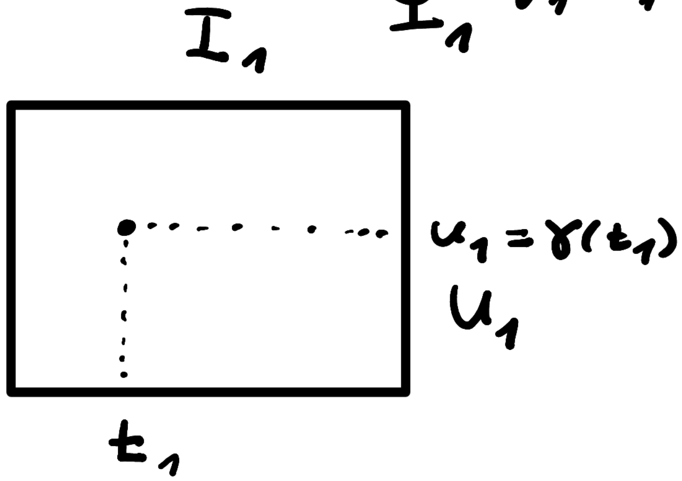
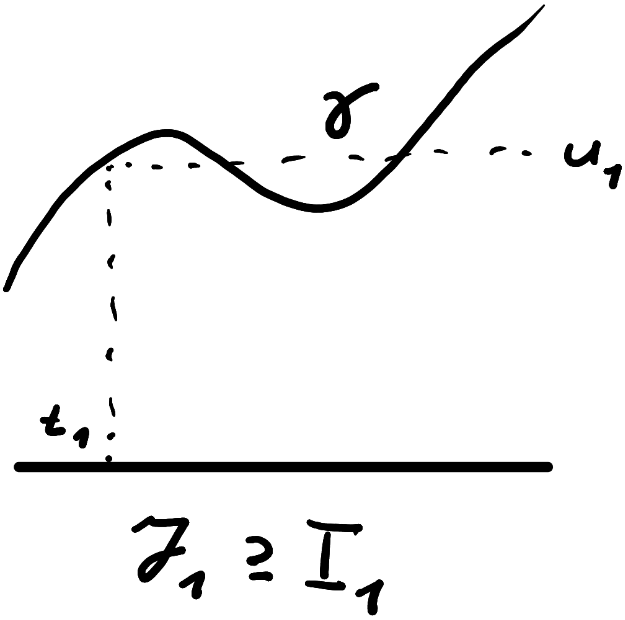
Verlängern eines Flusses

$\gamma : [\bar{t}, \tilde{t}] \to U$ Int. kurve

$$\Phi_1 : J_1 \times I_1 \times U_1 \to U$$

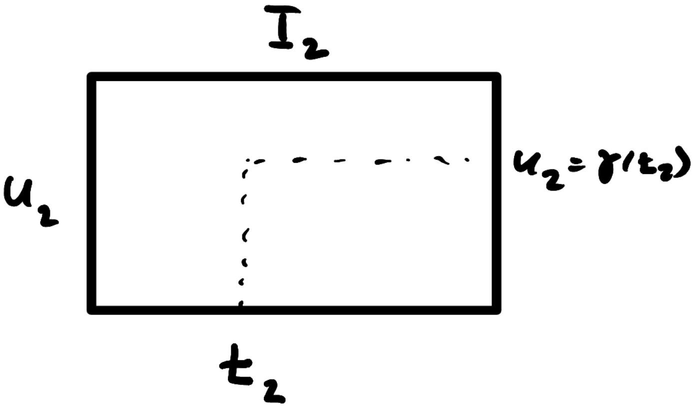


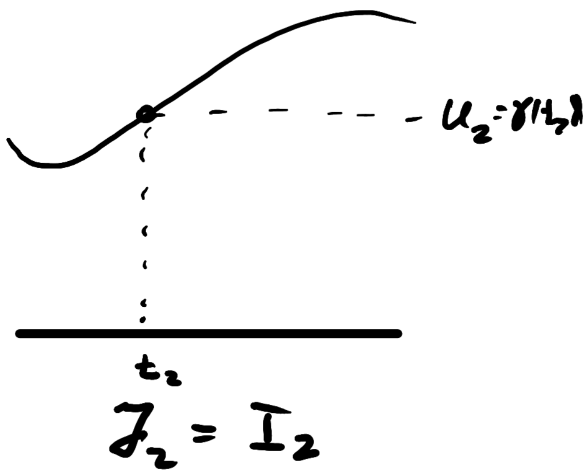


$$\Phi_2 : I_2 \times I_2 \times U_2 \to U \quad \text{lok. Fluß}$$

Annahme: $t_2 :\in J_1 \cap I_2$

$u_2 := \gamma(t_2) \in U_2$





Dann: $\Phi_1(t_2, -, -) : I_1 \times U_1 \to U$ stetig

$$\Phi_1(t_2, t_1, u_1) = \gamma(t_2) \in U_2$$

Also: $\Phi_1(t_2, -, -)^{-1}(U_2)$ ist offene Umg. von (t_1, u_1)

Wähle $I_1' \times U_1' \subseteq \Phi^{-1}(t_2, -, -)^{-1}(U_2)$ um (t_1, u_1).

