Satz $X: I \times U \to E = \mathbb{R}^n$ stetiges VF !!

$\|X\|$ sei beschränkt durch $K > 0$.

$(t_0, u_0) \in I \times U$ ↙ analog: $[t_0 - \delta, t_0]$

$J = [t_0, t_0 + \delta] \subseteq I$ mit $\overline{\mathbb{B}}_{K\delta}(u_0) \subseteq U$

Dann gibt es $\gamma: J \to U$ mit

$$\gamma(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\, ds \qquad \forall t \in J$$

Bew: Für jedes $\alpha > 0$ setze

$$\gamma_\alpha(t) := \begin{cases} u_0 & t \le t_0 \\ u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma_\alpha(t - \alpha)) & t \in J \end{cases}$$

Bem γ_α ist erklärt auf $(-\infty, t_0 + \delta]$.

$(-\infty, t_0]$ konst u_0

$[t_0, t_0 + \alpha]$ $\quad u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(u_0)\, ds$

$[t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha]$ $\quad u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\quad)\, ds$

Wir betrachten γ_α aber als Funktion auf J.

wichtig wg. Arzela-Ascoli ⟵ kompakt! ⟶

<u>Beh</u>: Jedes γ_α ist K-Lipschitzstetig.

⌐

$$\|\gamma_\alpha(t) - \gamma_\alpha(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t} X_s(\gamma_\alpha(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \int_{t'}^{t} \overbrace{\|X_s(\cdots)\|}^{\overset{K}{\vee\!\!\shortparallel}}\, ds$$

$$\leq K|t-t'|$$

Arzela-Ascoli $\Rightarrow$

Die Funktionenfolge $\gamma_1, \gamma_{1/2}, \gamma_{1/3}, \ldots$

hat eine gleichm. konvergente Teilfolge.

Sei $\underset{\gamma_{\alpha_n}}{\underset{\shortparallel}{\gamma_n}}$ diese gl. konv. Teilfolge und

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \gamma_n \quad : J \to U$$

sei der Limes (autom. stetig!).

Erinnerung:

$$\gamma_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma_n(s-\alpha_n))\, ds$$

Beh: Die Folge $(\overline{\gamma}_n)_n$ mit

$$\overline{\gamma}_n(t) := \gamma_n(t - \alpha_n)$$

konv. gleichm. gegen γ.

$\ulcorner$

$$\|\overline{\gamma}_n(t) - \gamma(t)\| \leq \| \gamma(t-\alpha_n) - \gamma_n(t)\| + \| \gamma_n(t) - \gamma(t)\|$$

$$\leq K \alpha_n + \|\gamma_n - \gamma\|_\infty$$

Also $\|\overline{\gamma}_n - \gamma\|_\infty \leq K_n \alpha_n + \|\gamma_n - \gamma\|_\infty \to 0 \lrcorner$

Kor Die Folge

$$\begin{aligned} h_n : \mathcal{J} &\to E \\ t &\mapsto X_t(\overline{\gamma}_n(t)) \end{aligned}$$

konvergiert (gleichmäßig auf $\mathcal{J}$) gegen

$$\begin{aligned} h : \mathcal{J} &\to E \\ t &\mapsto X_t(\gamma(t)) \end{aligned}$$

$\ulcorner$ Sei $E = \mathbb{R}^n$.

Idee: Wir schreiben h_n als Verkettung

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r, "id\times\bar\gamma_n"] & \mathcal{J}\times U \arrow[r, "X"] & E \\
t \arrow[r, mapsto] & (t,\bar\gamma_n(t)) \arrow[r, mapsto] & X_t(\gamma(t))
\end{tikzcd}$$

Bem.: $id\times\bar\gamma_n$ konv. gl. gegen $id\times\gamma$, weil:

$$\|\bar\gamma_n(t)-\gamma(t)\| = \|(t,\bar\gamma_n(t))-(t,\gamma(t))\|$$

Das Bild $\gamma(\mathcal{J})$ ist kompakt in $U\subseteq E$.

Wähle nun $\varepsilon>0$ und N mit

$$\|\bar\gamma_n-\gamma\|_\infty<\varepsilon \qquad \text{für alle } n\geq N$$

Dann ist

$$D := \bigcup_{t\in\mathcal{J}} \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(\gamma(t)) \subseteq U \subseteq E$$

kompakt und X ist gleichm. stetig auf $\mathcal{J}\times D\subseteq\mathcal{J}\times U$.

Daher konvergiert

$$(h_n)_{n\geq N} = \big(X\circ(id\times\bar\gamma_n)\big)_{n\geq N}$$

gleichmäßig gegen h.

