Satz (Picard-Lindelöf)

Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF.
Dann hat X lokale Int. kurven.

Bem: Und sie sind lok. eind., was wir schon wissen.

Genauer: Zu jeder Anfangsbed. $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es $\delta > 0$ mit $\mathbb{B}_\delta(t_0) \subset I$ und eine stetige Int. kurve

$$\gamma : \mathbb{B}_\delta(t_0) \to U$$

mit $\gamma(t_0) = u_0$.

Bew: Wir erhalten γ als Fixpunkt der sogenannten Picard-Iteration

$$\gamma_{i+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma_i(s))\, ds =: \Phi(\gamma_i)$$

Die Existenz eines Fixpunktes $\gamma = \Phi(\gamma)$ erhalten wir aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Banach: Y : vollst. metrischer Raum

$\Phi : Y \to Y$ K-Lipschitz mit $K < 1$

(K: Kontraktionsrate)

Dann hat Φ genau einen Fixpunkt $\bar{y} \in Y$, und für jedes $y_0 \in Y$ konvergiert $y_{i+1} = \Phi(y_i)$ gegen $\bar{y}$.

Bew: Analysis II.

Bem: Für ein Intervall J und eine abg. beschränkte Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathcal{E}(J;W) := \{\gamma : J \to W \mid \gamma \text{ stetig}\}$$

im Banachräumen ist das nicht unbed. kompakt. Macht aber nix.

vollständig bez. der Metrik

$$d(\gamma,\tilde{\gamma}) := \sup\{\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\|\}$$

Bew: vorige Vorlesung.

U ist offen. Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0) \subseteq \mathbb{B}_{2\varepsilon}(u_0) \subseteq U$$

~~und $\varepsilon L < 1$ mit Blick auf später ∇_0~~

Da X L-Lipschitzstetig ist gilt für $u \in \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$

$$\|X_s(u) - X_s(u_0)\| \le L\|u - u_0\| \le L\varepsilon \cancel{< 1}$$

Die Funktion $s \mapsto \|X_s(u_0)\|$ ist

stetig. Wähle $r > 0$ mit
$\overline{\mathbb{B}}_r(t_0) \subseteq I$

und $C > 0$ mit
$L\varepsilon + \|X_s(u_0)\| \leq C \quad \forall\, s \in \overline{\mathbb{B}}_r(t_0)$

Also: $\|X_s(u)\| \leq L\varepsilon + \|X_s(u_0)\| \leq C$

Wähle $0 < \delta < \varepsilon / C$ mit | und nun $\delta L < 1$!

$$J := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] = \overline{\mathbb{B}}_\delta(t_0) \subseteq I$$

Für $\gamma : J \to \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$ stetig und $t \in J$

ist:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|X_s(\gamma(s))\|\,ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} C\,ds = \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta} C \leq \varepsilon$$

Also: $u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds \in \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$

Folge: Für $\gamma \in \mathcal{C}(J; \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0))$ ist

$$\Phi(\gamma) : t \mapsto u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds \quad \text{in } \mathcal{C}(J; \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0))$$

<u>Beh:</u> $\Phi : \mathcal{C}(J; \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)) \to \mathcal{C}(J; \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0))$

ist eine Kontraktion, <u>falls $\delta L < 1$</u>

ist.

hier wird $\overset{\delta}{\cancel{\varepsilon}} L < 1$ wichtig.

$$\|\Phi(\gamma) - \Phi(\tilde\gamma)\|_\infty$$

$$= \sup_t \left\{ \left\| \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde\gamma(s)) \, ds \right\| \right\}$$

$$\leq \sup_t \left\{ \int_{t_0}^{t} \| X_s(\gamma(s)) - X_s(\tilde\gamma(s)) \| \, ds \right\}$$

$$\leq \sup_t \left\{ \int_{t_0}^{t} L \, \| \gamma(s) - \tilde\gamma(s) \| \, ds \right\}$$

$$\leq \sup_t \left\{ L \, |t - t_0| \, \|\gamma - \tilde\gamma\|_\infty \right\}$$

$$\leq \overset{\delta}{\cancel{\varepsilon}} L \, \|\gamma - \tilde\gamma\|_\infty$$

<u>Also:</u> Für $0 < \delta < \min\left(\frac{1}{L}, \frac{\varepsilon}{c}\right)$ ist Φ eine Kontraktion und hat einen Fixpunkt $\gamma : J \to \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(u_0)$.

Beh: Der Fixpunkt γ ist eine Int. kurve.

$\ulcorner$ $$\gamma = \Phi(\gamma)$$

D.h.: $$\gamma(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\, ds$$

Also: $$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) = \int_{t_0}^{t_2} X_s(\gamma(s))\, ds - \int_{t_0}^{t_1} X_s(\gamma(s))\, ds$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} X_s(\gamma(s))\, ds$$

$\lrcorner$ $\blacksquare$

Lemma: (Y,d) : vollst. metrischer Raum

$K \subseteq Y$ abg. & beschränkt.

X: top. Raum

Dann ist

$$\mathcal{C}(X;K) := \{\varphi : X \to K \mid \varphi \text{ ist stetig}\}$$

bez

$$d_\infty(\varphi,\bar{\varphi}) := \sup\{d(\varphi(x),\bar{\varphi}(x)) \mid t \in X\}$$

ein vollst. metrischer Raum.

Bew: $d_\infty(\varphi,\bar{\varphi}) = 0 \Rightarrow \varphi = \bar{\varphi}$

$$d(\varphi(x),\bar{\varphi}(x)) \leq d(\varphi(x),\tilde{\varphi}(x)) + d(\tilde{\varphi}(x),\bar{\varphi}(x))$$

$$d_\infty(\varphi,\bar{\varphi}) \leq \sup\{d(\varphi(x),\tilde{\varphi}(x)) + d(\tilde{\varphi}(x),\bar{\varphi}(x))\}$$

$$\leq d_\infty(\varphi,\tilde{\varphi}) + d_\infty(\tilde{\varphi},\bar{\varphi})$$

Sei nun (φ_n) Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X;K)$.

Wegen $d(\varphi_m(x),\varphi_n(x)) \leq d(\varphi_m,\varphi_n)$ ist

$(\varphi_n(x))$ für jedes $x \in X$ Cauchyfolge.

Setze: $\psi(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$

Beh: φ_n konvergiert gleichm. gegen ψ.

$\ulcorner$ Für $\varepsilon > 0$ wähle N mit

$$d_\infty(\varphi_m, \varphi_n) < \varepsilon/2 \text{ für alle } m, n \geq N.$$

Für n groß genug ist außerdem

$$d(\varphi_n(x), \psi(x)) < \varepsilon/2$$

Also ist

$$d(\varphi_m(x), \psi(x)) \leq d(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) + d(\varphi_n(x), \psi(x))$$

$$< d_\infty(\varphi_m, \varphi_n) + \varepsilon/2$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \lrcorner$$

<u>Kor</u>: $\psi \in \mathcal{C}(X; K)$. $\boxtimes$

<u>Ergänzung</u>:

Sei (φ_m) eine Funktionenfolge und ψ eine Funktion. Gilt

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall x \, \exists N \, \forall m \geq N : \, d(\varphi_m(x), \psi(x)) < \varepsilon$$

so folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall m \geq N : \, d_\infty(\varphi_m, \psi) \leq \varepsilon$$

<u>Denn</u>: $d_\infty(\varphi_m, \psi) = \sup\limits_x \underbrace{d(\varphi_m(x), \psi(x))}_{< \varepsilon} \underset{\sup\limits_x !}{\leq} \varepsilon$