Setze: $\mathcal{J}_1' := \mathcal{J}_1 \cup I_2$

Beh: Auf $\mathcal{J}_1' \times I_1' \times U_1'$ ist ein Fluß

$$\Phi_1' : \mathcal{J}_1' \times I_1' \times U_1' \to U$$

erklärt.

Bew: Sei γ' max. Int. kurve mit $\gamma'(t') = u'$ für $(t', u') \in I_1' \times U_1'$.

$\Phi_1(-, t', u')$ ist γ' auf $\mathcal{J}_1 \ni t_2$

Ferner $\gamma'(t_2) = \Phi_1(t_2, t', u') \in U_2$

Also: $\Phi_2(-, t_2, \gamma'(t_2))$ ist γ' auf I_2.

γ existiert auf $\mathcal{J}_1 \cup I_2$ $\boxtimes$

Prop: Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig, lok. beschr. und unif. Lipschitzstetig im Raum.

Sei $(t^*, \bar{t}, \bar{u}) \in D(X)$ und $\gamma: [\bar{t}, t^*] \to U$ eine Intkurve mit $\gamma(\bar{t}) = \bar{u}$

Dann gibt es offene Mengen:

$$[\bar{t}, t^*] \subseteq J \subseteq I$$

$$\bar{t} \in I_0 \subseteq J$$

$$\bar{u} \in U_0 \subseteq U$$

mit $J \times I_0 \times U_0 \subseteq D(X)$.

Insbesondere ist $D(X)$ eine offene Menge.

Bew: Zunächst gibt es einen lok. Fluß $\bar{\Phi}: \bar{I} \times \bar{I} \times \bar{U} \to U$ mit $(\bar{t}, \bar{u}) \in \bar{I} \times \bar{U}$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $(\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon) \subseteq \bar{I}$.

Betrachte:

$$\mathcal{S} := \left\{ s \in I \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, I' \times U' \ni (\bar{t}, \bar{u}) \text{ offen und ein Fluß} \\ (\bar{t}-\varepsilon, s) \times I' \times U' \xrightarrow[\Phi']{} U \end{array} \right\}$$

Beh: $\mathcal{S} \neq \emptyset$

$\ulcorner$ Es gibt $\Phi: I_1 \times I_1 \times U_1 \to U$ mit $\bar{t} \in I_1$ und $\gamma(\bar{t}) = \bar{u} \in U_1$. $\lrcorner$

Beob: $\bar{t} < s < s' \in \mathcal{S} \Rightarrow s \in \mathcal{S}$

D.h.: $\mathcal{S}$ ist Intervall $[\bar{t}, a)$ oder $[\bar{t}, a]$.

Beh: $[\bar{t}, s) \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow s+\varepsilon \in \mathcal{S}$ für ein $\varepsilon > 0$.

$\ulcorner$ Es gibt einen lok. Fluß $\Phi_s : I_s \times I_s \times U_s \to V$

mit $(s, \gamma(s)) \in I_s \times U_s$.

Wähle $s' < s$ nahe genug mit

$$\gamma(s') \in U_s \quad (U_s \text{ ist offen, } \gamma \text{ ist stetig})$$

Wähle $s'' \in (s', s)$. Wegen $s'' \in [\bar{t}, s)$

gibt es einen Fluß

$$\Phi'' : (\bar{t}, s'') \times I'' \times U'' \to U$$

mit $(\bar{t}, \bar{u}) \in I'' \times U''$.

Nun ist $s' \in I'' \cap I_s$ und $\gamma(s') \in U_s$.

