Lemma: $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetiges VF

$\overline{V} \subseteq U$ kompakt $\quad [t_0, t_+] \subseteq I$

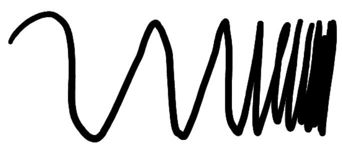
$\gamma : [t_0, t_+) \to \overline{V}$ Int. kurve

Dann läßt sich γ stetig auf $[t_0, t_+]$ fortsetzen.

Bem: Betrachte die Kurve

$$\gamma : [-2\pi, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \sin(1/t)$$

γ



γ läßt sich nicht stetig nach 0 fortsetzen. Aber γ ist auch nicht Int. kurve eines stetigen VF.

Bew (Lemma)

Sei $K > 0$ eine obere Schranke für $\|X\|$ auf $[t_0, t_+] \times \overline{V}$.

Damit ist $\gamma : [t_0, t_+) \to \overline{V}$ K-Lipschitzstetig wegen

$$\|\gamma(t)-\gamma(t')\| \leq \int_t^{t'} \|X_s(\gamma(s))\| ds \leq K|t'-t|$$

Aus der Lipschitzstetigkeit folgt insbesondere die gleichm. Stetigkeit.

Damit existiert $v_+ := \lim_{t \nearrow t_+} \gamma(t)$ und

$$\bar{\gamma}: t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & : t_0 \leq t < t_+ \\ v_+ & : t = t_+ \end{cases}$$

ist eine stetige Int.kurve auf $[t_0, t_+]$, die γ fortsetzt. ☒

<u>Kor</u>: Sei $X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges VF und $\gamma: J \to U$ eine maximale Int.kurve. Ist $t_+ := \sup J < \sup I$, so gilt

$$\gamma[t_0, t_+) \nsubseteq \overline{V}$$

für jedes $t_0 \in J$ und jede kompakte Teilmenge $\overline{V} \subseteq U$.

<u>Bew</u>: Ist $\gamma[t_0, t_+) \subseteq \overline{V}$, so ist γ fortsetzbar auf $[t_0, t_+]$ und damit auf $[t_0, t_+ + \delta]$. Widerspruch zur Nichtfortsetzbarkeit. ☒

<u>Erörterung</u>: $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetiges VF.

$\gamma : J \to U$ maximale Int. kurve.

<u>Es gelte</u>: $t_+ := \sup J < \sup I$.

Sei $(V_n)_n$ eine Folge

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

offener Teilmengen in U mit

1) $\overline{V_n}$ kompakt für jedes n

2) $\overline{V_n} \subset V_{n+1}$ für jedes n

3) Für jede kompakte Teilmenge $\overline{W} \subseteq U$ gibt es ein n mit $\overline{W} \subseteq \overline{V_n}$.

<u>Z.B.</u> $V_n := \left\{ x \in U \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \|x\| < n \\ 2)\ d(x, \partial U) < 1/n \end{array} \right\}$

⌈ Ist $\overline{W} \subseteq U$ kompakt, so hat $\|\cdot\|$ auf $\overline{W}$ ein Max. und $d(-, \partial U)$ ein Min. ⌋

Wir haben gesehen, daß $\gamma[t_0, t_+)$ in keinem $\overline{V_n}$ enthalten sein kann.

<u>Beob</u>: $\overline{V_{n+2}} \setminus V_{n+1}$ ist kompakt.

<u>Beob</u> $\overline{V_{n+2}} \setminus V_{n+1}$ ist disjunkt von $\overline{V_n}$

<u>Beob</u>: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und disjunkt.

$$d: A \times B \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \mapsto \| a - b \|$$

nimmt ein Minimum an, z.B. bei (a_0, b_0). Wegen $d(a_0, b_0) > 0$ folgt:

$$0 < d(A, B) := \inf \{ d(a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

<u>Also</u>: $\Delta := d(\overline{V}_n, \; U \setminus V_{n+1}) > 0$

Auf $\overline{V}_{n+1}$ ist $\|X\|$ beschränkt, z.B durch K. Damit benötigt eine Int.kurve mindestens Zeit Δ/K dazu, von V_n aus nach $U \setminus V_{n+1}$ zu kommen.

<u>Folge</u>: Die Int.kurve γ kann nur endlich oft zwischen V_n und $U \setminus V_{n+1}$ oszillieren.

<u>Folge</u>: Für jedes n gibt es ein $t \in J$, so daß $\gamma[t, t_+)$ zu V_n disjunkt ist.

<u>Folge</u>: Für jedes Kompaktum K gibt es

$t \in J$, so daß $\gamma[t_1, t_+)$ zu K

disjunkt ist. $\boxtimes$

<u>Das Polygonzugverfahren</u> (nach Euler und Cauchy)

$X: I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\|X\| \leq K$

$(t_0, u_0) \in I \times U \qquad \overline{\mathbb{B}}_{K\delta}(u_0) \subseteq U$

<u>Ziel</u>: „Finde" eine Int.kurve $\gamma: [t_0, t_0+\delta] \to U$.

Sei $\Sigma = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t_0 + \delta$ eine Folge von Stützstellen mit Weite

$$w(\Sigma) := \min (t_{i+1} - t_i)$$

Ein Σ-Polygonzug ist eine Funktion

$$\gamma: [t_0, t_0+\delta] \to U$$

so daß $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ eine gerade Strecke ist

$$\gamma(t) = \frac{(t_{i+1} - t)\gamma(t_i) + (t - t_i)\gamma(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\text{für} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

Ein Σ-Polygonzug ist <u>zu X kompatibel</u>, wenn für $i = 0, \dots, k-1$ gilt:

$$X(\gamma(t_i)) = \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

<u>Beob</u>: Zu jedem Σ gibt es genau einen zu X kompatiblen Σ-Polygonzug γ mit $\gamma(t_0) = u_0$, nämlich:

$$\gamma(t_1) = (t_1 - t_0)\, X(u_0)$$
$$\gamma(t_2) = (t_2 - t_1)\, X(\gamma(t_1))$$
$$\vdots$$

Sei γ_Σ dieser Polygonzug.

<u>Beob</u>: γ_Σ ist K-Lipschitzstetig.

<u>Also</u>: 1) $\{\gamma_\Sigma \mid \Sigma\}$ ist glm. glgr. stetig.

2) $\gamma_\Sigma^{-1}(t)$ ist <u>rel. kompakt</u> für jedes $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ im $\mathbb{R}^n$ heißt das <u>beschränkt</u>

<u>Also</u>: Arzela-Ascoli impliziert, daß es eine Folge $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ gibt, so daß die Folge $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ mit

$$\gamma_n := \gamma_{Z_n}$$

gleichmäßig konvergiert gegen eine stetige Funktion $\gamma : [t_0, t_0 + \delta] \to U$.

<u>Übung</u>: Zeige, daß γ eine Int.kurve mit $u_0 = \gamma(t_0)$ ist.