Beob: Sei $\gamma : (a,b) \to E$ D-Lipschitzstetig.

Dann hat γ eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $(a,b]$. (und $[a,b)$ und $[a,b]$)

Bew: Die Folge (t_i) in (a,b) konvergiere gegen b.

Dann ist (t_i) Cauchyfolge.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m,n \geq N: \quad |t_m - t_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| \gamma(t_m) - \gamma(t_n) \| < D\varepsilon$$

Daher: $(\gamma(t_i))$ ist Cauchyfolge.

Setze: $\gamma(b) := \lim_{i \to \infty} \gamma(t_i)$

Sei nun (s_j) eine andere Cauchyfolge gegen b.

Dann: (t_i) und (s_j) sind Cauchy kokonvergent

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m,n \geq N: \quad |t_m - s_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| \gamma(t_m) - \gamma(s_n) \| < D\varepsilon$$

Also: $(\gamma(t_i))$ und $(\gamma(s_j))$ sind kokonvergent.

Also: $\gamma(b)$ ist eindeutig und γ ist stetig bei b. $\boxtimes$

Prop: Sei $X : I \times E \to E$ ein (globales) stetiges, lok. unif. L-Lipschitzstetiges Vektorfeld. Ferner sei X beschränkt auf beschränkten Mengen.

Sei $(t_0, u_0) \in I \times E$ und $\gamma : J \to E$ die maximale Int.kurve mit $u_0 = \gamma(t_0)$.

Wir wissen schon, daß J offen ist.

Es gilt:

$$\sup J = \sup I \quad \text{oder} \quad \lim_{t \nearrow \sup J} \frac{1}{\|\gamma(t)\|} = 0$$

Bew: Sei $t_+ := \sup J < \sup I$. Wähle $t_- \in J$ (weil J offen ist, gilt $t_- < t_+$).

Sei nun (t_i) eine Folge mit $t_i \to t$.

O.B.d.A: $t_- < t_i < t_+ \quad \forall i$.

Beh: $\|\gamma(t_i)\|$ ist unbeschränkt.

Andernfalls wähle $C > 0$ mit

$$\|\gamma(t_i)\| < C \quad \forall i$$

Wähle $D>0$ mit

X beschr. auf beschr. Mengen

$$\|X_s(u)\| \leq D \quad \forall \; \begin{matrix} u \in \overline{\mathbb{B}}_{2c}(0) \\ s \in [t_-, t_+] \end{matrix}$$

Wähle $\delta > 0$ mit $\delta < c/D$.

Auf $[t_-, t_+] \times \overline{\mathbb{B}}_{2c}$ gilt Tempolimit D.

In der Zeit δ kann in $\mathbb{B}_{2c}$ daher höchstens ein Weg der Länge c zurückgelegt werden.

__Also:__ Für $s \in (t_+ - \delta, t_+)$ ist $\gamma(s) \in \mathbb{B}_{2c}(0)$

⌜ Es gibt $t_i \in (t_+ - \delta, t_+)$ mit $\gamma(t_i) \in \mathbb{B}_c(0)$ und $|t_i - s| < \delta < c/D$. ⌟

__Dann:__ Für $t, t' \in (t_+ - \delta, t_+)$ gilt:

$$\gamma(t') - \gamma(t) = \int_t^{t'} \underbrace{X_s(\gamma(s))}_{\|\cdot\| < D} ds$$

und damit:

$$\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq D\,|t' - t| \qquad (*)$$

__D.h.__ Auf $(t_+ - \delta, t_+)$ ist γ D-Lipschitzstetig.

Sei $\gamma_+ : (t_+ - \delta, t_+] \to E$ die eindeutige stetige Fortsetzung von γ nach t_+.

