Satz: $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig, lok. beschr. und lokal uniform Lipschitzstetig im Raum.

D.h. Zu $(s,u) \in I \times U$ gibt es $r > 0$, $K > 0$ mit

$$\| X_t(v) \| \leq K \qquad \forall \; t \in \overline{\mathbb{B}}_r(s) \subseteq I, \; v \in \overline{\mathbb{B}}_r(u) \subseteq U$$

und $L > 0$ mit

$$\| X_t(v) - X_t(v') \| \leq L \| v - v' \|$$

$$\forall \; t \in \overline{\mathbb{B}}_r(s) \subseteq I, \; v, v' \in \overline{\mathbb{B}}_r(u) \subseteq U$$

Dann gibt es zu jedem $(s_0, u_0) \in I \times U$ eine offene Umg $I_0 \times U_0$ und einen stetigen lokalen Fluß

$$\Phi : I_0 \times I_0 \times U_0 \to U$$

Bew: Zunächst wähle r und L zu (s_0, u_0).

Vorbetrachtung: Sei $r > \delta > 0$ und

$$\gamma : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{B}_r(u_0)$$

eine Int. kurve. Dann ist für $s, \bar{s} \in \mathbb{B}_\delta(s_0)$

$$\| \gamma(s) - \gamma(\bar{s}) \| \leq |s - \bar{s}| K \leq 2\delta K$$

Für $0 < \varepsilon < r$ mit $\varepsilon + 2\delta K < r$ gilt dann:

$$\gamma(s) \in \mathbb{B}_\varepsilon(u_0) \Rightarrow \gamma(\bar{s}) \in \mathbb{B}_{\varepsilon + 2\delta K}(u_0)$$

Das gilt sogar für jede Int.kurve $\gamma : \mathbb{B}_\delta(s_0) \to \mathcal{U}$, denn mit $\gamma(s) \in \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$ kann γ den Ball $\mathbb{B}_r(u_0)$ in $[s, \bar{s}]$ nicht verlassen. (Tempolimit K).

Wähle $\delta, \varepsilon > 0$ mit

1) $\mathbb{B}_\delta(s_0) \subseteq \mathbb{B}_r(s_0)$

2) $\varepsilon + 2\delta K < r$

3) $2\delta L < 1$

<u>Setze</u>: $I_0 := (s_0 - \delta, s_0 + \delta) = \mathbb{B}_\delta(s_0)$

$\mathcal{U}_0 := \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$

Betrachte den vollst. metr. Raum

$$\mathcal{C}(I_0 \times I_0 \times \mathcal{U}_0 ; \overline{\mathbb{B}}_r(u_0))$$
$$= \{ \Phi : I_0 \times I_0 \times \mathcal{U}_0 \to \overline{\mathbb{B}}_r(u_0) \mid \Phi \text{ stetig} \}$$

mit der d_∞-Metrik.

<u>Beh</u>: $\Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$\Phi \mapsto \Psi_\Phi$

mit $\Psi_\Phi(t, t_0, u) := u + \int_{t_0}^{t} X_s(\Phi(s, t_0, u))\, ds$

ist $2\delta L$-Lipschitzstetig.

Bem: $2\delta L < 1$ heißt Ψ hat einen Fixpunkt!

$$d_\infty(\Psi_{\Phi}, \Psi_{\Phi'}) = \sup_{(t,t_0,u)} \left\| \int_{t_0}^{t} X_s(\Phi(s,t_0,u)) - X_s(\Phi'(s,t_0,u))\, ds \right\|$$

$$\leq \sup \int_{t_0}^{t} \| X_s(\Phi(s,t_0,u)) - X_s(\Phi'(s,t_0,u)) \| \, ds$$

$$\leq \sup |t - t_0| \, L \, d_\infty(\Phi, \Phi')$$

$$\leq 2\delta L \, d_\infty(\Phi, \Phi')$$

Beh: Der Fixpunkt Φ^* ist ein Fluß.

$\Psi(\Phi^*) = \Phi^*$ impliziert

$$\Phi^*(t, t_0, u) = u + \int_{t_0}^{t} X_s(\Phi(s,t_0,u))\, ds$$

D.h.: $\Phi^*(-, t_0, u)$ ist Intkurve.