Daher gibt es einen Fluß auf

$$(I'' \cup I_s) \times I'' \times U'''$$

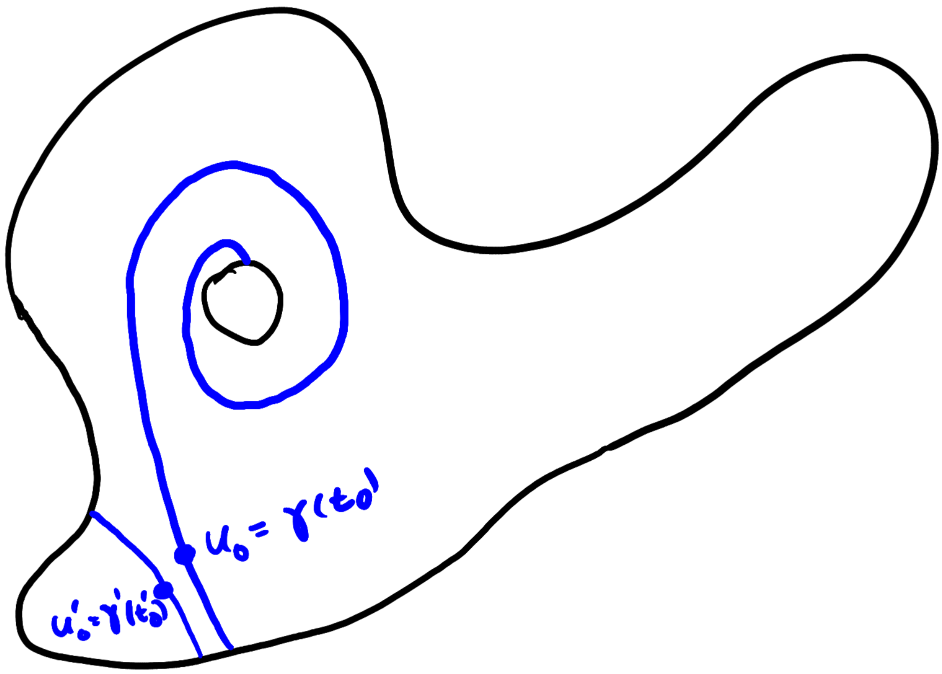
Mithin ist $I_s \subseteq \mathcal{S}$. $\lrcorner$

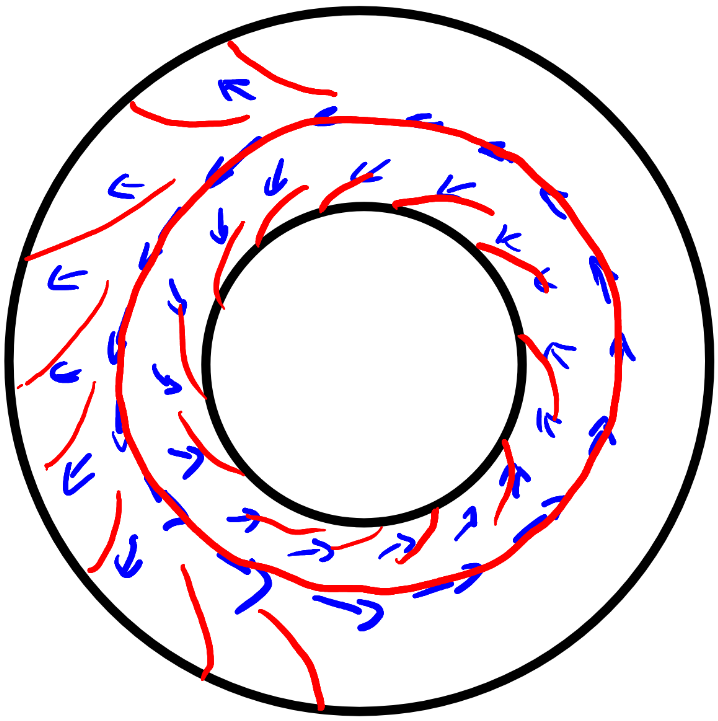
Kor: $\mathcal{S}$ ist offen und abg.

Also: $[\bar{t}, t^* + \delta) \subseteq \mathcal{S}$.

Damit gibt es einen $F(u,t)$

$$(\bar{t}-\varepsilon, t^*+\delta) \times I_0 \times U_0 \longrightarrow \mathcal{U} \qquad \blacksquare$$





Beob: Sei $\gamma : (a,b) \to E$ D-Lipschitzstetig.

Dann hat γ eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $(a,b]$. (und $[a,b)$ und $[a,b]$)

Bew: Die Folge (t_i) in (a,b) konvergiere gegen b.

Dann ist (t_i) Cauchyfolge.

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists N\, \forall m,n \geq N: \quad |t_m - t_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t_m) - \gamma(t_n)\| < D\varepsilon$$

Daher: $(\gamma(t_i))$ ist Cauchyfolge.

Setze: $\gamma(b) := \lim_{i\to\infty} \gamma(t_i)$

Sei nun (s_j) eine andere Cauchyfolge gegen b.

Dann: (t_i) und (s_j) sind Cauchy kokonvergent

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists N\, \forall m,n \geq N: \quad |t_m - s_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t_m) - \gamma(s_n)\| < D\varepsilon$$

Also: $(\gamma(t_i))$ und $(\gamma(s_j))$ sind kokonvergent.

Also: $\gamma(b)$ ist eindeutig und γ ist stetig bei b.

$\boxtimes$