

Def: Sei (Y, d) ein metrischer Raum.

Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ heißt relativ kompakt, wenn jede Folge (a_n) in A eine in Y konvergente Teilfolge hat.

Beh: Jede Teilmenge einer rel. kompakten Teilmenge ist selbst rel. kompakt.

Beh: Sei $(f_m: X \rightarrow Y)$ eine Funktionenfolge.

Es sei

$$\{f_m(x) \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq Y \text{ rel. komp. } \forall x \in X$$

Sei $A \subseteq X$ abzählbar. Dann gibt es eine Teilfolge (q_n) , so daß

$(q_m(a))$ für jeden Punkt $a \in A$

konvergiert. (Der Grenzwert liegt in Y)

Bew: Wähle eine Abzählung $A = \{a_1, a_2, \dots\}$

Da $\{f_m(a_1) \mid m\}$ rel. komp. in Y ist,

gibt es eine Teilfolge $(f_{1,m})$ von (f_m) ,

so daß $(f_{1,m}(a_1))$ in Y konvergiert.

Nun ist $\{f_{1,m}(a_2) \mid m\}$ rel. komp. in Y ,
und es gibt eine Teilfolge $f_{2,m}$, so
daß $(f_{2,m}(a_2))$ in Y konvergiert.

Dann: $f_{2,m}(a_1)$ konvergiert natürlich
immer noch. [Teilfolge von $f_{1,m}(a_1)$]

Wir fahren fort und erhalten Teilfolgen

$$f_{1,m} \quad f_{2,m} \quad f_{3,m} \quad \dots$$

so daß $(f_{k,m}(a_i))_m$ konvergiert für $i \leq k$.

Setze $g_n := f_{n,n}$

Dann konvergiert $g_n(a_i)$ für jedes i . $\square$

Def: X und Y seien metrische Räume.

Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen $X \rightarrow Y$ heißt gleichgradig stetig im Punkt $x \in X$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall \bar{x} \in B_\delta(x)$$

$$d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ heißt gleichgradig stetig, wenn $\mathcal{F}$ in jedem Punkt gleichgradig stetig ist.

$\mathcal{F}$ heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall x, \bar{x} \in X:$$

$$d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

Bsp: Sind alle $f \in \mathcal{F}$ L -Lipschitzstetig, so

ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig

$$\left[d_X(x, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon \right.$$

$$\delta := \frac{\varepsilon}{L} \text{ tut's.}$$

□

Satz von Arzela - Ascoli

X : kompakter metrischer Raum

Y : vollständiger metrischer Raum

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X; Y) = \mathcal{C}_b(X; Y) \quad X: \text{kompakt!}$$

Es gelte:

1) $\forall x \in X: \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ rel. komp.

2) $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig.

Dann gilt:

$\mathcal{F}$ ist rel. komp. in $\mathcal{C}(X; Y)$

D.h.: Jede Folge (f_m) in $\mathcal{F}$ hat

eine Teilfolge, die im metrischen

Raum $\mathcal{C}(X; Y) = \mathcal{C}_b(X; Y)$ bez d_∞

gegen eine stetige Abb

$$g: X \rightarrow Y$$

konvergiert.

┌ Das ist gleichmäßige Konvergenz von Funktionen. ┘

Bew: Sei N_k ein $\frac{1}{2^k}$ -Netz in X .

Setze: $N := \bigcup N_k$ (abz. & dicht in X)

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$.

Wähle eine Teilfolge (g_n) , die auf allen Punkten in N konvergiert. (s.o.)

Beh: (g_n) ist Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X; Y)$.

┌ Sei $\varepsilon > 0$.

$\mathcal{F}$ ist gl. gl. st., also wähle $\delta > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x, \bar{x} \in X:$$

$$d(x, \bar{x}) < \delta \implies d(f(x), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Es gibt Punkte $x_1, \dots, x_m \in N$, die ein δ -Netz für X bilden.

Die Folgen $(g_n(x_i))_n$ konvergieren für jedes x_i .

Zu $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es also $M_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall j, k > M_i : d(g_j(x_i), g_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Setze: $M := \max M_1, \dots, M_m$

Dann ist

$$\forall j, k > M \quad \forall x_i : d(g_j(x_i), g_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Nun rechnen wir für x δ -nahe an x_i :

$$\begin{aligned} d(g_j(x), g_k(x)) &\leq d(g_j(x), g_j(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4} \\ &\quad + d(g_j(x_i), g_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4} \\ &\quad + d(g_k(x_i), g_k(x)) < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

für $j, k > M$.

$$\underline{\text{D.h.:}} \quad d_\infty(g_j, g_k) \leq \frac{3}{4} \varepsilon < \varepsilon \quad \square$$

Beob: $X \xrightarrow{f_n} Y \xrightarrow{g} Z$

f_n konvergiere gleichm.

g sei gleichm. stetig.

Dann konv. die Verkettungen $g \circ f_n$
gleichmäßig.

Bew: Sei $f: X \rightarrow Y$ der gl. Limes
der f_n .

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon$$

und N mit

$$n > N \Rightarrow d_\infty(f_n, f) < \delta.$$

Dann gilt für alle $x \in X$

$$d(f_n(x), f(x)) < \delta$$

$$\Rightarrow d(g f_n(x), g f(x)) < \varepsilon$$

D.h. $d_\infty(g f_n, g f) < \varepsilon$

