Lineare Differentialgleichungen

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) := \{ A = (a_{ij}) \ : \ m\times n\text{-Matrix}, \ a_{ij}\in\mathbb{R}\}$$

Bem: $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Der Raum $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ der quadratischen Matrizen ist eine $\mathbb{R}$-Algebra (man kann Matrizen multiplizieren).

Die Determinante

$$\det : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

ist multiplikativ: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ als Raum von Spalten. Für $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} M_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

eine lineare Abb., und jede lin. Abb kann auf diese Weise beschrieben werden.

Def: Eine Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt **submultiplikativ**, wenn gilt

$$|AB| \leq |A|\,|B| \qquad \forall A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ vorgegeben, so nennen wir $|\cdot|$ **verträglich** mit $\|\cdot\|$, wenn $|\cdot|$ submultiplikativ ist und

$$\|Ax\| \leq |A|\,\|x\| \qquad \forall A \quad \forall x$$

gilt.

Bsp: Die L_1 - Norm

$$|A| := \sum_{i,j} |a_{ij}| \qquad A = (a_{ij})$$

ist verträglich mit der L_∞-Norm

$$\|x\|_\infty := \max_i |x_i| \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bew: $A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{jk})$

$C = (c_{ik}) \qquad c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk}$

$$\sum |c_{ik}| \leq \sum |a_{ij}|\,|b_{jk}|$$

$$\leq \sum |a_{ij}|\,|b_{kl}| = |A|\,|B|$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum a_{ij} x_j \right|$$

$$|a_{ij} x_j| \leq |a_{ij}|\,|x_j| \leq |A|\,\|x\|_\infty \qquad \boxtimes$$

<u>Bem</u>: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Dann ist

$$\|A\|_{op} := \inf\{ C \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \}$$

die von $\|\cdot\|$ induzierte <u>Operatornorm</u>.

1) $\|\cdot\|_{op}$ ist eine Norm

2) $\|\cdot\|_{op}$ ist submultiplikativ und verträglich mit $\|\cdot\|$.

<u>Bew</u>: Übungsaufgabe.

<u>Bem</u>: Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume, so wird durch

$$\|T\|_{op} := \inf\{ C > 0 \mid \|T(e)\|_F \leq C\|e\|_E \}$$

eine Norm (die Operatornorm) auf dem Raum $\mathcal{B}(E;F)$ der beschränkten ($\Leftrightarrow$ stetigen) lin. Abb $T: E \to F$ erklärt.

Bem: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ eine Abbildung. Wir beschreiben γ durch die Koordinaten

$$\gamma(t) = \left(\gamma_{ij}(t) \right)_{ij}$$

Wir nennen γ diff.bar / int.bar, wenn alle γ_{ij} diff.bar bzw. int.bar sind.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \right)_{ij}$$

$$\int \gamma \, dt = \left(\int \gamma_{ij} \, dt \right)_{ij}$$

Alles ist koordinatenweise erklärt.

Beob:

$$\frac{d}{dt} A(t)\, B(t) = A'(t)\, B(t) + A(t)\, B'(t)$$

$$\frac{d}{dt} A(t)\, x(t) = A'(t)\, x(t) + A(t)\, x'(t)$$

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \sum \det(a_1(t) \cdots a_i'(t) \cdots a_n(t))$$

mit $A(t) = \left(a_1(t) \cdots a_n(t) \right)$ $\quad a_j(t) = \begin{pmatrix} a_{1j}(t) \\ \vdots \\ a_{nj}(t) \end{pmatrix}$

Bew: Produktregel.

Def: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Gegeben $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$, durch

$$X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(t,u) \mapsto A(t)\,u + b(t)$$

ist ein Vektorfeld definiert. Die Int.kurven

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

$$\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + b(t)$$

lösen das <u>lineare System von DGLn</u>

$$\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} + b(t)$$

Satz: Seien $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zu $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Int.kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_0) = u_0$.

⌜Dabei ist γ auf ganz I erklärt. !!! ⌟

Gelten für ein Teilintervall $I \supseteq J \ni t_0$ die Abschätzungen $|A(t)| \le L$ $\|b(t)\| \le K$

so gilt für $t \in J$:

$$\|\gamma(t)\| \leq \|u_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{K}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

Der globale Fluß ist stetig.

<u>Bew</u>: $X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(t, u) \mapsto A(t)\, u + b(t)$

ist stetig, weil A und b stetig sind.

X ist Lipschitzstetig im Raum:

$$\| X_t(u) - X_t(v) \| = \| A(t)(u-v) \| \leq |A(t)|\, \|u-v\|$$

Ist $J \subseteq I$ kompakt, so ist $|A(t)|$ auf J beschränkt. Daher existiert eine Lösung auf J nach Picard-Lindelöf. Der globale Fluß ist stetig.

Zu den Abschätzungen.

Sei $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ die Lösung zum AWP $\eta(t_0) = 0$.

<u>Setze</u>: $f(t) := \|\eta(t)\| + \frac{K}{L}$

<u>Beh</u>: $f(t) \leq f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$

$$
\begin{aligned}
\|\eta(t)\| &= \|\eta(t) - \eta(t_0)\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\eta(s) + b(s) \, ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\|\eta(s)\| + K \quad ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L f(s) \, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) := \|\eta(t)\| + \frac{K}{L} &\leq \frac{K}{L} + \int_{t_0}^{t} L f(s) \, ds \\
&= f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} f(s) \, ds
\end{aligned}
$$

Gronwald $\Rightarrow$ $\quad f(t) \leq f(t_0) e^{L|t-t_0|}$

D.h. $\quad \|\eta(t)\| + \frac{K}{L} \leq \frac{K}{L} e^{L|t-t_0|}$

$$
\|\eta(t)\| \leq \frac{K}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)
$$

Nun betrachten wir $\Delta(t) := \gamma(t) - \eta(t)$.

Es ist $\Delta'(t) = \gamma'(t) - \eta'(t)$

Δ löst das homogene System $\Delta' = A\Delta$

$$= A(t)(\gamma(t) - \eta(t))$$

$$= A(t)\,\Delta(t)$$

Also: Δ erfüllt

$$\Delta(t) = \underbrace{\Delta(t_0)}_{= u_0} + \int_{t_0}^{t} A(s)\,\Delta(s)\,ds$$

$$\|\Delta(t)\| \le \|\Delta(t_0)\| + L\int_{t_0}^{t} \|\Delta(s)\|\,ds$$

Gronwall $\Rightarrow$ $\|\Delta(t)\| \le \|\Delta(t_0)\|\, e^{L|t-t_0|}$

$$= \|u_0\|\, e^{L|t-t_0|}$$

Nun mit Dreiecksungleichung:

$$\|\gamma(t)\| \le \|\Delta(t)\| + \|\eta(t)\|$$

$$\le \|u_0\|\, e^{L|t-t_0|} + \frac{K}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

$\square$

Schneller: $\|\gamma(t) - \eta(t)\| \le \|\gamma(t_0) - \eta(t_0)\|\, e^{L|t-t_0|}$

wg. „Drift von Integralkurven".