Beh: γ_+ ist Int. kurve.

$$\int_t^{t_+} X_s(\gamma(s))\,ds = \gamma(t_+) - \gamma(t)$$

$\ulcorner$

$$\int_t^{t_+} X_s(\gamma(s))\,ds = \lim_{t' \nearrow t_+} \int_t^{t'} X_s(\gamma(s))\,ds$$

$$= \lim_{t' \nearrow t} \gamma(t') - \gamma(t) = \gamma(t_+) - \gamma(t) \lrcorner$$

Nun können wir γ_+ über t_+ hinaus verlängern, weil X im Raum unif. Lipschitzstetig ist. $\lightning$

Beh: Sei (t_i) Cauchyfolge in $(t_+ - \delta, t_+)$ gegen t_+.

$$\forall R > 0 \ \exists N \ \forall m \geq N : \ \|\gamma(t_m)\| \geq R$$

$\ulcorner$ X ist beschränkt auf $(t_+ - \delta, t_+) \times \overline{\mathbb{B}}_{2R}(0)$.

Sei $D > 0$ eine obere Schranke für $\|X\|$.

Dann braucht es Zeit $\geq R/D$, von irgendwo im $\mathbb{B}_R(0)$ aus $\mathbb{B}_{2R}(0)$ zu verlassen.

Da $\gamma(t_m)$ nicht beschränkt ist, wird $\mathbb{B}_{2R}(0)$ immer wieder verlassen.

<u>Also:</u> $\gamma(t_m) \in \mathbb{B}_R(0) \Rightarrow \exists\, n > m : |t_n - t_m| > R/D$

Das kann ersichtlich nicht unendl. oft passieren. $\blacksquare$

Prop: Sei $X : I \times \mathbb{B}_1(0) \to E$ ein stetiges VF, lok. unif. L-stetig im Raum und beschränkt auf Mengen der Form $[a,b] \times \overline{\mathbb{B}_r}(0)$ mit $r < 1$.

Sei $\gamma : J \to \mathbb{B}_1(0)$ eine max. Int.kurve.

Ist $t_+ := \sup J < \sup I$, so ist

$$\lim_{t \nearrow t_+} \|\gamma(t)\| = 1$$

⌜<u>D.h.</u> γ kommt an den Rand von $\mathbb{B}_1(0)$ bevor I abläuft. ⌟

Bew: Sei $0 < r < R < 1$

<u>Beh:</u> $\forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in (t_+ - \varepsilon, t_+)$ mit

$$\|\gamma(t)\| > R$$

⌜Bew. durch Widerspruch.

<u>Annahme:</u> $\|\gamma(t)\| \leq R$ für alle $t \in (t_+ - \varepsilon, t_+)$

O.B.d.A: $t_+ - \varepsilon > \inf I$

D.h.: $[t_+ - \varepsilon, t_+] \subseteq I$

$D > 0$ sei Schranke für $\|X\|$ auf

der Menge $[t_+-\varepsilon, t_+] \times \overline{\mathbb{B}_R(0)}$.

Da γ auf $[t_+-\varepsilon, t_+)$ in $\overline{\mathbb{B}_R(0)}$ verläuft, unterliegt γ in dieser Zeit dem Tempolimit D.

<u>Also:</u> Für $t, t' \in (t_+-\varepsilon, t_+)$ ist

$$\| \gamma(t') - \gamma(t) \| \leq \int_t^{t'} \| X_s(\gamma(s)) \| ds \leq D|t'-t|$$

<u>Kor:</u> $u_+ := \lim_{t \nearrow t_+} \gamma(t)$ ist wohldef.

<u>Setze:</u> $\gamma_+ : (t_+-\varepsilon, t_+] \longrightarrow \mathbb{B}_1(0)$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & : t < t_+ \\ u_+ & : t = t_+ \end{cases}$$

<u>Dann</u> ist γ_+ eine Int.kurve

$$\int_t^{t_+} X_s(\gamma_+(s))\, ds = \lim_{t' \nearrow t_+} \int_t^{t'} X_s(\gamma(s))\, ds$$

$$= \lim_{t' \nearrow t_+} \gamma(t') - \gamma(t)$$

$$= \gamma_+(t_+) - \gamma(t)$$

Nun läßt sich γ_+ über t_+ hinaus verlängern (P-L): Wir verkleben γ_+ mit einer lok. Int.kurve zum AWP $u_+ = \bar{\gamma}(t_+)$.