Außerdem ist

$$\Phi^*(t_0, t_0, u) = u + \int_{t_0}^{t_0} X_s(\Phi(s,t_0,u))\, ds = u \qquad \blacksquare$$

Def: Für (t_0, u_0) sei $J_{max}(t_0, u_0)$ der Def.bereich der maximalen Int.kurve γ mit $\gamma(t_0) = u_0$.

Dann ist

$$D(X) := \bigcup_{(t_0, u_0)} J_{max}(t_0, u_0) \times I \times U$$

$$\Phi : D \longrightarrow U$$

$$(t, t_0, u_0) \longmapsto \gamma(t) \quad : \gamma \text{ Int.kurve mit } \gamma(t_0) = u_0$$

der <u>globale Fluß</u> des Vektorfeldes X.

Satz: Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig, lok. beschr. und unif. Lipschitzstetig im Raum.

Sei $(t_1, t_0, u_0) \in D(X)$ und $\gamma: [t_0, t_1] \to U$ eine Intkurve mit $\gamma(t_0) = u_0$.

Dann gibt es offene Mengen:

$$t_0 \in I_0 \subseteq J \subseteq I$$

$$u_0 \in U_0 \subseteq U$$

mit $J \times I_0 \times U_0 \subseteq D(X)$.

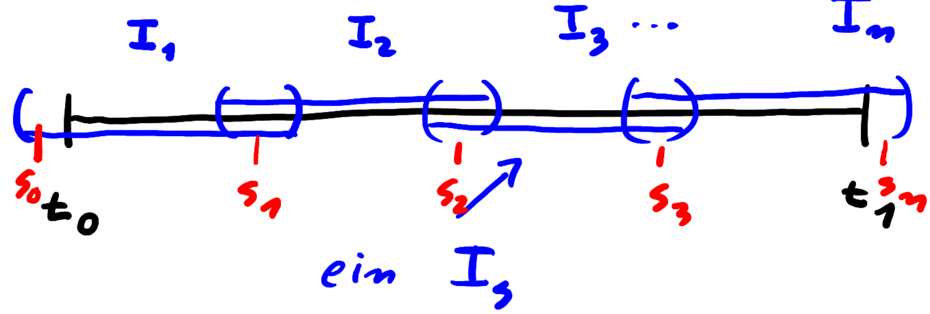
Insbesondere ist $D(X)$ offen.

Bew: Für jedes $s \in [t_0, t_1]$ gibt es eine offene Menge $I_s \times U_s \ni (s, \gamma(s))$, auf der ein lok. Fluß

$$\Phi_s : I_s \times I_s \times U_s \longrightarrow U$$

erklärt ist.

$[t_0, t_1]$ ist kompakt.



$$s_0 < t_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < t_n < s_n$$

$$(s_{i-1}, s_i) \subseteq I_i$$

$\Phi_i : I_i \times I_i \times U_i \to U$ lok. Fluß

Φ_i ist stetig.

$\gamma(s_n) \in V_n := U_n$

$\gamma(s_{n-1}) \in V_{n-1} := \Phi_n(s_n, s_{n-1}, -)^{-1}(V_n) \subseteq U_n$

$\gamma(s_{n-2}) \in V_{n-2} := \Phi_{n-1}(s_{n-1}, s_{n-2}, -)^{-1}(V_{n-1}) \subseteq U_2$

$\vdots$

$\gamma(s_0) \in V_0 := \Phi_1(s_0, s_1, -)^{-1}(V_1) \subseteq U_1$

V_0 ist offene Umg. von u_0

Beh: Für $v \in V_0$ existiert eine Int. kurve

$\gamma : (s_0, s_n) \to U$ mit $\gamma(s_0) = v$.

$\ulcorner$ $\Phi_1(-, s_0, v)$ ist Int. kurve auf $I_1 \supseteq [s_0, s_1]$

$\Phi_2(-, s_1, \overbrace{\Phi_1(s_1, s_0, v)}^{\in V_1})$ setzt sie nach $I_2 \supset [s_1, s_2]$ fort.

...

$\lrcorner$

<u>Schließlich</u> wähle $U_0 \ni u_0$ und $I_0 \ni t_0$,

so daß $\Phi_1(s_0, I_0, U_0) \subseteq V_0$.

<u>Dann</u>: $(s_0, s_n) \times I_0 \times U_0 \subseteq D(X)$.