⌟

Also:

$$\begin{array}{lcl}
\gamma_n(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma_n(s-\alpha_n))\,ds \\
\Big\downarrow \text{gl.} & = & u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\overline{\gamma}_n(s))\,ds \\
\Big\downarrow & = & u_0 + \int_{t_0}^{t} h_n(s)\,ds \\
\Big\downarrow & & \quad\Big\downarrow \text{gleichm.} \\
\gamma(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds = u_0 + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds
\end{array}$$

Daher ist γ eine Int. kurve. ▨

Analog: Ist $X: I\times U \to E = \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt auf $[t_0-\delta, t_0]\times U$ so existiert für jedes $u_0 \in U$ eine Int. kurve $\gamma: [t_0-\delta, t_0] \to U$ mit $u_0 = \gamma(t_0)$.

Kor: $X: I\times U \to E = \mathbb{R}^n$ stetiges VF.

$(t_0, u_0) \in I \times U$

offen

Dann gibt es eine lokale Lösung $\gamma: \overset{\overset{t_0}{\cap}}{J} \to U$ des AWP $u_0 = \gamma(t_0)$.

Bew: Wähle $\underbrace{[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{\mathbb{B}_r(u_0)}}_{\text{kompakt}} \subseteq I \times U$.

$\rightsquigarrow X: (t_0-\alpha, t_0+\alpha) \times \mathbb{B}_r(u_0) \to E$ ist beschränkt. ▨

Existenzsatz von Peano

$X: I \times U \to E$ stetiges VF $I \times U$: offen

$(t_0, u_0) \in I \times U$ AWP

Es gibt ein offenes Intervall $J \subseteq I$ und eine Int.kurve $\gamma: J \to U$ mit $\gamma(t_0) = u_0$. Wissen wir schon: lok. Lösbarkeit.

Jede lok. Lösung des AWP läßt sich zu einer max. Int.kurve verlängern und eine nicht-fortsetzbare (maximale) Int.kurve $\gamma_+: J_+ \to U$ kommt dem Rand nach rechts beliebig nah, d.h.:

Sei $\Gamma_+ := \{ (t, \gamma_+(t)) \mid t \in J_+ \}$ der Graph von γ_+. Für jedes $t_0 \in I$ ist $\Gamma_0 := \{ (t, \gamma_+(t)) \mid t \geq t_0 \} \subseteq \Gamma_+$ keine kompakte Teilmenge von $I \times U$.

Bem: Dem Rand nach links beliebig nahekommen definiert sich analog und gilt auch.

Bew: Wir argumentieren mit Zorns Lemma.

Setze:

$$\mathcal{P} := \left\{ \bar{\gamma} : \bar{J} \to U \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \bar{J} \subseteq I \text{ Intervall} \\ 2)\ J \subseteq \bar{J} \\ 3)\ \bar{\gamma} : \bar{J} \to U \text{ Int.kurve} \\ 4)\ \gamma = \bar{\gamma}|_J \end{array} \right\}$$

Beob: $\mathcal{P}$ ist durch die Relation „setzt fort" partiell geordnet

$$\bar{\gamma} : \bar{J} \to U \quad \leq \quad \tilde{\gamma} : \tilde{J} \to U$$

$$\text{wenn} \qquad \bar{J} \subseteq \tilde{J} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma} = \tilde{\gamma}|_{\bar{J}}.$$

Beob: Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ eine Kette, d.h. eine total geordnete Teilmenge (für $\bar{\gamma}, \tilde{\gamma} \in \mathcal{K}$ gilt stets $\bar{\gamma} \leq \tilde{\gamma}$ oder $\tilde{\gamma} \leq \bar{\gamma}$).

Dann hat $\mathcal{K}$ eine obere Schranke in $\mathcal{P}$.

$$J_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\bar{\gamma} : \bar{J} \to U \in \mathcal{K}} \bar{J}$$

$$\gamma_{\mathcal{K}} : J_{\mathcal{K}} \to U \qquad (\bar{\gamma} : \bar{J} \to U \in \mathcal{K})$$

$$t \longmapsto \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wohldef. weil } \mathcal{K} \\ \text{eine Kette ist.}}}{\bar{\gamma}(t)} \quad \text{für } t \in \bar{J}$$

Also: $\mathcal{P}$ hat mindestens ein max. Element $\gamma_+ : J_+ \to \mathcal{U}$.

Bem: Maximalität in $\mathcal{P}$ heißt, daß γ_+ nicht verlängert werden kann.

Sei nun $\Gamma_+ := \{ (t, \gamma_+(t)) \mid t \in J_+ \}$ der Graph einer max. Int.kurve $\gamma_+ \in \mathcal{P}$.

Beh: Γ_+ ist nicht kompakt.

$\ulcorner$ Sei Γ_+ kompakt. Dann ist der Def.ber. J_+ von γ_+ kompakt (stetiges Bild von Γ_+ unter der Proj. auf die t-Koord.).

D.h. $J_+ = [t_-, t_+]$.

Setze $u_+ := \gamma_+(t_+) \in \mathcal{U}$.

Sei $\bar{\gamma} : [t_+, t_+ + \delta] \to \mathcal{U}$ eine lokale Lösung des AWP $u_+ = \bar{\gamma}(t_+)$.

Dann verkleben wir γ_+ und $\bar{\gamma}$. $\lightning$ $\lrcorner$ ▨