Def: Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein VF. Eine stetige Int.kurve $\gamma: J \to U$ heißt <u>maximal</u>, wenn es keine stetige Int.kurve $\bar{\gamma}: \bar{J} \to U$ mit $J \subsetneqq \bar{J}$ und $\gamma = \bar{\gamma}|_J$ gibt.

Prop: Das VF $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ habe lokal eindeutige Integralkurven. Zu jeder Anfangsbedingung $(t_0, u_0) \in I_0 \times U_0$ gibt es (genau) eine maximale Int.kurve $\gamma: J \to U$ mit $\gamma(t_0) = u_0$. Ihr Def.bereich J ist offen.

Bew: $\mathcal{P} := \left\{ J \subseteq I \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ Int.kurve } \gamma: J \to U \\ \text{mit } t_0 \in J \text{ und } \gamma(t_0) = u_0 \end{array} \right\}$

ist durch $\subseteq$ geordnet.

Beob: $J_1, J_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow t_0 \in J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$

Auf jedem $J \in \mathcal{P}$ gibt es genau eine Int.kurve $\gamma: J \to U$ mit $\gamma(t_0) = u_0$, und alle diese Kurven verkleben sich zu einer maximalen Int.kurve

$$\gamma_{max}: J_{max} \to U$$

<u>Beh</u>: $\mathcal{J}_{max}$ ist offen.

$\ulcorner$ Sei $t \in \mathcal{J}_{max}$. Setze $u := \gamma_{max}(t)$.

Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Int.kurve

$$\tilde{\gamma} : \underbrace{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}_{\subseteq I} \to U \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}(t) = u.$$

Dann verkleben sich $\tilde{\gamma}$ und γ_{max} zu einer Int.kurve, deren Def.bereich also in $\mathcal{J}$ liegt. Daher $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq \mathcal{J}_{max}$. $\blacksquare$

Beob: Ein stetiges VF $X : I \times P \times U \to \mathbb{R}^n$ ist **lokal beschränkt**, d.h. für $(t_0, p_0, u_0) \in I \times P \times U$ gibt es $\delta, \varepsilon, \eta, K > 0$ mit:

$$\forall (t,p,u) \in \mathbb{B}_\delta(t_0) \times \mathbb{B}_\eta(p_0) \times \mathbb{B}_\varepsilon(u_0) : \|X_t^p(u)\| \leq K$$

Genauer: Ist $\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0) \subseteq I \times P \times U$, so nimmt $\|X\|$ auf dem Kompaktum

$$\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$$

ein Maximum K an.

Bem: Ist $X : I \times P \times U \to E$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF ($P \subseteq \mathbb{R}^m$ endl. dim!), so ist X lokal beschränkt.

Genauer: Für $\delta, \eta, \varepsilon > 0$ mit

$$\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0) \subseteq I \times P \times U$$

gibt es $K > 0$ mit

$$\|X_t^p(u)\| \leq K \text{ für alle } (t,p,u) \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0).$$

Bew: $\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0)$ ist kompakt. Wähle $C > 0$ mit $\|X_t^p(u_0)\| \leq C$ für $(t,p) \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\eta(p_0)$.

Dann:
$$\begin{aligned} \|X_t^p(u)\| &\leq \|X_t^p(u) - X_t^p(u_0) + X_t^p(u_0)\| \\ &\leq L\|u - u_0\| + C \\ &\leq L\eta + C =: K \quad \text{tut's.} \end{aligned}$$ ▨

Beob: Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein lokal beschränktes VF. Genauer: Auf $\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$ sei X beschränkt durch $K > 0$.

Sei $\gamma : J \to U$ eine Int. kurve mit $\gamma(t_0) = u_0$. Dann ist für $|t - t_0| < \varepsilon/K$

$$\|\gamma(t) - u_0\| \leq K|t - t_0|$$

Bew: Wir behandeln nur $t \geq t_0$. Der Fall $t \leq t_0$ ist symmetrisch.

Beob: Sei J ein Intervall um t_0 in $\overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0)$ und $\gamma : J \to \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$ eine Int. kurve.

Dann ist

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|X_s(\gamma(s))\|\, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} K\, ds = K|t - t_0|$$

Für $t < t_0$ sind die Integrationgrenzen vertauscht.

Setze: $T := \{ t \in [t_0, t_0 + \varepsilon/K] \mid \gamma[t_0, t] \subseteq \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0) \}$

Beob: $t_0 \in T$. Also $T \neq \emptyset$.

__Beob__: T ist abg., weil γ stetig ist.

__Beh__: T ist offen.

⌐ Sei $t \in T$ mit $t < t_0 + \varepsilon/K$. Wir zeigen, daß es $t' > t$ in T gibt.

Wegen $\gamma[t_0, t] \subseteq \overline{\mathbb{B}_\varepsilon}(u_0)$ ist nämlich

$$\| \gamma(t) - u_0 \| \leq K \, | t - t_0 | < \varepsilon$$

__D.h.__ $\gamma(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$: offen

Da γ stetig ist, gibt es $\eta > 0$ mit

$$\gamma(t-\eta, t+\eta) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$$

__Dann__: $\gamma[t_0, t+\eta] \subseteq \overline{\mathbb{B}_\varepsilon}(u_0)$ ⌟

__Also__: $T = [t_0, t_0 + \varepsilon/K]$. $\blacksquare$

<u>Def</u>: Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Seien $I_0 \subseteq J \subseteq I$ offene Intervalle und $U_0 \subseteq U$ offen. Eine Abb.

$$\Phi : J \times I_0 \times U_0 \to U$$
$$(s, s_0, u_0) \mapsto \Phi(s, s_0, u_0)$$

heißt <u>Fluß</u> von X, wenn für jedes Paar (s_0, u_0) die Abb.

$$\gamma : J \to U$$
$$s \mapsto \Phi(s, s_0, u_0)$$

$\gamma = \Phi(-, s_0, u_0)$

eine Int.kurve mit $\gamma(s_0) = u_0$ ist.