Dann aber war γ nicht maximal. ↯ ┘

Beh: $\forall r < 1 \ \exists \tau < t_+ \ \forall t \in (\tau, t_+):$

$$\|\gamma(t)\| > r$$

┌ Wähle R mit $r < R < 1$.

X ist auf $[t_+ - \varepsilon, t_+] \times \overline{\mathbb{B}_R}(0)$ beschränkt.

Sei $D > 0$ eine obere Schranke.

γ braucht Zeit $\geq \delta := \frac{R-r}{D} > 0$, von $\overline{\mathbb{B}_r}(0)$ aus $\overline{\mathbb{B}_R}(0)$ zu verlassen. | Das muß immer wieder geschehen!

Daher kann γ im Zeitraum $(t_+ - \varepsilon, t_+)$ nur endlich oft nach $\mathbb{B}_r(0)$ zurückkehren. ┘

D.h.: $\|\gamma(t)\| \nearrow 1$ für $t \nearrow t_+$. ▨

__Übung:__ Sei $X: I \times U \to E$ ein stetiges, lok. unif. L-stetiges VF und beschränkt auf Mengen der Form $[a,b] \times W$, wobei $W \subseteq U$ beschränkt sei und positiven Abstand zum Rand ∂U habe.

Sei $\gamma: J \to U$ eine max. Int.kurve.

__Zeige:__ Ist $t_+ := \sup J < \sup I$, so ist

$$\lim_{t \nearrow t_+} \min\left\{ d(\gamma(t), \partial U), \frac{1}{\|\gamma(t)\|} \right\} = 0$$

⌜__D.h.__ γ läuft in den Rand oder haut nach ∞ ab. ⌟

Beob: (X,d) : kompakter metrischer Raum

$\delta > 0$

Die Überdeckung

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathbb{B}_\delta(x)$$

hat eine endl. Teilüberdeckung.

$$X = \mathbb{B}_\delta(x_1) \cup \dots \cup \mathbb{B}_\delta(x_m)$$

Wir nennen $N := \{x_1, \dots, x_m\}$ ein <u>δ-Netz</u> für X. Jeder Punkt $x \in X$ hat Abstand $< \delta$ zu N.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei N_k ein $\frac{1}{2^k}$ - Netz.

Dann ist $N := \bigcup N_k$

abzählbar und dicht in X.

Also: Jeder kompakte metrische Raum ist <u>separabel</u> (hat eine abzählbare dichte Teilmenge).

Def: Sei (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ heißt <u>relativ kompakt</u>, wenn jede Folge (a_n) in A eine in Y konvergente Teilfolge hat.

Beob: Jede Teilmenge einer rel. kompakten Teilmenge ist selbst rel. kompakt.

Beob: Sei $(f_m : X \to Y)$ eine Funktionenfolge. Es sei

$$\{ f_m(x) \mid m \in \mathbb{N} \} \subseteq Y \text{ rel. komp. } \quad \forall x \in X$$

Sei $A \subseteq X$ abzählbar. Dann gibt es eine Teilfolge (g_n), so daß $(g_m(a))$ für jeden Punkt $a \in A$ konvergiert. (Der Grenzwert liegt in Y)

Bew: Wähle eine Abzählung $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Da $\{ f_m(a_1) \mid m \}$ rel. komp. in Y ist, gibt es eine Teilfolge $(f_{1,m})$ von (f_m), so daß $(f_{1,m}(a_1))$ in Y konvergiert.

Nun ist $\{ f_{1,m}(a_2) \mid m \}$ rel. komp. in Y,

und es gibt eine Teilfolge $f_{2,m}$, so

daß $(f_{2,m}(a_2))$ in Y konvergiert.

