<u>Prop</u>: Sei
$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$
eine explizite DGL n-ter Ordnung.
Dann ist $(*)$ äquivalent zum System
$$\left|\begin{array}{l} y_0' = y_1 \\ y_1' = y \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-2}) \end{array}\right| \qquad (0)$$
Eine Lösung
$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix} : J \to \mathbb{R}^{n-1}$$
ist nämlich Lösung von (0) genau dann, wenn
y_0 eine Lösung von $(*)$ ist
und $y_k = y_0^{(k)}$.

Die Lösungen von (0) wiederum sind genau die Integralkurven des zeitabh. VF
$$X_t : I \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$\left(x, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ F(x, y_0, \dots, y_{n-2}) \end{pmatrix}$$
$\square$

Existenz und Eindeutigkeit von Int. kurven

$X : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ VF

$\gamma : J \longrightarrow U$ Int. kurve

Def: Zwei Int. kurven

$$\gamma : J \to U \qquad \bar{\gamma} : \bar{J} \to U$$

haben bei $t_0 \in J \cap \bar{J}$ den gleichen **Keim**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

1) $T := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq J \cap \bar{J}$

2) $\gamma|_T = \bar{\gamma}|_T$

Dafür schreiben wir $\gamma \underset{t_0}{\sim} \bar{\gamma}$.

Beob: $\underset{t_0}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Def: In einem VF $X : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind Int. kurven auf J eindeutig, wenn für je zwei stetige Int. kurven

$$\gamma, \bar{\gamma} : J \to U$$

gilt: $\exists t_0 : \gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0) \Rightarrow \forall t \in J : \gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$

In X sind Int.kurven lokal eindeutig, wenn für je zwei stetige Int.kurven

$$\gamma : J \to U \qquad \bar{\gamma} : \bar{J} \to U$$

gilt: $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0) \implies \gamma \sim_{t_0} \bar{\gamma}$

Prop: In $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ seien Int.kurven lokal eindeutig. Dann folgt:

1) Für jedes $J \subseteq I$ sind Int.kurven auf J eindeutig.

2) Sind $\gamma : J \to U$ und $\bar{\gamma} : \bar{J} \to U$ zwei Integralkurven mit $t_0 \in J \cap \bar{J}$ und $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$, so ist die Verklebung

$$\tilde{\gamma} : J \cup \bar{J} \to U$$
$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & : t \in J \\ \bar{\gamma}(t) & : t \in \bar{J} \end{cases}$$

wohldefiniert und eine Integralkurve.

Bew: (a) Seien $\gamma, \bar{\gamma}$ stetige Int.kurven mit $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$. Betrachte

$$T := \{ t \mid \gamma|_{[t_0,t]} = \bar{\gamma}|_{[t_0,t]} \}$$

__Beh:__ T ist abg.

$\ulcorner$ γ und $\bar{\gamma}$ sind stetig. $\lrcorner$

__Beh:__ T ist offen.

$\ulcorner$ Für $t \in T$ ist $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$.

Lokale Eindeutigkeit von Int.kurven in X impliziert dann

$$\exists \varepsilon > 0 : \gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]} = \bar{\gamma}|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$$

__Also:__ $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq T$. $\lrcorner$

__Kor:__ Da I zhgd ist, folgt $T = I$ oder $T = \emptyset$.

$T \neq \emptyset$ scheidet aus, weil $t_0 \in T$ ist.

__Also:__ $T = I$

(b) folgt aus (a).

Genauer: Aus (a) folgt, daß $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$ ist für $t \in J \cap \bar{J}$. Daher ist $\tilde{\gamma}$ wohldef.

__Beh:__ $\tilde{\gamma}$ ist Int.kurve.

$\ulcorner$ z.z.: $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = \int_a^b X_t(\gamma(t))\, dt$.

Für $a,b \in \mathcal{J}$ und $a,b \in \bar{\mathcal{J}}$ folgt das aus $\tilde{\gamma}|_{\mathcal{J}} = \gamma$ bzw. $\tilde{\gamma}|_{\bar{\mathcal{J}}} = \bar{\gamma}$.

Für $a \in \mathcal{J}$ und $b \in \bar{\mathcal{J}}$ wähle $c \in \mathcal{J} \cap \bar{\mathcal{J}}$ und rechne

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) &= \tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(c) + \tilde{\gamma}(c) - \tilde{\gamma}(a) \\ &= \int_c^b X_t(\tilde{\gamma}(t))\,dt + \int_a^c X_t(\tilde{\gamma}(t))\,dt \\ &= \int_a^b X_t(\tilde{\gamma}(t))\,dt.\end{aligned}$$

$\boxtimes$

<u>Def</u>: Im Vektorfeld $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ <u>existieren lokal</u> Int.kurven, wenn zu jedem $t_0 \in I$ und $u_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine stetige Int.kurve

$$\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to U$$

mit $u_0 = \gamma(t_0)$ existiert.