<u>Lemma</u>: Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF.

$$\Phi : J \times I_0 \times U_0 \to U$$

sei ein Fluß.

Dann gilt

1) $\Phi(s, s_0, u_0) = \Phi(s, t_0, \Phi(t_0, s_0, u_0))$

2) Für $(s_0, u_0) \in I_0 \times U_0$ gilt:

$$\lim_{s \to s_0} \Phi(s_0, s, u_0) = u_0$$

$\lim_{s \to s_0} \Phi(s, s_0, u_0) = u_0$ folgt da Int.kurven stetig sind.

<u>Bew</u>: (1) $\Phi(-, s_0, u_0)$ ist <u>die</u> Int.kurve $\gamma : J \to U$ mit $\gamma(s_0) = u_0$. Wegen $\gamma(t_0) = \Phi(t_0, s_0, u_0)$ ist das auch die Int.kurve $\Phi(-, t_0, \Phi(t_0, s_0, u_0))$.

(2) Wähle $\delta, \varepsilon, K > 0$, so daß $\|X\|$ auf $\overline{\mathbb{B}}_\delta(s_0) \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$ durch K beschränkt ist.

⌜ Wie immer: $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0) \subseteq U_0$

$\overline{\mathbb{B}}_\delta(s_0) \subseteq I_0$ ⌟

Für $s \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(s_0)$ ist $[s_0, s] \subseteq \overline{\mathbb{B}}_\delta(s_0)$.

Daher ist X durch K beschränkt auf $[s_0, s] \times \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$.

Sei γ_s die Int.kurve $\Phi(-, s, u_0)$. Dann ist:

$$\| \gamma_s(s_0) - \gamma_s(s) \| = \| \gamma_s(s_0) - u_0 \| \leq K \, |s_0 - s|$$

<u>Also</u>: $\lim\limits_{s \to s_0} \| \Phi(s_0, s, u_0) - u_0 \| = 0$. $\blacksquare$

Prop: Sei $X: I\times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF. Dann ist ein Fluß $\Phi: J\times I_0\times U_0 \to U$ stetig.

Bew Für $(s,s_0,u_0), (t,t_0,v_0) \in J\times I_0\times U_0$ wollen wir

$$\|\Phi(s,s_0,u_0) - \Phi(t,t_0,v_0)$$

abschätzen.

$$\left.\begin{matrix}\Phi(s,s_0,u_0)\\ \Phi(s,s_0,v_0)\end{matrix}\right] \le \underbrace{L e^{|s-s_0|}}_{\text{konstant}} \|u_0 - v_0\| \xrightarrow{u_0\to v_0} 0$$

$$\Phi(s,s_0,v_0) = \Phi(s,t_0,\Phi(t_0,s_0,v_0))$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi(s,t_0,\Phi(t_0,s_0,v_0))\\ \Phi(s,t_0,v_0)\end{matrix}\right] \le \underbrace{L e^{|s-s_0|}}_{\text{beschränkt}} \|\Phi(t_0,s_0,v_0) - v_0\| \xrightarrow{s_0\to t_0} 0$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi(s,t_0,v_0)\\ \Phi(t,t_0,v_0)\end{matrix}\right] \xrightarrow{s\to t} 0$$

∎

Bem: Wir diskutieren, wenn der Fluß differenzierbar ist, wenn wir lineare DGLn behandeln.

Lemma: Sei J ein Intervall und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und beschränkt. Dann ist

$$\mathcal{C}(J;W) := \{\gamma : J \to W \mid \gamma \text{ stetig}\}$$

vollständig bez. der Metrik

$$d(\gamma,\tilde{\gamma}) := \sup_t \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| =: \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty$$

Bew 1) d ist eine Metrik.

a) $d(\gamma,\tilde{\gamma}) = 0 \Rightarrow \sup\{\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\|\} = 0$

$\Rightarrow \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \gamma = \tilde{\gamma}$

b) Δ-Ungl.

$$\begin{aligned}
d(\gamma,\bar{\gamma}) &= \sup \|\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)\| \\
&= \sup \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) + \tilde{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(t)\| \\
&\leq \sup\left(\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| + \|\tilde{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(t)\|\right) \\
&\leq \sup \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| + \sup \|\tilde{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(t)\| \\
&= d(\gamma,\tilde{\gamma}) + d(\tilde{\gamma},\bar{\gamma})
\end{aligned}$$

2) $\mathcal{C}(J;W)$ ist vollständig.

Sei $(\gamma_n)_n$ eine Cauchyfolge. Für $t \in J$ ist

$$\|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\| \leq d(\gamma_m,\gamma_n)$$

und daher ist $(\gamma_n(t))_n$ eine Cauchyfolge.

Daher ist

$$\gamma : J \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \lim_{m \to \infty} \gamma_m(t)$$

wohldefiniert. Da W abg. ist, ist $\gamma(t) \in W$.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es N mit

$$m, n > N \Rightarrow d(\gamma_m, \gamma_n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\| < \varepsilon \quad \forall t$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$\Rightarrow \|\gamma_m(t) - \gamma(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall m > N$$

<u>Also</u>: $\|\gamma_m - \gamma\|_\infty \leq \varepsilon$

Insbesondere: (γ_m) konvergiert gleichm. gegen γ [nicht bloß punktweise!].

<u>Daher</u>: γ ist stetig und somit $\gamma \in \mathcal{C}(J; W)$. $\square$