<u>Bem:</u> $f_{2,m}(a_1)$ konvergiert natürlich

immer noch. [Teilfolge von $f_{1,m}(a_1)$]

Wir fahren fort und erhalten Teilfolgen

$$f_{1,m} \quad f_{2,m} \quad f_{3,m} \quad \dots$$

so daß $\left(f_{k,m}(a_i)\right)_m$ konvergiert für $i \leq k$.

<u>Setze</u> $g_n := f_{n,n}$

<u>Dann</u> konvergiert $g_n(a_i)$ für jedes i. ▨

Def: X und Y seien metrische Räume. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen $X \to Y$ heißt <u>gleichgradig stetig im Punkt</u> $x \in X$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \ \forall \bar{x} \in \mathbb{B}_\delta(x)$$

$$d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ heißt <u>gleichgradig stetig</u>, wenn $\mathcal{F}$ im jedem Punkt gleichgradig stetig ist.

$\mathcal{F}$ heißt <u>gleichmäßig gleichgradig stetig</u>, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \ \forall x, \bar{x} \in X:$$

$$d_X(x, \bar{x}) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

Bsp: Sind alle $f \in \mathcal{F}$ L-Lipschitzstetig, so ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig

$$\ulcorner \quad d(x, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{L} \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

$\delta := \varepsilon / L$ tut's. $\lrcorner$ ☑

Satz von Arzela - Ascoli

X: kompakter metrischer Raum

Y: vollständiger metrischer Raum

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X;Y) = \mathcal{C}_b(X;Y)$ $\quad$ X: kompakt !

Es gelte:

1) $\forall x \in X : \{ f(x) \mid f \in \mathcal{F} \} \subseteq Y$ rel. komp.

2) $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig.

Dann gilt:

$\mathcal{F}$ ist rel. komp. in $\mathcal{C}(X;Y)$

D.h.: Jede Folge (f_m) in $\mathcal{F}$ hat eine Teilfolge, die im metrischen Raum $\mathcal{C}(X;Y) = \mathcal{C}_b(X;Y)$ bez d_∞ gegen eine stetige Abb

$$g : X \to Y$$

konvergiert.

Das ist gleichmäßige Konvergenz von Funktionen.

Bew: Sei N_k ein $\frac{1}{2^k}$-Netz in X.

Setze: $N := \bigcup N_k$ (abz. & dicht in X)

Sei (f_m) eine Folge in $\mathcal{F}$.

Wähle eine Teilfolge (g_n), die auf allen Punkten in N konvergiert. (s. o.)

Beh: (g_n) ist Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X;Y)$.

⌈ Sei $\varepsilon > 0$.

$\mathcal{F}$ ist gl. gl. st., also wähle $\delta > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall\, x, \bar{x} \in X:$$

$$d(x, \bar{x}) < \delta \implies d(f(x), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Es gibt Punkte $x_1, \dots, x_m \in N$, die ein δ-Netz für X bilden.

Die Folgen $(g_n(x_i))_n$ konvergieren für jedes x_i.

Zu $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es also $M_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, j, k > M_i : \quad d(g_j(x_i), g_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Setze: $M := \max M_1, \dots, M_m$

Dann ist

$$\forall j,k > M \quad \forall x_i : \quad d(g_j(x_i), g_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Nun rechnen wir für x δ-nahe an x_i:

$$\begin{aligned} d(g_j(x), g_k(x)) \le\ & d(g_j(x), g_j(x_i)) && < \varepsilon/4 \\ & + d(g_j(x_i), g_k(x_i)) && < \varepsilon/4 \\ & + d(g_k(x_i), g_k(x)) && < \varepsilon/4 \end{aligned}$$

für $j,k > M$.

D.h.: $d_\infty(g_j, g_k) \le \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$ $\qquad \lrcorner \qquad \boxed{/\!/}$