Sind Int.kurven in X überdies lok. eind., so sagen wir X <u>hat lok. eind. Int.kurven</u>.

<u>Ziel</u>: Find Bedingungen, die sicherstellen, das ein VF lokale oder lok. eind. Int.kurven hat.

Die Gronwallsche Ungleichung

Lemma: $g : I \to \mathbb{R}^+$ sei stetig diff.bar und erfülle für ein festes $L > 0$:

$$g'(t) \le L\, g(t) \qquad \forall\, t \ge t_0 \in I$$

Dann gilt für $t \ge t_0$

$$g(t) \le g(t_0)\, e^{L(t-t_0)}$$

Bew: Setze $h(t) := e^{-L(t-t_0)} g(t)$

Damit:

$$\begin{aligned} h'(t) &= -L e^{-L(t-t_0)} g(t) + e^{-L(t-t_0)} g'(t) \\ &\le -L\, h(t) + L e^{-L(t-t_0)} g(t) \\ &= -L h(t) + L h(t) = 0 \end{aligned}$$

Also: h fällt monoton. $\square$

Kor (Gronwallsche Ungleichung)

Sei $f : I \to \mathbb{R}^+$ stetig mit

$$f(t) \le f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \qquad \forall\, t \ge t_0$$

für ein $L > 0$. Dann gilt für $t \ge t_0$:

$$f(t) \le f(t_0)\, e^{L(t-t_0)}$$

Bew: Setze $g(t) := f(t_0) + L\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \geq 0$

Dann: $f(t) \leq f(t_0) + L\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = g(t)$

$$f(t_0) = g(t_0)$$

Ferner: g ist stetig diff.bar mit Ableitung

$$g'(t) = L f(t) \leq L g(t)$$

Lemma $\Rightarrow$ $g(t) \leq g(t_0)\, e^{L(t-t_0)}$

Also $f(t) \leq g(t) \leq g(t_0)\, e^{L(t-t_0)} = f(t_0)\, e^{L(t-t_0)}$ $\boxtimes$

Def: Ein VF $X : I \times P \times U \to \mathbb{R}^m$ ist <u>uniform Lipschitz-stetig im Raum</u>, wenn es eine Lipschitskonstante $L > 0$ gibt, so daß für jedes Paar (t,p) die Abb.

$$X_t^p : U \to \mathbb{R}^m$$

<u>L-Lipschitz stetig</u> ist, d.h.:

$$\left\| X_t^p(u) - X_t^p(v) \right\| \leq L \| u - v \| \quad \forall\, u,v \in U$$

Prop (Drift von Integralkurven)

Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF.

Seien $\gamma, \bar{\gamma} : [t_0 - a, t_0 + b] \to U$ zwei Int.kurven. Dann gilt:

$$\| \gamma(t) - \bar{\gamma}(t) \| \leq \| \gamma(t_0) - \bar{\gamma}(t_0) \| e^{L|t-t_0|}$$

Bew: Betrachte

$$f : t \mapsto \| \gamma(t) - \bar{\gamma}(t) \|$$

Dann:

$$f(t) \leq \| \gamma(t_0) - \bar{\gamma}(t_0) \| + \left\| \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s)) - X_s(\bar{\gamma}(s)) \, ds \right\|$$

$$\leq f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \| X_s(\gamma(s)) - X_s(\bar{\gamma}(s)) \| \, ds$$

$$\leq f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} \| \gamma(s) - \bar{\gamma}(s) \| \, dt$$

$$= f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} f(s) \, ds$$

Gronwald $\Rightarrow$ Für $t \geq t_0$ ist

$$\| \gamma(t) - \bar{\gamma}(t) \| = f(t) \leq f(t_0) e^{L|t-t_0|} = \| \gamma(t_0) - \bar{\gamma}(t_0) \| e^{L|t-t_0|}$$

Für $t \leq t_0$ betrachte das VF

$$Y: -I \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, u) \mapsto -X_{-t}(u)$$

und darin die Int.kurven

$$\eta(t) := \gamma(-t) \qquad \bar{\eta}(t) := \bar{\gamma}(-t) \qquad \boxtimes$$

<u>Kor</u>: Ist das VF X stetig und uniform Lipschitzstetig im Raum, so können Int.kurven von X nicht kollidieren.

<u>Äquivalent</u>: Das AWP $\left| \begin{array}{l} \dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t)) \\ \gamma(t_0) = u_0 \end{array} \right|$

hat höchstens eine Lösung $\gamma: I \to U$.

<u>Bew</u>: Seien γ und $\bar{\gamma}$ Lösungen.

<u>Dann</u>: $\gamma(t_0) = u_0 = \bar{\gamma}(t_0)$

<u>und</u>: $\|\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)\| \leq \underbrace{\|\gamma(t_0) - \bar{\gamma}(t_0)\|}_{=0} e^{L|t-t_0|}$

<u>Also</u>: $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$ für alle t. $\boxtimes$