Bem Manchmal lassen sich DGLn zweiter Ordnung lösen, indem man sie auf Probleme erster Ordnung zurückführt, also auf die Form

$$y'' = f(x, y') \quad \rightsquigarrow \quad u' = f(x, u) \quad (u = y')$$

bringt.

Bsp:

$$y'' \cos x + y' \sin x = 0$$

$$y'' = -y' \tan x \qquad u := y'$$

$$u' = -u \tan x$$

$$\ln u = \ln \cos x + C$$

$$u = \alpha \cos x$$

$$y = \alpha \sin x + \beta$$

Bsp

$$y'' = f(y) \qquad y' y'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (y')^2$$

$$y' y'' = y' f(y)$$

$$\frac{d}{dx} (y')^2 = 2 f(y) y'$$

$$(y')^2 = 2 \int f(y) y' \, dx = 2 \int f(y) \, dy$$

$$y' = \sqrt{2 \int f(y)\,dy + C}$$

DGL erster Ordnung ohne Abh. von x

$\rightsquigarrow$ Trennen der Veränderlichen

<u>Unterbsp</u>: $y'' = e^y$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (y')^2 = y' y'' = y' e^y$$

$$(y')^2 = 2 \int e^y dy = 2e^y + c$$

$$y' = \sqrt{2e^y + c}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2e^y + c}} = 1$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2e^y + c}} = x + D$$

$$u = \sqrt{2e^y + c}$$

$$y = \ln(u^2 - c) - \ln 2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{2u}{u^2 - c}$$

$$x + D = \int \frac{dy}{u} = \frac{2u\,du}{u(u^2 - c)} = \int \frac{2\,du}{u^2 - c}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arcoth} \frac{u}{\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{c} \coth\left(-\frac{\sqrt{c}}{2} (x + D) \right) = u = \sqrt{2e^y + c}$$

$$C \coth^2\left(-\frac{\sqrt{C}}{2}(x+D)\right) = 2e^{y} + C$$

$$y = \ln\left(\frac{C \coth^2\left(-\frac{\sqrt{C}}{2}(x+D)\right) - C}{2}\right)$$

Bsp (konservative Kräfte)

Newtonsches Prinzip : $F = m a$

$\Rightarrow$ Beschreibung von Bewegungen

$$x = x(t)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{d t^2} \qquad \text{Beschleunigung}$$

Die Masse sei konstant

$$m \ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

Def: F heißt konservativ, wenn F weder von der Zeit t noch von der Geschwindigkeit $\dot{x}$ abhängt.

Bsp Gravitation

Gegenbsp Luftwiderstand

Ist $F = F(x)$ konservativ, so erhalten wir

$$m \ddot{x} = F(x) \qquad (*)$$

$$m \ddot{x} \dot{x} = F(x) \dot{x}$$

$-U$: Stammfkt von F

$$m \int \ddot{x} \dot{x} \, dt = \int F(x) \dot{x} \, dt$$

$$\frac{m}{2} [\dot{x}]^2 = \int F(x) \, dx = -U(x) + C$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = C \qquad (\Delta)$$

kinetische Energie

potentielle Energie

Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

__Beachte:__ 1) (Δ) ist DGL erster Ordnung

2) Für $\dot{x} \neq 0$ ist (Δ) äquivalent zu $(*)$

3) (Δ) läßt sich im Prinzip durch Trennen der Veränderlichen lösen

$\rightsquigarrow$ neben C bekommen wir einen weiteren wählbaren Parameter.

__Also:__ Für die allg. Lösung einer DGL 2ter Ordnung erwarten wir zwei frei wählbare Parameter.

__Bem:__ Das AWP lautet hier:

$$\left| \begin{array}{l} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array} \right|$$

Die zwei Anfangsbedingungen legen die Parameter dann fest.

II Vektorfelder und DGLn

$I \subseteq \mathbb{R}$, offenes Intervall (Zeitraum)

$P \subseteq \mathbb{R}^m$, offen (Parameterraum)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, offen (Raum)

Def: Ein zeit- und parameterabhängiges <u>Vektorfeld</u> auf U ist eine Abb.

$$X : I \times P \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, p, u) \mapsto X_t^p(u)$$

Ein <u>parameterabhängiger Weg in U</u> ist eine Abb.

$$\gamma : J \times P \to U \qquad (J \subseteq I)$$
$$(t, p) \mapsto \gamma_p(t)$$

Wir nennen γ eine <u>Integralkurve</u> von X, wenn für alle $t_0, t_1 \in J$ gilt:

$$(*) \qquad \gamma_p(t_1) - \gamma_p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} X_s^p(\gamma_p(s))\, ds \qquad \forall p \in P$$

Hier ist vorausgesetzt, daß $t \mapsto X_t^p(\gamma(t))$ integrierbar ist.

Beob: Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $\gamma : J \to U$ eine Integralkurve von X. Dann ist γ schon stetig diff.bar und löst die DGL

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_t(\gamma(t))$$

Bew: Da γ Int.kurve ist, gilt:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds$$

Die Abb. $s \mapsto X_s(\gamma(s))$ ist stetig und die Abb. $t \mapsto \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma_s(s))\,ds$ ist somit stetig diff.bar.

Daher ist $\gamma(t)$ stetig diff.bar mit Ableitung $\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t))$. (Hauptsatz) $\square$

Beob: Ist umgekehrt $\gamma : J \to U$ eine diff.bare Kurve mit $\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t))$. Dann ist γ stetig diff.bar und eine Int.kurve von X.

