline{u}: I \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\frac{d\underline{u}}{dx} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}(x)$$

Setze: $E(x) := \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$

$$\underline{v}(x) := E(x)^{-1}\, \underline{u}(x)$$

$$E'(x) = \begin{pmatrix} \sinh x & \cosh x \\ \cosh x & \sinh x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(x)$$
$$= E(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also: $\underline{u}(x) = E(x)\, \underline{v}(x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}(x) = \underline{u}'(x) = E'(x)\, \underline{v}(x) + E(x)\, \underline{v}'(x)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(x)\, \underline{v}(x) + E(x)\, \underline{v}'(x)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}(x) + E(x)\, \underline{v}'(x)$$

Also: $E(x)\, \underline{v}'(x) = 0$ $\qquad$ $E(x)$ invertierbar

$v'(x) = 0$

$\underline{v}(x)$: konstant $\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\underline{u}(x) = E(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$y(x) = \alpha \cosh x + \beta \sinh x$ $\quad \lrcorner$

Bsp: $y'' = -y$

Offensichtliche Lösungen:

$$y = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

Übung: Zeige, daß es keine weiteren Lösungen gibt.