Prop: Sei $X: I \times \mathbb{B}_1(0) \to E$ ein stetiges VF, lok. unif. L-stetig im Raum und beschränkt auf Mengen der Form $[a,b] \times \overline{\mathbb{B}_r}(0)$ mit $r < 1$.

Sei $\gamma: J \to \mathbb{B}_1(0)$ eine max. Int.kurve.

Ist $t_+ := \sup J < \sup I$, so ist

$$\lim_{t \nearrow t_+} \|\gamma(t)\| = 1$$

⌈ **D.h.** γ kommt an den Rand von $\mathbb{B}_1(0)$ bevor I abläuft. ⌋

Bew: Sei $0 < r < R < 1$

Beh: $\forall \delta > 0 \ \exists t \in (t_+ - \delta, t_+)$ mit

$$\|\gamma(t)\| > R$$

⌈ Bew. durch Widerspruch.

Annahme: $\|\gamma(t)\| \leq R$ für alle $t \in (t_+ - \delta, t_+)$

O.B.d.A: $t_+ - \delta > \inf I$

D.h.: $[t_+ - \delta, t_+] \subseteq I$

$D > 0$ sei Schranke für $\|X\|$ auf

der Menge $[t_+ - \delta, t_+] \times \overline{\mathbb{B}_R}(0)$.

Da γ auf $[t_+ - \delta, t_+)$ in $\overline{\mathbb{B}_R}(0)$ verläuft, unterliegt γ in dieser Zeit dem Tempolimit D.

<u>Also:</u> Für $t, t' \in (t_+ - \delta, t_+)$ ist

$$\| \gamma(t') - \gamma(t) \| \leq \int_t^{t'} \| X_s(\gamma(s)) \| ds \leq D |t' - t|$$

<u>Kor:</u> $u_+ := \lim\limits_{t \nearrow t_+} \gamma(t)$ ist wohldef.

<u>Setze:</u> $\gamma_+ : (t_+ - \delta, t_+] \longrightarrow \mathbb{B}_1(0)$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & : t < t_+ \\ u_+ & : t = t_+ \end{cases}$$

<u>Dann</u> ist γ_+ eine Int.kurve

$$\int_t^{t_+} X_s(\gamma_+(s)) ds = \lim_{t' \nearrow t_+} \int_t^{t'} X_s(\gamma(s)) ds$$

$$= \lim_{t' \nearrow t_+} \gamma(t') - \gamma(t)$$

$$= \gamma_+(t_+) - \gamma(t)$$

Nun läßt sich γ_+ über t_+ hinaus verlängern (P-L): Wir verkleben γ_+ mit einer lok. Int.kurve zum AWP $u_+ = \tilde{\gamma}(t_+)$.

<u>Dann</u> aber war γ nicht maximal. ↯ ┘

<u>Beh:</u> $\forall r < 1 \; \exists \tau < t_+ \; \forall t \in (\tau, t_+)$:

$$\|\gamma(t)\| > r$$

┌ Wähle R mit $r < R < 1$.

X ist auf $[t_+ - \delta, t_+] \times \overline{\mathbb{B}_R}(0)$ beschränkt.

Sei $D > 0$ eine obere Schranke.

γ braucht Zeit $\geq \Delta := \frac{R-r}{D} > 0$, von $\overline{\mathbb{B}_r}(0)$ aus $\overline{\mathbb{B}_R}(0)$ zu verlassen. | Das muß immer wieder geschehen!

Daher kann γ im Zeitraum $(t_+ - \delta, t_+)$ nur endlich oft nach $\mathbb{B}_r(0)$ zurückkehren. ┘

<u>D.h.:</u> $\|\gamma(t)\| \nearrow 1$ für $t \nearrow t_+$. ▨

Übung: Sei $X : I \times U \to E$ ein stetiges, lok. unif. L-stetiges VF und beschränkt auf Mengen der Form $[a,b] \times W$, wobei $W \subseteq U$ beschränkt sei und positiven Abstand zum Rand ∂U habe.

Sei $\gamma : J \to U$ eine max. Int. kurve.

Zeige: Ist $t_+ := \sup J < \sup I$, so ist

$$\lim_{t \nearrow t_+} \min \left\{ d(\gamma(t), \partial U), \frac{1}{\|\gamma(t)\|} \right\} = 0$$

⌜ **D.h.** γ läuft in den Rand oder haut nach ∞ ab. ⌟

Beob: (X,d) : kompakter metrischer Raum

$\varepsilon > 0$

Die Überdeckung

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathbb{B}_\varepsilon(x)$$

hat eine endl. Teilüberdeckung.

$$X = \mathbb{B}_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup \mathbb{B}_\varepsilon(x_m)$$

Wir nennen $N := \{x_1, \dots, x_m\}$ ein <u>ε-Netz</u> für X. Jeder Punkt $x \in X$ hat Abstand $< \varepsilon$ zu N.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei N_k ein $\frac{1}{2^k}$-Netz.

Dann ist $N := \bigcup N_k$

abzählbar und dicht in X.

Also: Jeder kompakte metrische Raum ist <u>separabel</u> (hat eine abzählbare dichte Teilmenge).