Bew: X stetig und γ diff.bar. Also ist $\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t))$ stetig. Somit ist γ stetig diff.bar.

Hauptsatz: $\gamma(t_1) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} X_s(\gamma(s))\,ds$ $\square$

Also: Für ein stetiges VF $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ und einen stetigen Weg $\gamma : J \to U$ sind äquivalent

1) γ ist Integralkurve von X

2) γ ist stetig diff.bar und löst die DGL $\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t))$.

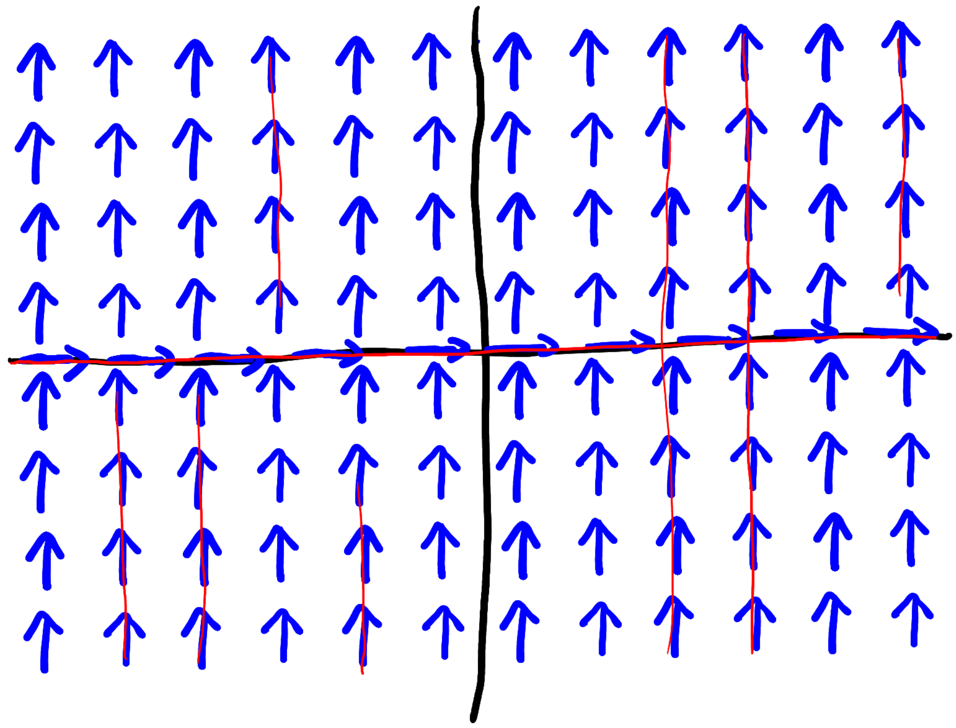
Bsp: $U = \mathbb{R}^2$

$X : U \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & : \; y = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & : \; y \neq 0 \end{cases}$$

zeit- und parameter-unabhängig

X ist <u>nicht</u> stetig.



Also: $\gamma_c : t \mapsto (c, t)$ und $\gamma : t \mapsto (t, 0)$ sind Integralkurven.

$$\int_a^b X\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_a^b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(b) - \gamma(a)$$

$$\int_a^b X\begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} dt = \int_a^b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \end{pmatrix} = \gamma_c(b) - \gamma(a)$$

$t=0$ ist Nullmenge.

<u>Aber</u>: γ_c ist keine Lösung der DGL:

$$\dot{\gamma}_c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X(\gamma_c(0))$$

<u>Bsp</u>: Betrachte die DGL erster Ordnung

$$y' = F(x,y)$$

mit $F : I \times J \to \mathbb{R}$.

Dazu lassen sich <u>zwei</u> Vektorfelder angeben:

1) Ein zeitabh. VF

$$X : I \times J \to \mathbb{R}$$
$$(t,y) \mapsto F(t,y) = X_t(y)$$

Eine Int. kurve

$$\gamma : I' \to J$$
$$t \mapsto \gamma(t)$$

erfüllt

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma = X_t(\gamma(t)) = F(t,\gamma(t))$$

<u>D.h.</u>: $\gamma : I' \to J$ löst die DGL.

2) Ein zeitunabh. VF

$$X : I \times J \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ F(x,y) \end{pmatrix}$$

Sei nun $\gamma : I' \to I \times J$ eine Int. kurve, so gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x(t) \\ \dot{\gamma}_y(t) \end{pmatrix} = X_t(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \end{pmatrix}$$

<u>Also</u>: $\dot{\gamma}_x(t) = 1$

<u>Daher</u>: $\gamma_x(t) = t + C$

Für $C = 0$ erhalten wir:

$$\dot{\gamma}_y(t) = F(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) = F(t, \gamma_y(t))$$

<u>D.h.</u> γ_y ist Lösung der DGL.

<u>Bsp</u>: Betrachte $y'' = F(x, y, y')$

Zeitabh. VF

$$X : I \times U \to \mathbb{R}^2$$
$$\left(t, \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \dot{y} \\ F(t, y, \dot{y}) \end{pmatrix} =: X_t \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Sei

$$\gamma : I' \to U$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

stetig diff.bar.

Dann ist $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$

und $X_t(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ F(t, u(t), v(t)) \end{pmatrix}$

<u>Also:</u> γ ist Int.kurve g.d.w

$$\dot\gamma(t) = X_t(\gamma(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ F(t, u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} v(t) = \dot u(t) \\ \ddot u(t) = F(t, u(t), \dot u(t)) \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} v = \dot u \\ u \text{ löst die DGL} \end{array} \right|$$